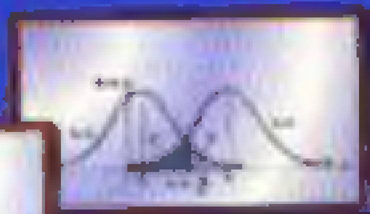
الاستدلال الإحصائي (2)

نظرية اختبار الفرضيات





الاستدلال الإحصائي (2)

نظرية اختبار الفرضيات



دكتـــور
عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى
أستاذ الإحصاء بكلية العلوم
جامعــة ناصــر
الجماهيرية العظمى

مجموعة النيل العربية

عنوان الكتـــاب : الاستدلال الإحصائي / (2) نظرية اختبار الفرضيات
المــــؤلـــف : دكتور / عبد الحفيظ محمد فوزي مصطفى
رقـــم الإيـــداع : 2002/8218
التــرقـيـم الدولي : 4 - 61 - 5919 - 977
الطبـــعـــة : الأولى
سنــة النشـــر : 2002
النـاشـــر : مجموعة النيل العربية


الــعــنــوان : ص.ب : 4051 الحي السابع
مدينة نصر ـ القاهرة ـ ج.م.ع
التليــفـــون : 00202/2602938
الفـــاكس : 00202/2602938
بريـد إليكتــروني : e-mail: arab_nile_group@hotmail.com

المحتويات

الموضوع	الصفحة

الفصل الأول: بعض المفاهيم والمصطلحات الأساسية في اختبار الفرضيات

الفصل الثاني: الاختيار بين فرضيتين بسيطتين

الموضوع	الصفحة

الفصل الثالث: الاختبارات وحيدة الجانب

الفصل الرابع: اختبارات ذات جانبين

الفصل الخامس: اختبار نسبة المعقولية العامة

الفصل السادس: الاختيار بين فرضيتين بسيطتين باستخدام التحليل التتابعي

الفصل السابع: الفرضيات الإحصائية اللامعلمية

الموضوع	الصفحة

الفصل الثامن: اختبار الفرضيات حول شكل التوزيع

الفصل التاسع: اختبار الفرضيات حول كميات

الفصل العاشر: اختبارات التماثل في منظومة مبوبة

الفصل الحادي عشر: اختبارات التجانس

الفصل الثاني عشر: اختبارات الاستقلال واختبارات العشوائية

الفصل الثالث عشر: مبادئ نظرية القرار

الموضوع	الصفحة



ر

مقدمة

يتكون الاستدلال الإحصائي من فرعين رئيسيين: هما التقدير واختبار الفرضيات. وقد درسنا في الجزء الأول من كتاب الاستدلال الإحصائي بتفصيل واف موضوعات نظرية التقدير، وذلك بتقديم مفاهيم هذه النظرية وقواعدها ومبرهناتها بشكل متدرج ومترابط وشامل، بحيث يتيح للطلاب والباحثين والمهتمين بالطرق الإحصائية استيعاب الأسس الرياضية لها وترجمتها إلى الواقع العملي. ولاستكمال دراستنا للاستدلال الإحصائي لابد من دراسة موضوعات نظرية اختبار الفرضيات.

ونحتاج في كثير من الدراسات والبحوث والمشاكل العلمية –في ميادين المعرفة المختلفة– إلى التحقق من صحة فرضية ما حول توزيع متغير عشوائي أو خصائصه (أو عدة متغيرات عشوائية)، وتصاغ مثل تلك الفرضية –عادة– بناءً على التصورات النظرية أو على أساس المعلومات التي توفرها عينة أو عينات عشوائية من قيم المتغير أو المتغيرات العشوائية الملاحظة، أو على أساس أبحاث إحصائية لملاحظات أخرى أو بناء على مقاييس معيارية معينة.

يقوم الباحثون في ميادين المعرفة المختلفة بصياغة الفرضية المراد اختبارها، ومهمة الإحصائي تكمن في مساعدتهم في اختيار الفرضية المناسبة، وبناء الاختبار الأمثل للوصول إلى اتخاذ قرار قبول أو رفض الفرضية بناءً على معطيات العينة أو العينات المشاهدة.

لذا سنكرس الجزء الثاني من كتاب الاستدلال الإحصائي لبحث موضوعات نظرية اختبار الفرضيات، وذلك بتقديم المفاهيم الأساسية لها (الفرضية الإحصائية، إحصاء الاختبار، الاختبار الإحصائي، منطقة الرفض، نوع الخطأ، قوة الاختبار، . . . الخ). ومن ثم صياغة الفرضيات الإحصائية (المعلمية واللامعلمية) الأكثر انتشاراً في التطبيقات، وبعد

ذلك بناء قواعد اختبارها ببناء الاختبارات المثلى. ومن خلال أمثلة لحل مسائل اختبار تلك الفرضيات نقدم المبادئ العامة لبناء الاختبارات المناسبة وكيفية إجرائها.

كما سنتعرض في هذا الجزء من الكتاب -بشكل مختصر- لأحد الاتجاهات الهامة في الأبحاث الإحصائية المعاصرة والمتمثلة بنظرية القرارات. ويشتمل العرض على بعض المفاهيم الأساسية والنتائج الهامة لهذه النظرية وذلك في إطار مدخلين منطقيين لاتخاذ القرارات: مبدأ بييز، ومبدأ أصغر الكبريات، وتطبيق ذلك على مسائل التقدير واختبار الفرضيات المعلمية كمسائل قرار.

ولتحقيق الأهداف المرجوة من هذا الجزء، لا سيما تقديم أساسيات نظرية اختبار الفرضيات وركائزها، والربط بين النظرية والتطبيق، وبحث الأصول العلمية لبناء قواعد اختبار الفرضيات المختلفة. وزّعت موضوعات الجزء الثاني من كتاب الاستدلال الإحصائي؛ "نظرية اختبار الفرضيات" على ثلاثة عشر فصلاً. وتشتمل غالبية الفصول على أمثلة وافية محلولة بغية إعطاء القارئ غير المتآلف مع تقنيات نظرية اختبار الفرضيات تمثيلاً محسوساً للأسس الرياضية لهذه النظرية، ودليلاً للتطبيق على حالات من الواقع، كما وتشمل هذه الفصول على عدد من التمارين غير المحلولة لسبر مدى استيعاب القارئ للجانب النظري من الكتاب، ومدى مقدرته على تطبيق المبرهنات والاستفادة منها في حل المسائل الإحصائية.

وما يرجوه المؤلف يتمثل في أن يكون الأسلوب الذي قدمت به المادة، وأن تكون الأمثلة التي تضمنها الكتاب، قد حققا الغاية المثلى منهما، وهي تمكين القارئ من اكتساب المعرفة بنظرية الفرضيات وتقنيات التطبيق. ولعل تقديم المصطلحات الإحصائية باللغتين العربية والإنجليزية، ضمن سياق النص ما ييسر للقارئ فهم المادة، ومتابعة المراجع والبحوث الأجنبية.

وثمة ملاحظة منهجية لابد من الإشارة إليها، وهي أن (العلاقة، الشكل، الجدول، المبرهنة) نصطلح للدلالة عليها بثلاثية مرتبة من الأعداد، فمثلاً عبارة العلاقة (3.4.10) تفيد الفصل العاشر، البند الرابع، العلاقة الثالثة على الترتيب. بينما العلاقة (I-3.4.10)

تفيد إعادة القارئ إلى الجزء الأول من كتاب (الاستدلال الإحصائي 1- نظرية التقدير) وإلى الفصل العاشر والبند الرابع والعلاقة الثالثة من ذلك الجزء.

ويمثل هذا الكتاب -بجزأيه- خلاصة جهد حثيث بذله المؤلف على مدى سنوات، وقد حفزه في ذلك ملاحظته -كمتخصص- ما تعانيه المكتبة العربية من نقص في المراجع والبحوث الإحصائية. فكل ما يتمناه أن يكون هذا المُؤلَّف بجزأيه لبنة في صرح الدراسات العلمية، وإسهاماً في إثراء المكتبة العربية لما فيه خير العلم والمعرفة والأجيال.

والله ولي التوفيق

أ. د. عبدالحفيظ مصطفى



الفصل الأول:

بعض المفاهيم والمصطلحات الأساسية في اختبار الفرضيات

لا بد في البداية من تقديم مفاهيم ومصطلحات أساسية ضرورية توطئة لدراسة نظرية اختبار الفرضيات، حيث إن دراستها المفصلة بالإضافة إلى المفاهيم الأساسية الأخرى ستتم من خلال بحثنا اللاحق لهذا الموضوع.

1.1 الفرضية الإحصائية STATISTICAL HYPOTHESIS

تدعى أية عبارة (إفادة، تخمين، تصريح، مقولة، . . .) حول شكل (نمط) توزيع أو خصائص متغير عشوائي أو أكثر بـ "الفرضية الإحصائية" أو اختصاراً بالفرضية "Hypothesis". ومثل هذه الفرضيات يمكن صياغتها على أساس التصورات النظرية أو على أساس المعلومات التي توفرها عينة عشوائية من قيم المتغير أو المتغيرات العشوائية الملاحظة أو على أساس أبحاث إحصائية لملاحظات أخرى، ويرمز عادة للفرضية الإحصائية بـ H.

مثال 1.1.1

لتكن التجربة E متمثلة بقياس مقدار فيزيائية ما عدة مرات، قيمته الحقيقية a غير معلومة ولا تتغير من قياس لآخر. تؤثر على نتائج القياس عوامل عشوائية عدة (دقة جهاز

القياس، خطأ التقريب عند حساب المعطيات، . . . الخ)، لذا يمكن كتابة نتيجة القياس i، ولنرمز لها بـــ X_i، على الصورة $X_i = a + \varepsilon_i$، حيث إن الخطأ العشوائي للقياس ε_i هو عبارة عن محصلة لعدد كبير من الأخطاء الصغيرة. يمكننا، حسب مبرهنة النهاية المركزية، تصور أن المتغيرات العشوائية X_i لها توزيع طبيعي، وهذا التصور عبارة عن فرضية إحصائية حول توزيعات المتغيرات العشوائية الملاحظة في التجربة.

مثال 2.1.1

إذا كانت ξ تمثل أطوال طلاب الجامعة، فإن الفرضية الإحصائية يمكن أن تكون:

$$H : \mathcal{L}(\xi) = N(165,25)$$

وهذه الفرضية حول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ξ.

مثال 3.1.1

إذا كانت ξ تمثل دخول أسر مدينة دمشق وتوزيعها $f_\xi(x)$ وكانت η تمثل دخول أسر مدينة طرابلس وتوزيعها $f_\eta(x)$، فإن الفرضية الإحصائية يمكن أن تكون:

$$H : f_\xi(x) = f_\eta(x)$$

وهذه الفرضية تنص فقط على أن المتغيرين η , ξ لهما نفس التوزيع الاحتمالي ولكن لم تحدد التوزيع، ولا تخص معلمة مجهولة.

مثال 4.1.1

إذا كانت ξ متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع الأسي:

$$f(x,\theta) = \theta e^{-\theta x} \quad ; \quad x > 0 \ , \ \theta > 0$$

فإن الفرضية الإحصائية يمكن أن تكون:

$$H : \theta = 0.03$$

وهذه فرضية حول معلمة التوزيع، وتعين توزيع ع تماماً.

مثـال 5.1.1

إذا كانت ع متغيراً عشوائياً يتبع توزيع ذي الحدين:

$$f(x,\theta) = C_x^n \theta^x (1-\theta)^{n-x} \quad ; \quad x = 0,1,\ldots,n \ , \ 0 \le \theta \le 1$$

فإن الفرضية الإحصائية ربما تكون:

$$H : \theta > 0.70$$

وهذه الفرضية حول معلمة توزيع ذي الحدين، ولا تعين توزيع ع تماماً.

نلاحظ من تعريف الفرضية الإحصائية والأمثلة السابقة بأن الفرضية -ربما- تكون حول معلمة أو معالم التوزيع (إذا كانت صيغته معلومة لكنها تعتمد على معلمة أو معالم مجهولة) أو حول نمط أو خصائص التوزيع الاحتمالي للمتغير أو المتغيرات العشوائية الملاحظة. وعلى ذلك يمكن تصنيف الفرضيات الإحصائية إلى نوعين: معلمية Parametric ولا معلمية Non-parametric.

2.1 الفرضية البسيطة والفرضية المركبة

SIMPLE AND COMPOSITE HYPOTHESIS

تصنف أيضاً الفرضيات الإحصائية حسب تعيينها التام أو غير التام (الجزئي) للتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الملاحظ أو للتوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية الملاحظة إلى نوعين، هما: بسيطة ومركبة.

1.2.1 الفرضية البسيطة The Simple Hypothesis

تدعى كل فرضية إحصائية تعين تماماً التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الملاحظ ع

(أو التـــوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية الملاحظة) بالبسيطة. فمثلاً، الفرضيتـــان الواردتان في المثالين (2.1.1) و (4.1.1) بسيطتان.

2.2.1 الفرضية المركبة The Composite Hypothesis

تـــدعى كل فرضية إحصائية لا تعين تماماً التـــوزيع الاحتمالي للمتغير العشـــوائي الملاحظ ع (أو التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية الملاحـــظة) بالمركبة. فمثـــلاً، الفرضيات الواردة في الأمثلة (1.1.1) ، (3.1.1) و (5.1.1) مركبة.

3.1 فرضية العدم والفرضية البديلة

NULL AND THE ALTERNATIVE HYPOTHESIS

إذا صيغت فرضية حول توزيع أو خصائص متغير عشـــوائي (أو عـــدة متغـــيرات عشوائية) بهدف اختبار صحتها فتدعى عادة بفرضية العدم Null hypothesis ويرمـــز لها بـــ H_0 ، كما تدعى ببعض الأدبيات الإحصائية بالفرضية الصفريـــة أو الأساســـية. وعادة يقوم الباحثون في ميادين المعرفة المختلفة بصياغة فرضية العدم ومهمة الإحصـــائي تكمن في مساعدتهم في اختيار فرضية العـــدم المناسبة واتخاذ القرار بقبول أو رفض تلـــك الفـــرضية. إذن فرضية العدم هي الفرضية التي سيتم اختبارها. وعادة إلى جانب فرضيـــة العدم تصاغ فرضية أخـــرى تدعى بالفرضية البديلة Alternative hypothesis، ويرمز لها بـــ H_1 . وتقبل الفرضية H_1 في حالة رفض الفرضية H_0 نتيجة الاختبار، أي يتـــم اختبار فرضية العدم H_0 ضد فرضية بديلة H_1 ، بحيث رفض الفرضية H_0 يعني قبـــول الفرضية البديلة H_1 والعكس صحيح. وفي حالات عدة تكون الفرضيـــة البديلـــة H_1 عبارة عن " H_0 غير صحيحة".

نشير هنا إلى أن فرضية العدم H_0 يمكن أن تكـــون بسيطة أو مركبـــة وكذلـــك الفرضية البديلة H_1 ، وهذا ما يبدو بوضوح من خلال الأمثلة التالية:

مثال 1.3.1

إذا كان المتغير العشوائي الملاحظ ξ يتبع توزيع:

$$f(x;\theta)=C_x^5\theta^x(1-\theta)^{5-x} \quad ; \quad x=0,1,\dots,5 \;,\; 0\le\theta\le 1$$

فإن فرضية العدم H_0 والفرضية البديلة لها H_1 يمكن أن تأخذ أحد الأشكال الآتية، على سبيل المثال وليس الحصر:

$$H_0:\theta=0.5 \quad , \quad H_1:\theta=0.40$$

$$H_0:\frac{1}{2}<\theta<\frac{2}{3} \quad , \quad H_1:0<\theta\le\frac{1}{2} \text{ or } \frac{2}{3}\le\theta<1$$

$$H_0:\theta=0.20 \quad , \quad H_1:\theta\ne 0.20$$

$$H_0:\theta\ne 0.30 \quad , \quad H_1:\theta=0.30$$

مثال 2.3.1

إذا كان المتغير العشوائي الملاحظ ξ يخضع لتوزيع $N(\theta_1,\theta_2^2)$، ربما تكون فرضية العدم H_0 والفرضية البديلة لها H_1 على النحو الآتي:

$$H_0:\mathcal{L}(\xi)=N(10,16) \quad , \quad H_1:\mathcal{L}(\xi)=N(8,9)$$
$$H_0:\mathcal{L}(\xi)\in N(\theta,16) \quad , \quad H_1:\mathcal{L}(\xi)\in N(\theta,25)$$
$$H_0:\mathcal{L}(\xi)\in N(10,\theta^2) \quad , \quad H_1:\mathcal{L}(\xi)\notin N(10,\theta^2)$$
$$H_0:\mathcal{L}(\xi)=N(10,16) \quad , \quad H_1:\mathcal{L}(\xi)\ne N(10,16)$$

مثال 3.3.1

إذا كان (ξ,η) متغيراً عشوائياً ملاحظاً ذا بعدين توزيعه الاحتمالي $f(x,y)$ غير معلوم، وكذلك التوزيع الهامشي لكل من ξ و η غير معلوم ونرمز لهما على الترتيب $f_\xi(x)$ و $f_\eta(x)$، فإن فرضية العدم H_0 والفرضية البديلة لها H_1 يمكن أن تأخذ أحد الصيغتين الآتيتين، على سبيل المثال، وليس الحصر:

$$H_0 : f(x,y) = f_\xi(x) f_\eta(y) \quad , \quad H_1 : f(x,y) \neq f_\xi(x) f_\eta(y)$$

$$H_0 : f_\xi(x) = f_\eta(y) \quad , \quad H_1 : f_\xi(x) \neq f_\eta(y)$$

وسنذكر لاحقاً صيغاً رياضية أخرى لفرضية العدم H_0 والفرضية البديلة لها H_1.

4.1 الاختبار الإحصائي وإحصاء الاختبار

STATISTICAL TEST AND TEST STATISTIC

إذا تمت صياغة فرضية عدم H_0 من أجل الظاهرة المدروسة (عملية، حالة، . . . الخ) فتتمثل الخطوة التالية بصياغة القاعدة التي تمكننا بناءً على نتائج الملاحظات (المعطيات الإحصائية المتوفرة لدينا من عينة مشاهدة أو أكثر) من اتخاذ أحد قرارين: قبول أو رفض الفرضية H_0. وتدعى القاعدة التي يتم وفقها قبول أو رفض الفرضية المختبرة H_0 بالاختبار الإحصائي Statistical test أو باختصار الاختبار Test للفرضية H_0. إن دراسة مثل هذه القواعد وبناءها تشكل موضوع نظرية اختبار الفرضيات الإحصائية.

لتكن لدينا عينة عشوائية $X = (X_1, ..., X_n)$ من توزيع $\mathcal{L}(\xi)$ غير معلوم تماماً أو معلوم جزئياً (صيغة توزيعه معلومة)، وصيغت بخصوصه فرضية ما H_0. ويطلب تبيان صحة الفرضية H_0 أو عدم صحتها أي يجب بناء القاعدة التي تتيح عند كل ملاحظة $x = (x_1, ..., x_n)$ للعينة X من اتخاذ أحد قرارين: قبول الفرضية H_0 أو رفضها.

إن مجموعة القيم الممكنة للعينة العشوائية X [جميع العينات بحجم n $x = (x_1, ..., x_n)$ التي يمكن سحبها من التوزيع $\mathcal{L}(\xi)$] تكون فئة تدعى بفضاء العينة للملاحظات Sample space of observations، أو فضاء العينة، ونرمز له بـ G. وكل اختبار يقابل تقسيماً (تجزئة) لفضاء العينة G إلى فئتين مانعتين بالتبادل نرمز لهما بـ G_0 و G_1 $(G_0 \cap G_1 = \varnothing, G_0 \cup G_1 = G)$ حيث إن G_0 تتألف من النقاط

$x=(x_1,...,x_n)$ التي تُقبل عندها فرضية العدم H_0، بينما تتألف G_1 من النقاط $x=(x_1,...,x_n)$ التي تُرفض عندها فرضية العدم H_0. وعلى ما سبق يمكن صياغة التعاريف الأربعة التالية:

تعريف 1.4.1: منطقة الرفض أو المنطقة الحرجة

Rejection or Critical Region

هي فئة جزئية G_1 من فضاء العينة G ترفض عند كل نقطة (عينة مشاهدة) من نقاطها فرضية العدم H_0، بمعنى إذا كانت $x \in G_1$ فإننا نرفض H_0 (قبول H_1).

تعريف 2.4.1: منطقة القبول Acceptance Region

هي فئة جزئية $G_0 = G/G_1$ من فضاء العينة G تُقبل عند كل نقطة من نقاطها فرضية العدم H_0، أي إذا كانت $x \in G_0$ فإننا نقبل الفرضية H_0.

تعريف 3.4.1: الاختبار الإحصائي Statistical Test

هو بكل بساطة قاعدة أو طريقة أو أسلوب لتجزئة فضاء العينة G إلى منطقتي رفض وقبول. هكذا، اختيار قاعدة اختبار فرضية H_0 مكافئ لتعيين منطقة رفض G_1، أي أن تعيين منطقة رفض الفرضية H_0 هو الاختبار الإحصائي، ومن ثم، وعلى سبيل الاختصار، الاختبار المعرف بمنطقة الرفض G_1 لاختبار فرضية العدم H_0 يدعى بالاختبار G_1 لـ H_0.

إذا تم تعيين منطقة رفض G_1 لاختبار فرضية العدم H_0، فيمكن صياغة خوارزمية الاختبار الإحصائي على النحو الآتي:

لتكن $x=(x_1,...,x_n)$ العينة العشوائية المسحوبة (القيمة الملاحظة لـ X) من التوزيع $\mathcal{L}(\xi)$. إذا تبين أن $x \in G_1$ نرفض فرضية العدم H_0 (نقبل الفرضية البديلة H_1)، بينما إذا كانت $x \in G_0 = \overline{G_1}$ نقبل فرضية العدم H_0، أي أننا لم نجد وفقاً

لمعطيات العينة الملاحظة x دلالات كافية لرفض H_0. وهذا يعني أن قرارنـــا بقبـــول أو رفض فرضية العدم H_0 يعتمد على المعلومات التي تقدمها لنا عينة عشوائية سحبت مـــن المجتمع المدروس. وعادة يتم تعيين منطقة الرفض G_1 لـــ H_0 باستخدام إحصاء (دالـــة في العينة X) وليكن $T(X)$. وكقاعدة عامة تأخذ منطقة الرفض أحد الأشكال الآتية:

$$G_1 = \{x : T(x) \succ c\} \qquad , \qquad G_1 = \{x : T(x) \prec c\}$$

$$G_1 = \{x : |T(x)| \succ c\} \qquad , \qquad G_1 = \{x : |T(x)| \prec c\}$$

حيث إن الرمز $\succ$ يعني $>$ أو $\geq$، وكذلك $\prec$ يعني $<$ أو $\leq$ و c مقداراً ثابتاً ســـنتطرق إلى كيفية تعيينه فيما بعد.

كما نعلم من تعـــريف الإحصـــاء $T(X)$ إنه عبارة عن دالة حقيقية معرفة علـــى فضاء العينة G $(G \subseteq R^n)$. وهذا يعني إذا رمزنا لفئة القيم الممكنة للإحصاء $T(X)$ بـــ $\mathfrak{I}$ فإن $\mathfrak{I} \subseteq R$ وكل عينة عشوائية ملاحظة $x = (x_1, ..., x_n)$ تقابل عدداً حقيقياً وحيـداً $t = T(x)$ (صورة x وفق T). وعلى ذلك في التطبيقات يمكن بدلاً من منطقة الرفـــض G_1 لـــ H_0 أخذ صورتها وفق الـــدالة T كمنطقة رفض لفرضية العدم H_0 ونرمز لهـــا بـــ $\mathfrak{I}_1 = T(G_1)$. وبشكل مشابه تؤخذ صورة G_0 وفق الدالة T كمنطقة قبـــول لـــ H_0 ونرمز لها بـــ $\mathfrak{I}_0 = T(G_0)$. ومن الواضح أن $\mathfrak{I}_0, \mathfrak{I}_1$ تشكـــلان تجزئةً لــ $\mathfrak{I}$ إلى فئتين متنافيتين (مانعتين) بالتبادل:

$$\mathfrak{I}_0 \cap \mathfrak{I}_1 = \varnothing \quad , \quad \mathfrak{I}_0 \cup \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}$$

وتأخذ منطقة الرفض $\mathfrak{I}_1$ بدلالة قيم الإحصاء $T(X)$ أحد الأشكال:

$$\mathfrak{I}_1 = \{t : t = T(x) \succ c\} \qquad , \qquad \mathfrak{I}_1 = \{t : t = T(x) \prec c\}$$

$$\mathfrak{I}_1 = \{t : |t| = |T(x)| \succ c\} \qquad , \qquad \mathfrak{I}_1 = \{t : |t| = |T(x)| \prec c\}$$

وعلى ذلك، إذا وقعت قيمة إحصاء الاختبار $T(X)$، عند العينة العشوائية الملاحظـــة

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ في منطقة الرفض $\Im_1$ ، أي أن $t = T(x) \in \Im_1$ ، فإننا نرفض الفرضية H_0 ، بينما إذا كانت $t = T(x) \in \Im_0$ فنقبل فرضية العدم H_0 .

تعريف 4.4.1: إحصاء الاختبار Test Statistic

هو إحصاء (دالة في العينة X) نجري من خلاله الاختبار. أي أن قرار قبول أو رفض فرضية العدم H_0 يبنى على أساس قيمة إحصاء الاختبار عند العينة الملاحظة x. وعلى ذلك يدعى أحياناً إحصاء الاختبار $T(X)$ بدالة القرار أو قاعدة القرار.

ويتم عادة اختيار إحصاء الاختبار $T(X)$ بحيث يكون توزيعه الاحتمالي، عند صحة فرضية العدم H_0 ، معلوماً تماماً أو بشكل تقريبي.

نلاحظ مما سبق أنه إذا كانت $\Im_1 = \Im$ $(G_1 = G)$ فهذا يعني أننا نرفض فرضية العدم H_0 مهما كانت قيمة إحصاء الاختبار $T(X)$ (مهما كانت قيمة X). أما إذا كانت $\Im_1 = \varnothing$ $(G_1 = \varnothing)$ فهذا يعني أننا دائماً نقبل فرضية العدم H_0 مهما كانت القيمة الملاحظة $t = T(x)$ (مهما كانت العينة الملاحظة $x = (x_1, \ldots, x_n)$) وهما حالتان حديتان لا وجود لهما تطبيقياً.

5.1 أنواع الخطأ وحجم الخطأ

TYPES OF ERROR AND SIZE OF ERROR

لا يوجد قرار إحصائي منزه عن الخطأ، فالقرارات الإحصائية هي دائماً قرارات احتمالية، بمعنى أنه لا مفر من وجود احتمال للخطأ في أي قرار نصدره حول مجتمع عن طريق عينة عشوائية مأخوذة منه. ولما كانت هذه القرارات مؤسسة على ما نجريه من اختبارات للفرضيات وتزيد ثقتنا بزيادة حساسية هذه الاختبارات، وجب علينا أن ندرس كيف نزيد من هذه الحساسية، أي من قدرة الاختبارات على تمكيننا من اتخاذ القرار السليم الذي لا يشوبه إلا قدر ضئيل من الخطأ. ويتأتى ذلك عن طريق التحكم

ما أمكن في احتمالات الأخطاء التي تنجم حتماً عند استخدام الاختبارات. ومن الطبيعي إذن أن نقدم هذه الأخطاء توطئة لدراسة كيفية التقليل منها ما استطعنا إلى ذلك سبيلاً.

عند اتخاذ أي قرار بقبول أو رفض فرضية عدم H_0 نكون أمام الحالات الأربع المبينة في الجدول (1.5.1).

جدول (1.5.1)

فرضية العدم H_0	القرار	
	رفض H_0	قبول H_0
H_0 صحيحة	خاطئ	صحيح
H_0 خاطئة	صحيح	خاطئ

نلاحظ من الجدول (1.5.1) أن القرار خاطئ في الحالتين:

1. رفض فرضية العدم H_0 بينما هي في الواقع صحيحة، ويدعى مثل هذا الخطأ بالخطأ من النوع الأول Type I error.
2. قبول فرضية العدم H_0 وهي في الواقع خاطئة. ويدعى هذا الخطأ بالخطأ من النوع الثاني Type II error.

فمثلاً، شخص ما متهم بالقتل قُدّم للمحاكمة، وكما هو معلوم في القضاء أن المتهم بريء حتى تثبت إدانته، بمعنى أن فرضية العدم H_0 هي: الشخص المتهم بريء. يعتمد قرار المحكمة في هذه القضية على المعلومات المتوفرة بهذا الخصوص، ويكون لدينا الحالات الأربع المبينة في الجدول (2.5.1).

جدول (2.5.1)

الشخص المتهم بريء H_0	قرار المحكمة	
	الشخص المتهم قاتل (رفض H_0)	الشخص المتهم بريء (قبول H_0)
الشخص المتهم بريء فعلاً	خاطئ	صحيح
الشخص المتهم قاتل فعلاً	صحيح	خاطئ

نلاحظ أن الخطأ من النوع الأول يتمثل في قرار المحكمة بأن الشخص المتهم قاتل بينما هو في الحقيقة بريء، أما الخطأ من النوع الثاني فيتمثل بقرار المحكمة بأن المتهم بريء في حين أنه قاتل فعلاً.

هكذا، عند اختبار فرضية H_0 يمكن الوصول إلى قرار صحيح أو الوقوع في خطأ من النوع الأول أو الثاني.

حجم الخطأ Size of Error

في الإحصاء يقاس الخطأ باحتمال الوقوع فيه ويدعى بحجم الخطأ. إذا رمزنا بـ $P_0 = P(H_1|H_0)$ و $P_1 = P(H_0|H_1)$ لاحتمالي الوقوع في الخطأ من النوع الأول والثاني على الترتيب، وكذلك بـ $f(x|H_j)$ للتوزيع الاحتمالي للعينة X، عند صحة الفرضية H_j ، $j = 0,1$، فإن:

1. احتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول، أو حجم الخطأ من النوع I:

$$P_0 = P(H_1|H_0) = P(X \in G_1|H_0) = \begin{cases} \sum_{x \in G_1} f(x|H_0) \\ \int_{G_1} f(x|H_0)dx \quad ; \quad dx = \prod_1^n dx_i \end{cases} \qquad (1.5.1)$$

2. احتمال الوقوع في خطأ من النوع الثاني، أو حجم الخطأ من النوع الثاني II:

$$P_1 = P(H_0|H_1) = 1 - P(X \in G_1|H_1) = \begin{cases} 1 - \sum_{x \in G_1} f(x|H_1) \\ 1 - \int_{G_1} f(x|H_1)dx \ \ ; \ \ dx = \prod_1^n dx_i \end{cases}$$

(2.5.1)

نـــلاحظ من العلاقتين (1.5.1) و (2.5.1) أن P_0 دالة في G_1 و H_0 بينمـــا P_1 دالة في G_1 و H_1.

إذا استخدمنا $\Im_0$ و $\Im_1$ بدلاً من G_0 و G_1 على الترتيب، ورمزنا بـــــ $f(t|H_j)$ للتوزيع الاحتمالي لإحصاء الاختبار $T(X)$، عند صحة الفرضية $H_j\ ,\ j = 0,1$، فيمكننـــا كتابة العلاقتين (1.5.1) و (2.5.1) على النحو الآتي:

$$P_0 = P(T \in \Im_1|H_0) = \begin{cases} \sum_{t \in \Im_1} f(t|H_0) \\ \int_{\Im_1} f(t|H_0)dt \end{cases} \qquad (3.5.1)$$

$$P_1 = 1 - P(T \in \Im_1|H_1) = \begin{cases} 1 - \sum_{t \in \Im_1} f(t|H_1) \\ 1 - \int_{\Im_1} f(t|H_1)dt \end{cases} \qquad (4.5.1)$$

نلاحظ أيضاً أن P_0 دالة في $\Im_1$ و H_0 بينما P_1 دالة في $\Im_1$ و H_1.

6.1 الفرضية الإحصائية المعلمية

PARAMETRIC STATISTICAL HYPOTHESIS

تشكل الفرضيات حول النماذج المعلمية صفاً هاماً من الفرضيات الإحصائية. وفي هذه الحالة عائلة التوزيعات المقترحة F (النموذج الإحصائي) للمتغير العشوائي الملاحظ ع تأخذ الشكل الآتي:

$$F = \{F(x;\theta), \theta \in \Theta\}$$

أي أنها تعتبر عائلة لشكل دالي خاص. وتوجد دوال هذه العائلة في تقابل (واحد لواحد) مع قيم المعلمة $\theta = (\theta_1,...,\theta_r)$ من فضاء المعلمة $\Theta \subseteq R^r ; r = 1,2,...$ ، لذا الفرضيات الإحصائية تتعلق بالمعلمة غير المعلومة في النموذج المقترح F. وتدعى مثل هذه الفرضيات بالفرضيات المعلمية Parametric hypotheses.

تمثل العبارات التالية أمثلة لفرضيات إحصائية معلمية:

1. $H_0 : \theta = \theta_0$

حيث θ_0 قيمة ما معينة للمعلمة θ $(\theta_0 \in \Theta)$.

2. $H_0 : \theta_1 = \theta_2 = ... = \theta_r \quad ; \quad \theta = (\theta_1,...,\theta_r)$

3. $H_0 : g(\theta) = g_0$

حيث $g(\theta)$ دالة في θ و g_0 قيمة معينة لها.

تعطى الفرضية الإحصائية المعلمية -بشكل عام- بدلالة فئة جزئية ما $\Theta_0 \subset \Theta$، التي تشتمل، حسب الفرضية، على المعلمة غير المعلومة θ. ويعبر عن ذلك على الصورة:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$

والفرضية البديلة تأخذ الشكل:

$$H_1 : \theta \in \Theta_1 \subseteq \Theta \setminus \Theta_0$$

وتدعى النقاط $\theta \in \Theta_1$ بالبدائل. إذا كانت الفئة $\Theta_0 (\Theta_1)$ تشتمل على نقطة واحدة فقط، فإن الفرضية $H_0 (H_1)$ تكون بسيطة، وخلاف ذلك تكون فرضية العدم H_0 (أو الفرضية البديلة H_1) مركبة. فمثلاً، الفرضية (1) بسيطة والفرضية (2) مركبة بينما الفرضية (3) يمكن أن تكون بسيطة أو مركبة.

إذا كانت المعلمة θ ذات r بعداً، أي $\theta = (\theta_1, ..., \theta_r)$، وكانت فرضية العدم H_0 بحيث تحدد قيماً معينة لـ $k \le r$ من المركبات $\theta_1, ..., \theta_r$، فإننا نقول إن فرضية العدم H_0 بسيطة عندما $k = r$ ومركبة عندما $k < r$، ويسمى الفرق $r - k \ge 0$ في بعض الأدبيات الإحصائية بعدد درجات الحرية للفرضية H_0، وبهذا المعنى يكون k عبارة عن عدد القيود التي تضعها الفرضية H_0. فمثلاً، لتكن عائلة التوزيعات المقترحة $N(\theta_1, \theta_2^2)$، عندها العبارة:

$$H_0 : \theta_1 = \theta_{10} \quad , \quad \theta_2 = \theta_{20}$$

حيث θ_{10}, θ_{20} عددان معينان والدليل 0 يشير إلى القيمة الخاصة التي حددتها الفرضية H_0 للمعلمة $\theta = (\theta_1, \theta_2)$، عبارة عن فرضية بسيطة حول معلمة التوزيع الطبيعي للملاحظة. بينما الفرضية $H_0 : \theta_1 = \theta_{10}$ مع بقاء قيمة التباين θ_2^2 غير معينة هي فرضية مركبة.

7.1 دالة قوة اختبار POWER FUNCTION OF A TEST

لتكن لدينا عينة عشوائية $X = (X_1, ..., X_n)$ من التوزيع الاحتمالي $\mathcal{L}(\xi) \in F = \{F(x;\theta), \theta \in \Theta\}$، الذي صيغت بشأنه فرضية العدم $H_0 : \theta \in \Theta_0$ (θ يمكن أن تكون وحيدة البعد أو متعددة الأبعاد) ضد فرضية بديلة $H_1 : \theta \in \Theta_1$. ولنفترض أن G_1 اختبارٌ ما لاختبار H_0 ضد H_1. إن دالة قوة الاختبار G_1، نرمز لها

ـــ $W(\theta) = W(G_1;\theta)$، وتعرف على أنها احتمال رفض فرضية العـــدم H_0 عند أيـــة نقطة من فضاء المعلمة Θ، أي أن:

$$W(\theta) = W(G_1;\theta) = P_\theta(X \in G_1) \quad ; \quad \theta \in \Theta \qquad (1.7.1)$$

وعندما يقتصـــر تعريف دالة القوة $W(\theta)$ على Θ_1 فتدعى بدالة قوة الاختبار G_1 للفرضية H_0 ضد H_1.

$$W(\theta) = W(G_1;\theta) = P_\theta(X \in G_1) \quad , \quad \theta \in \Theta_1 \qquad (2.7.1)$$

تلعب دالة القوة في اختبار الفرضيات نفس الدور الذي يلعبه متوسط مربع الخطأ في التقدير.

تعريف 1.7.1: قوة الاختبار Power of A Test

تدعى قيمة دالة القوة $W(\theta) = W(G_1,\theta)$، عند قيمة معينة $\theta_1 \in \Theta_1$، بقوة الاختبـــار G_1 لفرضية العدم H_0 ضد البديل θ_1، ونرمز لها بـــ $W(\theta_1) = W(G_1,\theta_1)$.

عندما تكون المعلمة θ وحيدة البعد يمكن تمثيل دالـــة القـــوة $W(\theta) = W(G_1,\theta)$ بيانياً، حيث تقـــاس θ على المحـــور الأفقي و $W(\theta)$ على المحور الرأسي، فنحصل بذلك على منحنى دالة القوة Power curve.

مثـــال 1.7.1

لتكن $X = (X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta,25)$، ولنفترض:

$$H_0 : \theta \le 10 \quad , \quad H_1 : \theta > 10$$

والاختبار:

$$G_1 = \left\{x : \bar{x} \ge 10 + 5/\sqrt{n}\right\}$$

إن دالة قوة الاختبار G_1:

$$W(\theta)=P_\theta(\overline{X}\geq 10+5/\sqrt{n})=1-\Phi\left(\frac{10+5/\sqrt{n}-\theta}{5/\sqrt{n}}\right)\quad ;\quad -\infty<\theta<+\infty$$

عندما $n=25$ ، فإن:

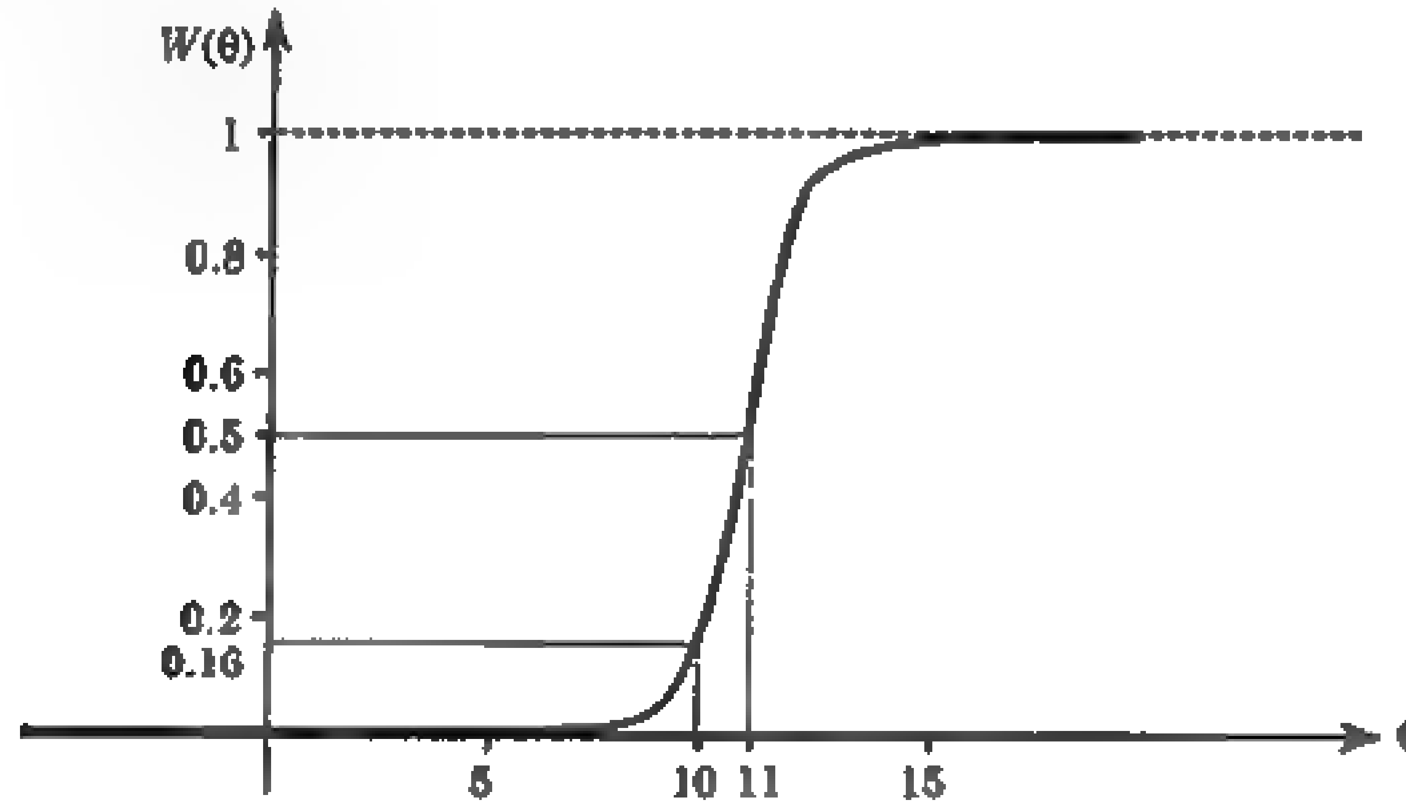
$$W(\theta)=1-\Phi(11-\theta)\quad ,\quad -\infty<\theta<+\infty$$

ومنحنيي دالة القوة $W(\theta)$ كما هو مبين على الشكل (1.7.1).

يمكن التعبير عن احتمالي الخطأ من النوع I ، II بدلالة دالة القوة $W(\theta)$ للاختبـــار G_1 لاختبار الفرضية $H_0:\theta\in\Theta_0$ ضد $H_1:\theta\in\Theta_1$ على النحو الآتي:

$$P(H_1|H_0)=P_\theta(X\in G_1)=W(\theta)\quad ;\quad \theta\in\Theta_0 \tag{3.7.1}$$

$$P(H_0|H_1)=1-P_\theta(X\in G_1)=1-W(\theta)\quad ;\quad \theta\in\Theta_1 \tag{4.7.1}$$



شكل (1.7.1)

فمثلاً، بالعودة إلى المثال السابق (1.7.1) نجد:

$$P_0=P(H_1|H_0)=W(\theta)=1-\Phi\left(\frac{10+5/\sqrt{n}-\theta}{5/\sqrt{n}}\right)\quad ;\quad \theta\leq 10$$

$$P_1 - P(H_0|H_1) = 1 - W(\theta) = 1 - \Phi\left(\frac{10 + 5/\sqrt{n} - \theta}{5/\sqrt{n}}\right) \quad ; \quad \theta > 10$$

تعريف 2.7.1: حجم اختبار Size of A Test

ليكن G_1 اختباراً ما للفرضية $H_0 : \theta \in \Theta_0$ ، حيث $\Theta_0 \subset \Theta$ فئة جزئية من فضاء المعلمة Θ. يعرف حجم الاختبار G_1 للفرضية H_0 على أنه أكبر قيمة لدالة قوة الاختبار على Θ_0 ونرمز له بـ α، أي أن:

$$\max P_0 = \sup_{\theta \in \Theta_0} W(\theta) = \alpha$$

وفي الكثير من المؤلفات الإحصائية يدعى بـ "مستوى المعنوية أو الدلالة أو الأهمية Significance Level" بدلاً من حجم الاختبار. فمثلاً، حجم الاختبار G_1 المعرف في المثال (1.7.1)، عندما $n = 25$ ، يساوي:

$$p_0 = W(10) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

لأن $\sup_{\theta \in \Theta_0} W(\theta) = 0.1587$.

وعندما تكون الفرضية $H_0 : \theta \in \Theta_0$ بسيطة، أي أن $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ ، فإن حجم (مستوى المعنوية أو الدلالة) الاختبار G_1 هو $p_0 = W(\theta_0) = \alpha$. ونرمز عندئذٍ لمنطقة الرفض G_1 بحجم α بـ $G_{1\alpha}$. وإذا كانت $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ فنرمز لاحتمال الخطأ من النوع II بـ β.

مثال 2.7.1

لتكن $X = (X_1, X_2)$ عينة عشوائية من توزيع $\Gamma(1,1/\theta)$ ونريد اختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = 1$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta = 2$ وفق الاختبار الموافق لمنطقة الرفض:

$$G_1 = \{x : x_1 + x_2 < c\}$$

حيث c مقدار ثابت، فأوجد احتمالي الخطأ من النوع I ، II ومثل العلاقة بينهما بيانياً.

نلاحظ أن إحصاء الاختبار هو $T(X) = X_1 + X_2$ ويتبع توزيع جاما $\Gamma(2,1/\theta)$:

$$h(t,\theta) = t\theta^2 e^{-\theta t} \quad ; \quad t > 0$$

لأن الإحصاء T عبارة عن مجموع متغيرين عشوائيين مستقلين لكل منهما التوزيع $\Gamma(1,1/\theta)$، وعلى ذلك فإن:

$$h(t|H_0 : \theta = 1) = te^{-t} \quad ; \quad t > 0$$
$$h(t|H_1 : \theta = 2) = 4te^{-2t} \quad ; \quad t > 0$$

وبالتالي:

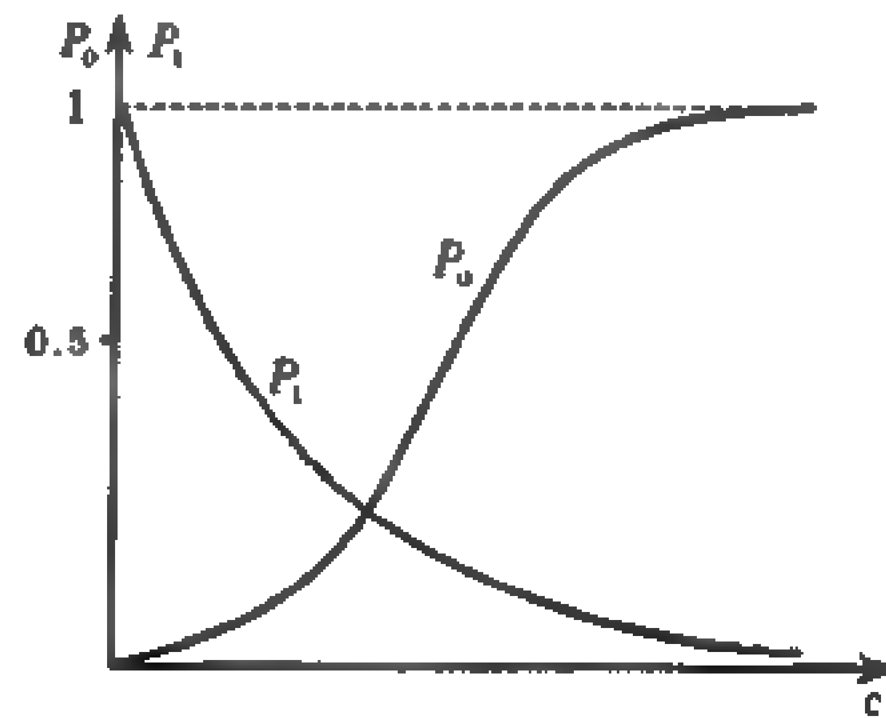
$$P_0 = \psi_0(c) = P(H_1|H_0) = P(X \in G_1|H_0) = P_{\theta_0}(T(X) < c) =$$
$$= \int_0^c te^{-t}dt = 1-(1+c)e^{-c} \qquad (1)$$

$$P_1 = \psi_1(c) = P(H_0|H_1) = 1 - P(X \in G_1|H_1) = 1 - P_{\theta_1}(T(X) < c) =$$
$$= 1 - \int_0^c 4te^{-2t}dt = (1+2c)\,e^{-2c} \qquad (2)$$

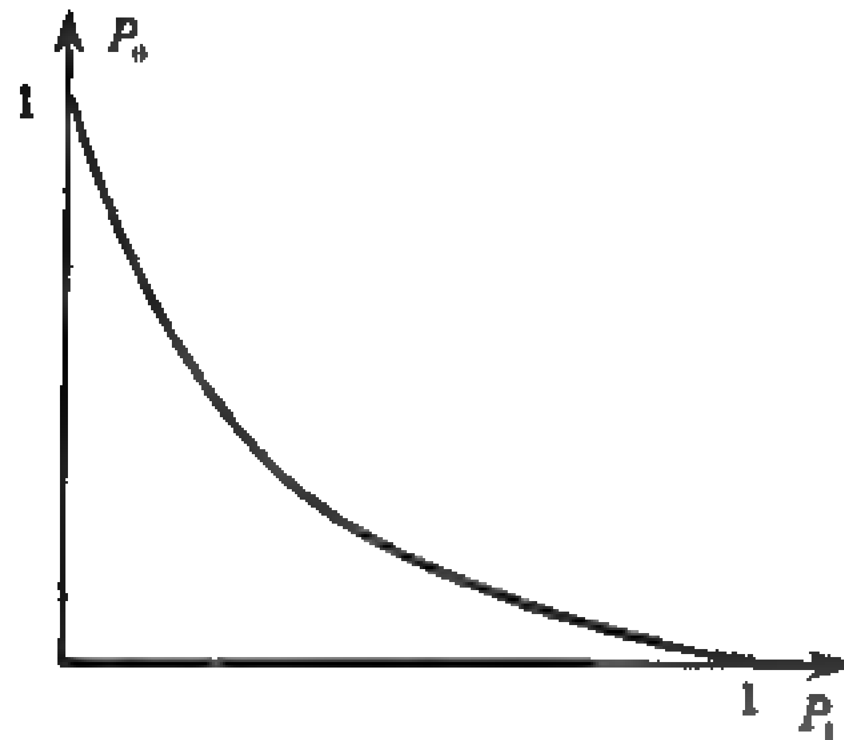
من (1) و (2) نجد:

$$P_1 = (1-P_0)^2 - c^2e^{-2c}$$

والتمثيل البياني للعلاقات (1) ، (2) و (3) مبين على الشكلين (2.7.1) و (3.7.1).



شكل (2.7.1)



شكل (3.7.1)

يلاحظ بوضوح على الشكلين (2.7.1) و (3.7.1) أنه كلما زادت قيمة P_0 نقصت قيمة P_1 والعكس صحيح. وهذه صيغة عامة لمسائل اختبار الفرضيات الإحصائية عدما يكون حجم العينة n محدوداً ومعيناً مسبقاً. وبعبارة أخرى بناءً على تغيير منطقة الرفض G_1 (تغير قيمة c) لا نستطيع رفع حجم الخطأ P_0, P_1 في اتجاه واحد، بحيث يزيدان معاً أو ينقصان معاً. فمثلاً، بأخذ $G_1 = G$ سيكون لدينا $W(\theta) = 1$ وهذا يعني أن $p_0 = 1$ و $p_1 = 0$، وإذا كانت $G_1 = \varnothing$ فإن $W(\theta) = 0$ ومن ثم $p_0 = 0$ و $p_1 = 1$. ومن الواضح أن كلا الحلين غير صحيح في ظل معلومات ناقصة (عينة) غير كاملة عن المجتمع المفروض. والطريقة الوحيدة لإنقاص حجمي الخطأ في آن واحد هو زيادة حجم العينة n. والعلاقات التالية محققة دوماً:

$$\lim_{n\to\infty} P_0 = 0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} P_1 = 0$$
$$\lim_{P_0\to 0} P_1 = 1 \quad , \quad \lim_{P_1\to 0} P_0 = 1 \tag{5.7.1}$$

8.1 المبدأ العام لاختيار منطقة الرفض

GENERAL PRINCIPLE FOR CHOICE REJECTION REGION

ذكرنا سابقاً عند اختبار فرضية العدم H_0 ضد فرضية بديلة H_1 يمكن الوصول إلى قرار صحيح أو الوقوع في خطأ من النوع I (رفض H_0 وهي صحيحة)، أو الوقوع في خطأ من النوع II (قبول H_0 وهي خاطئة). وبعبارة أخرى يقع الخطأ من النوع I إذا وقعت القيمة الملاحظة x للعينة العشوائية X في منطقة الرفض G_1 وفي نفس الوقت H_0 صحيحة، بينما يقع الخطأ من النوع II إذا كانت $x \in G_0$ لكن فرضية العدم H_0 غير صحيحة (الفرضية البديلة H_1 صحيحة). ومن الطبيعي أننا نرغب في إجراء اختبار فرضية العدم H_0 ضد الفرضية البديلة H_1 بحيث يكون كل من حجمي الخطأ من النوع I و II أقل ما يمكن، أي بناء الاختبار الإحصائي المحقق لذلك. لهذا المعنى تعيين منطقة الرفض G_1 لفرضية العدم $H_0 : \theta \in \Theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \in \Theta_1$ بحيث

تكون قيمة كل من $P_0 = P(H_1|H_0)$ و $P_1 = P(H_0|H_1)$ أصغر مـــا يمكـــن. لكـــن لاحظنا في المثال السابق (2.7.1) أنه من المستحيل من أجل حجم معين ومحدود n للعينـــة X إنقاص كل من P_0 و P_1 في آن واحد، حيث كل حيطة نتخذها ضـــد أحد الخطأين تؤدي إلى ثغرة في حيطتنا ضد الخطأ الآخر، أي لا يمكن دفع حجمي الخطـــأ في اتجـــاه واحد (يزيدان معاً أو ينقصان معاً) وعليه تبقى مسألة اختبار الفرضيات على هذا الأساس غير محددة تماماً.

ووفق هذا فـــإن المبدأ المنطقي لاختيار منطقة الرفض (تعيين الاختبار) للفرضية H_0 ضد H_1 يمكن صياغته على النحو الآتي:

يتم اختيار حد أعلى α لاحتمال الوقوع في خطأ من النوع الأول $(P_0 \le \alpha)$، عنـــد حجم محـــدود ومعين n للعينة العشوائية X، ومن ثم اختيار منطقة الرفض G_1 الموافقـــة لأصغر قيم لاحتمالات الوقوع في الخطأ من النوع الثاني مهما تكن $\theta \in \Theta_1$ (أو أكبر قـــوة $W(\theta)$ مهما تكن $\theta \in \Theta_1$). وهذا يعني اختيار عدد α بين 0 و 1 بحيث يتحقق الشرط:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} W(G_1;\theta) \le \alpha \quad \text{or} \quad W(G_1;\theta) \le \alpha \quad , \quad \forall \theta \in \Theta_0 \qquad (1.8.1)$$

بذلك يكون لدينا صف الاختبارات المختلفة بشكلها والمتســـاوية في حجومـــها أو المختلفة α_1، لكنها لا تتجاوز α، نرمز له بـــ $P(G_{1\alpha_1})$. ويصبح الاختبـــار المطلـــوب تعيين $G_1 \in P(G_{1\alpha_1})$ الموافقة لأصغر قيم لاحتمالات الوقوع في الخطأ من النوع الثـــاني $1 - W(\theta); \theta \in \Theta_1$ أو لأكبر قوة $W(\theta)$ عند كل البدائل $\theta \in \Theta_1$. إن وجد مثل هـــذا الاختبار فيكون هو الاختبار الأفضل بحجم α_1 لاختبار الفرضية H_0 ضد H_1.

مثـال 1.8.1

إذا كانت $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta,1)$ وكانت:

$$H_0 : \theta = 0 \quad , \quad H_1 : \theta = 2$$

وكان هناك الاختباران:

$$G_1^{(1)} = \{x : 2\overline{x} > 1.96\}$$
$$G_1^{(2)} = \left\{ x : \frac{\sum_1^4 i x_i}{\sqrt{30}} > 1.96 \right\}$$

أي الاختبارين تفضل؟.

بما أن:

$$\mathcal{L}_\theta(2\overline{X}) \in N(2\theta, 1)$$
$$\mathcal{L}_\theta\left(\frac{\sum_1^4 i X_i}{\sqrt{30}} \right) \in N\left(\frac{10}{\sqrt{30}}\theta, 1 \right)$$

عندما تكون H_0 صحيحة فإن:

$$\mathcal{L}_{\theta_0}(2\overline{X}) = N(0,1)$$
$$\mathcal{L}_{\theta_0}\left(\frac{\sum_1^4 i X_i}{\sqrt{30}} \right) = N(0,1)$$

وعندما تكون H_1 صحيحة فإن:

$$\mathcal{L}_{\theta_1}(2\overline{X}) = N(4,1)$$
$$\mathcal{L}_{\theta_1}\left(\frac{\sum_1^4 i X_i}{\sqrt{30}} \right) = N\left(\frac{20}{\sqrt{30}}, 1 \right)$$

وعلى ذلك فإن احتمال الوقوع في الخطأ من النوع I (حجم الاختبار):

$$\alpha = P_{\theta_0}(2\overline{X} > 1.96) = P(Z > 1.96) = 1 - \Phi(1.96) = 0.025$$

$$\alpha = P_{\theta_0}\left(\frac{\sum_1^4 iX_i}{\sqrt{30}} > 1.96\right) = P(Z > 1.96) = 1 - \Phi(1.96) = 0.025$$

أي أن الاختبارين $G_1^{(1)}$, $G_1^{(2)}$ مختلفان في الشكل لكن متساويان في الحجم ($\alpha = 0.025$). وبشكل مشابه احتمال الوقوع في خطأ من النوع II:

$$\begin{aligned}\beta = 1 - P_{\theta_1}(2\overline{X} > 1.96) &= 1 - P(Z \le 1.96 - 4)\\ &= 1 - P(Z \le -2.04)\\ &= \Phi(2.04) = 0.0207\end{aligned}$$

$$\beta = 1 - P_{\theta_1}\left(\frac{\sum_1^4 iX_i}{\sqrt{30}} > 1.96\right) = 1 - P\left(Z \le 1.96 - \frac{20}{\sqrt{30}}\right)$$

$$\begin{aligned}&= 1 - P(Z \le -1.69)\\ &= \Phi(1.69) = 0.0455\end{aligned}$$

وبتلخيص ما سبق نجد:

	β	α
الاختبار I	0.0207	0.025
الاختبار II	0.0455	0.025

وبالتالي فإننا نفضل الاختبار I لأن قيمة β الموافقة له أقل.

والسؤال الآن كيف نختار مستوى للمعنوية α؟

إن اختيار مستوى المعنوية α في مسائل اختبار الفرضيات غالباً مرتبط بالجانب التطبيقي للمسألة، حيث إن أي قرار خاطئ يترتب عليه خسائر مادية أو معنوية أو الاثنين معاً، وبناءً على مقارنة الخسائر المترتبة على نوعي الخطأ في المسألة المطروحة يتم

تعيين قيمة α. إذا كان قبول الفرضية H_0 وهي خاطئة (الخطأ من النوع II) يـؤدي إلى خسائر كبيرة، فمن الطبيعي جعل احتمال الوقوع في خطأ من النوع II أقل مـا يمكـن بإعطاء قيمة لـ α كبيرة نسبيا. وعادة يتم اختيار إحدى القيـم: 0.05، 0.01، 0.005. ومن أجل هذه القيم أعدت جداول خاصة، حسب توزيع إحصاء الاختبار المتخذ، عنـد القيم المختلفة لـ n. أي نبدأ بالتحكم في احتمال الخطأ من النوع I، وذلك بوضع حـدٍّ أعلى له، ثم نعين على أساسه منطقة رفض فرضية العدم H_0.

هكذا، عند مقارنة عدة اختبارات (مناطق رفض G_1) نثبت قيمة α لكـل منـها ونختار الاختبـار (منطقة الرفض) المـوافق لأصغر قيم لـ P_1 عند كل البدائل $\theta \in \Theta_1$ بالمقارنة مع الاختبارات الأخرى بحجم α أو أقل.

مثـال 2.8.1

لتكن $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $\mathcal{L}(\xi) \in F = \{F(x;\theta); \theta \in \Theta\}$ و $\theta_0 \neq \theta_1$ ، $H_0 : \theta = \theta_0 , H_1 : \theta = \theta_1$ ، وكانت لدينا الاختبارات الأربع التالية كـل منها بحجم $\alpha = 0.05$ وقيم β الموافقة:

	β
الاختبار I	0.0208
الاختبار II	0.0144
الاختبار III	0.3152
الاختبار IV	0.0523

أي الاختبارات تفضل؟

بما أن الاختبارات الأربع من نفس الحجم $\alpha = 0.05$ فإن الاختبار الأفضـل هـو الموافق لأصغر قيمة لـ β، أي الاختبار II.

9.1 الاختبار الأقوى والاختبار الأقوى بانتظام

MOST POWERFUL TEST AND UNIFORMLY MOST POWERFUL TEST

تعريف 1.9.1: الاختبار الأقوى The Most Powerful Test

لتكن $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع:

$$\mathcal{L}(\xi)\in F=\{F(x;\theta);\theta=\theta_0,\theta_1\}\ \ ,\ \ \Theta=\{\theta_1,\theta_2\}$$

و $P(G_{1\alpha_1});\alpha_1\le\alpha$ صف الاختبارات للفرضية $H_0:\theta=\theta_0$ ضد $H_1:\theta=\theta_1$ المختلفة بأشكالها والمتساوية أو المختلفة في الحجم، لكن هذا الحجم لا يتجاوز $\alpha;0<\alpha<1$.

يقال عن اختبار $G_1^*\in P(G_{1\alpha_1})$ بأنه الأقوى بحجم α_1 ضمن صف الاختبارات $P(G_{1\alpha_1})$ إذا حقق الشرط:

$$W(G_1^*,\theta_0)=\alpha_1 \tag{1.9.1}$$

$$W(G_1^*,\theta_1)\ge W(G_1,\theta_1) \tag{2.9.1}$$

من أجل أي اختبار آخر $G_1\in P(G_{1\alpha_1})$.

نلاحظ من العلاقة (1.9.1) أن الاختبار G_1^* بحجم α_1، لذا نرمز له بـ $G_{1\alpha_1}^*$، كما نلاحظ من تعريف الصف $P(G_{1\alpha_1})$ أن $G_1\in P(G_{1\alpha_1})\Rightarrow W(G_1,\theta_0)\le\alpha$.

هكذا، الاختبار $G_{1\alpha_1}^*$ الأقوى بحجم α_1 إذا كان حجمه α_1 وله أكبر قوة بالنسبة لكافة الاختبار بحجم α أو أقل لاختبار الفرضية H_0 ضد H_1. وبعبارة أخرى، الاختبار $G_{1\alpha_1}^*$ الأقوى بحجم α_1 إذا كان حجم الخطأ من النوع I الموافق له يساوي α_1 وله أصغر حجم خطأ من النوع II بالنسبة لكل الاختبارات الأخرى بحجم خطأ من النوع I يساوي α أو أقل.

تعريف 2.9.1: الاختبار الأقوى بانتظام Uniformly Most Powerful Test

لتكن $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع:

$$\mathcal{L}(\xi) \in F = \{F(x;\theta);\ \theta \in \Theta\}$$

وفرضية العدم $H_0 : \theta \in \Theta_0$ بسيطة (أو مركبة) ضد فرضية بديلة مركبة $H_1 : \theta \in \Theta_1$ (Θ_1 تشتمل على أكثر من نقطة).

يقال عن $G_1^* \in P(G_{1\alpha_1});\alpha_1 \le \alpha$ إنه الأقوى بانتظام بحجم α_1 إذا حقق الشرطين:

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} W(G_1^*;\theta) = \alpha_1 \quad \text{or} \quad W(G_1^*;\theta) \le \alpha_1 \quad ; \quad \theta \in \Theta_0 \qquad (3.9.1)$$

$$W(G_1^*;\theta) \ge W(G_1;\theta) \quad ; \quad \theta \in \Theta_1 \ ,\ G_1 \in P(G_{1\alpha_1}) \qquad (4.9.1)$$

أي أن الشرط الثاني محقق مهما يكن البديل $\theta \in \Theta_1$ ومن أجل أي اختبار آخر $G_1 \in P(G_{1\alpha_1})$ بحجم α أو أقل.

هكذا، الاختبار G_1^* الأقوى بانتظام بحجم α_1 إذا كان حجمه α_1 وله أكبر قوة عند كل البدائل $\theta \in \Theta_1$ بالنسبة لكافة الاختبارات بحجم α أو أقل لاختبار فرضية العدم H_0 ضد H_1. ومصطلح "انتظام" يشير إلى أن الاختبار G_1^* الأقوى عند كل القيم البديلة $\theta \in \Theta_1$، وسنرمز لهذا الاختبار بـ $G_{1\alpha_1}^*$. وكحالة خاصة عندما تكون الفرضية البديلة H_1 بسيطة نحصل على الاختبار الأقوى.

إن الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α_1 لاختبار فرضية H_0 ضد H_1 غير موجود دائماً لأن منطقة الرفض -بشكل عام- تعتمد على البديل $\theta \in \Theta_1$، وبالتالي الاختبار الذي له أكبر قوة عند بديل معين $\theta_1 \in \Theta_1$ قد لا يكون له ذلك عند بديل آخر من Θ_1. هذا بالإضافة إلى جعل الشرط (4.9.1) محققاً مهماً تكن $\theta \in \Theta_1$، عند القيد (1.8.1)، غير ممكن دائماً، وتتوفر الإمكانية في بعض الحالات الخاصة. وكأمثلة لمثل تلك الحالات نتعرض لها لاحقاً.

مثـال 1.9.1

لتكن $X=(X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من التوزيـــع $\mathcal{L}(\xi)\in N(\theta,1)$ ، ونريــد اختبار الفرضية $H_0:\theta=\theta_0\ ,\ H_1:\theta>\theta_0$ عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$. ولنفترض لدينا الاختباران، حجم كل منهما $\alpha=0.05$:

الاختبار I $\quad G_{1\alpha}^{(1)}=\left\{x:\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)>1.64\right\}$

الاختبار II $\quad G_{1\alpha}^{(2)}=\left\{x:\left|\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)\right|>1.96\right\}$

احسب دالة القوة لكل من الاختبارين ومثلهما بيانياً:

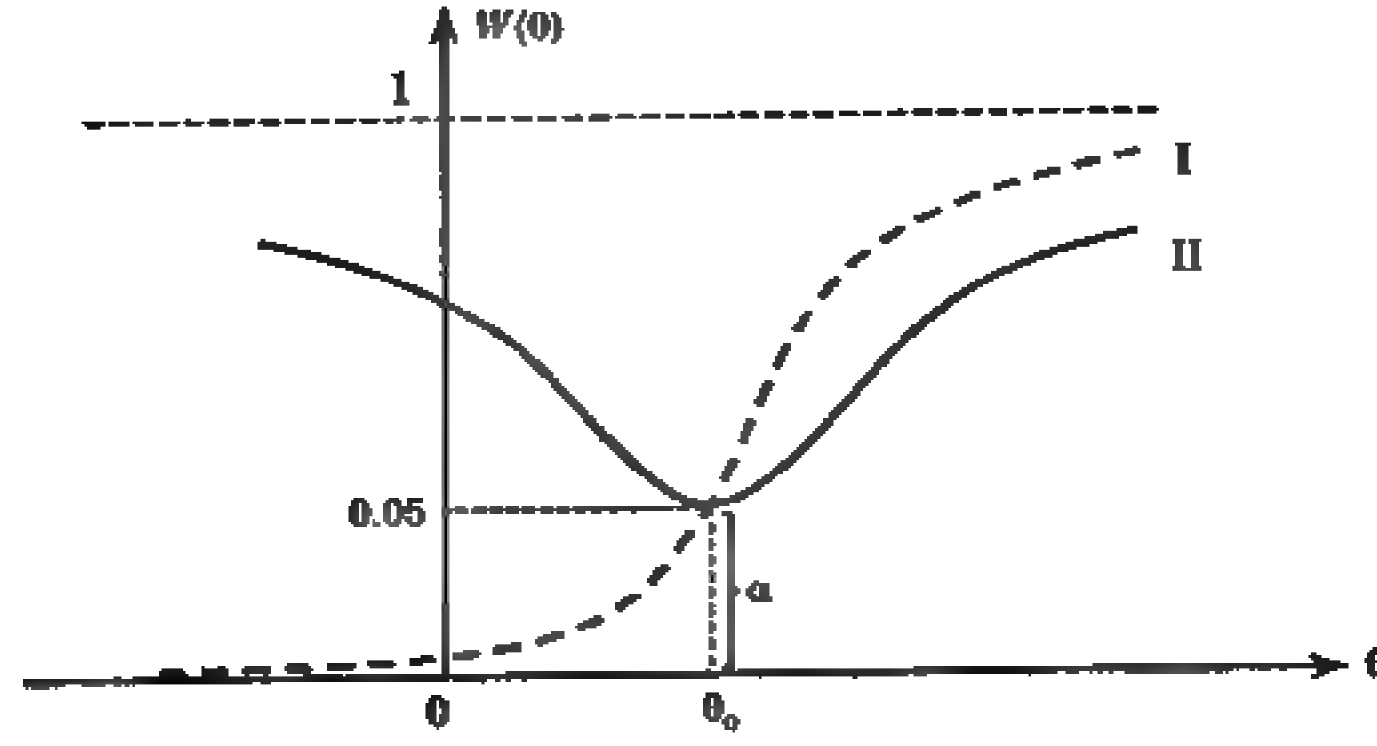
دالة قوة الاختبار I:

$$\begin{aligned}W\left(G_{1\alpha}^{(1)};\theta\right)&=P_\theta\left(\sqrt{n}(\overline{X}-\theta_0)>1.64\right)\\&=P_\theta\left(\frac{\overline{X}-\theta}{1/\sqrt{n}}>1.64+\sqrt{n}(\theta_0-\theta)\right)\\&=1-\Phi\left(1.64+\sqrt{n}(\theta_0-\theta)\right)\quad,\quad-\infty<\theta<+\infty\end{aligned}$$

دالة قوة الاختبار II:

$$\begin{aligned}W\left(G_{1\alpha}^{(2)};\theta\right)&=P_\theta\left(\left|\frac{\overline{X}-\theta_0}{1/\sqrt{n}}\right|>1.96\right)\\&=P_\theta\left(\frac{\overline{X}-\theta_1}{1/\sqrt{n}}<-1.96\right)+P_\theta\left(\frac{\overline{X}-\theta_1}{1/\sqrt{n}}>1.96\right)\\&=\Phi\left(-1.96+\sqrt{n}(\theta_0-\theta)\right)+1-\Phi\left(1.96+\sqrt{n}(\theta_0-\theta)\right)\\&\qquad;\ -\infty<\theta<+\infty\end{aligned}$$

ويبين الشكل (1.9.1) منحني دالة القوة لكل من الاختبارين.



شكل (1.9.1)

نلاحظ أن الاختبار I أقوى بانتظام من الاختبار II لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية $H_1 : \theta > \theta_0$. إذا كانت $H_1 : \theta \neq \theta_0$ فالاختبار I أقوى بانتظام من الاختبار II عند البدائل $\theta > \theta_0$، بينما الاختبار II أقوى بانتظام من الاختبار I عند البدائل $\theta < \theta_0$. أي عند اختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_0$ لا يمكن اعتبار أحد الاختبارين أقوى بانتظام من الاختبار الآخر.

10.1 الاختبار غير المتحيز UNBIASED TEST

يبدو طبيعياً ومرغوباً ألا يكون احتمال رفض فرضية العدم H_0 وهي صحيحة أكبر من احتمال رفضها وهي خاطئة.

تعريف 1.10.1: الاختبار غير المتحيز

نقول عن اختبار $G_1 \in P(G_{1\alpha_1}); \alpha_1 \leq \alpha$ لفرضية العدم $H_0 : \theta \in \Theta_0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \theta \in \Theta_1$ بأنه غير متحيز إذا حقق الشرط:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0}(G_1;\theta) \leq \inf_{\theta \in \Theta_1} W(G_1;\theta) \qquad (1.10.1)$$

وإذا كان الاختبار G_1 بحجم α $(G_{1\alpha})$ نكتب الشرط (1.10.1) على النحو الآتي:

$$W(G_{1\alpha};\theta) \geq \alpha \quad , \quad \forall \theta \in \Theta_1 \qquad (2.10.1)$$

هكذا، صف الاختبارات غير المتحيزة بحجم α أو أقل لاختبار فرضية H_0 ضد H_1 تشكل اختزالاً لمسألة اختبار الفرضيات، وهي عبارة عن فئة جزئية من الاختبارات بحجم α أو أقل $P(G_{1\alpha_1});\alpha_1 \leq \alpha$ ولنرمز له بـ $P_u(G_{1\alpha_1});\alpha_1 \leq \alpha$ $(P_u \subseteq P)$.

في مسائل عدة حيث لا يوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α_1 ضمن صف الاختبارات $P(G_{1\alpha_1})$ لاختبار فرضية H_0 ضد H_1، يمكن إيجاده ضمن صف الاختبارات غير المتحيزة بحجم α أو أقل $P_u(G_{1\alpha_1});\alpha_1 \leq \alpha$. وهذا الاختبار يدعى بالاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α_1 Uniformly most powerful unbiased test. نلجأ إلى مثل هذا الاختزال لمسألة اختبار الفرضيات، عندما لا يوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α_1 ضمن صف الاختبارات $P(G_{1\alpha_1});\alpha_1 \leq \alpha$ للفرضية H_0 ضد H_1، أي عندما يمتنع علينا حل المسألة بإطارها العام.

مما سبق نخلص إلى القول: إن الاختبار الأمثل لاختبار فرضية H_0 ضد H_1، عند مستوى معنوية α، هو الاختبار الأقوى بانتظام أو الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام إن وجد. لذا ستكون مهمتنا الرئيسية تتمثل بالبحث عن الاختبار الأمثل إن وجد.

تمارين

1. إذا كانت $X=(X_1,X_2)$ عينة عشوائية من توزيع $B(1,\theta)$، وكان لدينا الاختبار الموافق لمنطقة الرفض:

$$G_1 = \{x : x_1 + x_2 \geq 4\}$$

لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = 0.20$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \theta = 0.30$، فأوجد حجمي الخطأ من النوع الأول والثاني.

2. إذا كانت X عينة من ملاحظة واحدة من توزيع:

$$f(x;\theta) = (2\theta x + 1 - \theta) \quad ; \quad 0 < x < 1 \ , \ -1 < \theta < 1$$

وكان لدينا الاختبار:

$$G_1 = \left\{x : x > \frac{3}{4}\right\}$$

لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = 1/2$ ضد $H_1 : \theta = 2/3$، فأوجد حجم الاختبار ومن ثم قوته عند $\theta = 2/3$.

3. لتكن $X = (X_1, X_2)$ عينة عشوائية من توزيع أسي $\Gamma(1,1/\theta)$، ونريد اختبار الفرضية $H_0 : \theta_0 = 3$ ضد $H_1 : \theta \neq 3$، عند مستوى أهمية $\alpha = 0.10$. وإذا كان الاختبار معطى بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1 = \{x : x_1 + x_2 \leq c\}$$

فالمطلوب:

أ. عين قيمة الثابت c.

ب. أوجد دالة قوة هذا الاختبار.

ج. أوجد قوة الاختبار عند البديل $\theta = 4$.

4. سحبت عينة عشوائية من ملاحظة واحدة من توزيع بواسون $\Pi(\theta)$ لاختبار الفرضية $H_0 : \theta_0 = 1$ ضد الفرضية $H_1 : \theta > 2$، فإذا كانت منطقة الرفض:

$$G_1 = \{x : x > 4\}$$

فأوجد:

أ. حجم الاختبار G_1.

ب. دالة قوة الاختبار G_1.

ج. حجم الخطأ من النوع الثاني.

5. لتكن X عينة عشوائية من ملاحظة واحدة من توزيع:

$$f(x;\theta)=(1+\theta)x^{\theta} \quad ; \quad 0<x<1 \ , \ \theta>-1$$

وكانت فرضية العدم $H_0:\theta=0$ ضد الفرضية البديلة $H_1:\theta=1$. فأوجد حجمي الخطأ لكل من الاختبارات الآتية:

اختبار I $X>\frac{1}{2}$

اختبار II $X\geq\frac{3}{4}$

اختبار III $X>\frac{7}{8}$

اختبار IV $X\geq 1$

6. لتكن $X=(X_1,\dots,X_4)$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta,1)$، ونريد اختبار الفرضية $H_0:\theta=2$ ضد $H_1:\theta\neq 2$، عند مستوى أهمية (معنوية) $\alpha=0.05$. إذا كان الاختباران:

الاختبار I $G_1=\{x:2(\bar{x}-2)>1.64\}$

الاختبار II $G_2=\{x:|2(\bar{x}-2)|>1.96\}$

فأوجد دالة القوة لكل منهما ومثلهما بيانياً.

الفصل الثاني:

الاختبار بين فرضيتين معلميتين بسيطتين

1.2 مقدمة

سنتطرق في هذا الفصل لحالة خاصة وهامة من الحالة العامة الواردة في البند (6.1)، وبالتحديد عندما تكون الفرضيتان المعلميتان العدم H_0 والبديلة H_1 بسيطتين. وهـــذه الحالة نادرة نسبياً في التطبيقات الإحصائية، لكنها تستخدم كمقدمة ضرورية في نظريـــة اختبار الفرضيات.

لتكن $X=(X_1,...X_n)$ عينة عشوائية مأخوذة من التوزيع:

$$\mathcal{L}(\xi)\in\{F(x;\theta);\theta=\theta_0,\theta_1\}$$

أي أن التوزيعات المقترحة للمتغير العشوائي الملاحظ ξ عبارة عن توزيعين (دالتي توزيع):

$$F_0(x)=F(x;\theta_0) \quad , \quad F_1(x)=F(x;\theta_1)$$

وبعبارة أخرى، فضاء المعلمة $\Theta\subseteq R^r, r=1,2,...$ يتكون من نقطتين:

$$\Theta=\{\theta_0,\theta_1\}$$

ومـــن ثم الفـــرضية المختبـــرة (فرضية العدم) $H_0 : \theta = \theta_0$، بينما الفرضيـــة البديلـــة $H_1 : \theta = \theta_1$. ويطلب بنـــاءً على العينة العشوائية X، معرفة التوزيع الحقيقي لـــ X مـــن التوزيعين F_1 , F_0.

لنفترض التصورات التطبيقية مأخوذة بالاعتبار وتم اختيار مستوى المعنوية (الدلالـة) $0 < \alpha < 1$. عندئذٍ، وفق المبدأ العام الوارد في البنـــد (8.1)، تؤول مسألة بناء أفضـــل اختبار (الاختبار الأمثل) G_1^* إلى مسألة جعل القوة $W(G_1;\theta_1)$ أعظمية بالنسبة لـــ G_1 عند القيد $W(G_1;\theta_0) \le \alpha$. أول من قـــام بحل هذه المسألة هما العالمان نيمان وبيرســـون Neyman and Pearson (عام 1933) باستخدام مفهوم نســـبة المعقوليـــة البســـيطة Simple likelihood ratio.

تعريف 1.1.2: إحصاء نسبة المعقولية البسيطة

Statistic of Simple Likelihood Ratio

لتكن $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $f(x;\theta) ; \theta \in \Theta = \{\theta_0,\theta_1\}$، حيث إن θ وحيـــدة البعد أو متعددة الأبعـــاد، و $L(x;\theta) = L(x_1,...,x_n;\theta) = \prod_1^n f(x_i;\theta)$ دالة المعقولية. نرمز لنسبة المعقولية البسيطة بـــ $\lambda = \lambda(x)$ وتعرف كالآتي:

$$\lambda(x) = \frac{L(x;\theta_0)}{L(x;\theta_1)} = \frac{\prod_1^n f(x_i;\theta_0)}{\prod_1^n f(x_i;\theta_1)}$$

نلاحظ أن $\lambda > 0$ (حاصل قسمة مقدارين موجبين) دالة في العينة المشاهدة، أي أن $\lambda = \lambda(x_1,...,x_n)$، وعندما تمثل الملاحظات بمتغيراتها العشـــوائية الموافقـــة $X_1,...,X_n$ نكتب Λ بدلاً من λ، أي أن $\Lambda = \Lambda(X) = \lambda(X_1,...,X_n)$:

$$\Lambda = \frac{L(X;\theta_0)}{L(X;\theta_1)}$$

عبارة عن دالة في متغيرات العينة العشوائية $(X_1,\dots,X_n)$، ومن ثم Λ متغير عشوائي، وحيث Λ لا تعتمد على معلمة غير معلومة فهي إحصاء، وتدعى إحصاء نسبة المعقولية البسيطة.

والمبرهنة التالية تبين أن الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار فرضية بسيطة $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد فرضية بديلة بسيطة $H_1 : \theta = \theta_1$ موجود دائماً، وتعيين منطقة الرفض الموافقة له، وهنا لابد من التمييز بين حالتين:

1. حالة النموذج المقترح $F(x;\theta)$ مستمر.
2. حالة النموذج المقترح $F(x;\theta)$ متقطع.

وسنبدأ بدراسة الحالة الأولى.

2.2 اختبار نيمان-بيرسون في حالة النموذج مستمر

NEYMAN-PERSON TEST IN THE CASE CONTINUOS MODEL

لنفترض التوزيعين F_0 , F_1 مستمرين إطلاقاً ودالتي الكثافة الموافقتين $f_0(x) = f(x;\theta_0)$, $f_1(x) = f(x,\theta_1)$ تحققان الشرط $f_j(x) > 0 ; j = 0,1$، ولنعرف الدالة $\psi(c)$ على النحو الآتي:

$$\psi(c) = P_{\theta_0}\left(\Lambda(X) \le c\right) \qquad (1.2.2)$$

نلاحظ أن الدالة $\psi(c)$ غير متناقصة (متزايدة) في c و $\psi(0) = 0$ (لأن $\Lambda > 0$) بالإضافة إلى ذلك $\lim_{c\to\infty} \psi(c) = 1$، ونفترض فيما يلي وجود قيمة $c = c_\alpha$ بحيث $\psi(c) = \alpha$ (وهذه موجودة دائماً لأن ψ دالة مستمرة في c).

مبرهنة 1.2.2: مبدأ نيمان وبيرسون Neyman-Person Lemma

عند توفر الشروط المقدمة أعلاه يوجد دائماً الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار

الفرضية H_0 ضد H_1، وهذا الاختبار يعطي بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1^* = \{x : \lambda(x) \le c\}$$

ويتعين الحد الحرج c (ثابت موجب) من العلاقة:

$$\psi(c) = P_{\theta_0}\left(\Lambda(X) \le c\right) = P_{\theta_0}(X \in G_1^*) = \alpha \qquad (2.2.2)$$

ونرمز له بـــ $c = c_\alpha$، ومن ثم الاختبار الأقوى بحجم α موافق لمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^* = \{x : \lambda(x) \le c_\alpha\} \qquad (3.2.2)$$

وهذا يعني رفض الفرضية H_0 عندما $\lambda \le c_\alpha$ وقبولها عندما $\lambda > c_\alpha$.

الإثبــات

ليكن G_1 اختباراً ما آخر بحجم α أو أقل $(\alpha_1 \le \alpha)$ لاختبار H_0 ضــد H_1. أي أن $G_1 \in P(G_{1\alpha_1});\alpha_1 \le \alpha$ و $G_1 \ne G_{1\alpha}^*$. عندئذٍ يصبح المطلوب إثبات أن:

$$W(G_{1\alpha}^*;\theta_1) \ge W(G_1;\theta_1)$$

من تعريف منطقة الرفض $G_{1\alpha}^*$، إذا كانت $x \in G_{1\alpha}^*$ فإن:

$$\lambda(x) = \frac{L(x;\theta_0)}{L(x;\theta_1)} \le c_\alpha \quad \Rightarrow \quad L(x;\theta_1) \ge \frac{L(x;\theta_0)}{c_\alpha}$$

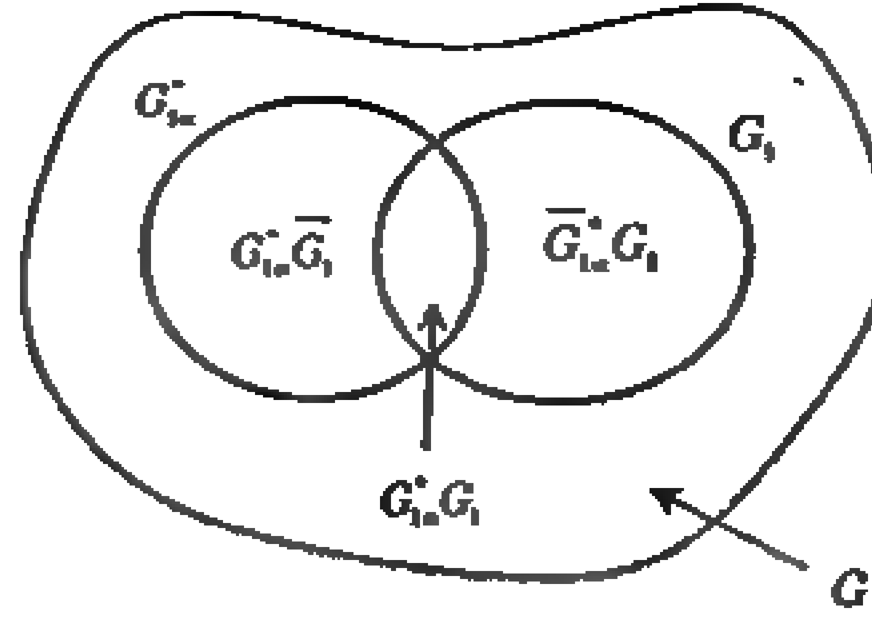
بينما إذا كانت $x \notin G_{1\alpha}^* \left(x \in \overline{G}_{1\alpha}^*\right)$ فإن:

$$\lambda(x) = \frac{L(x;\theta_0)}{L(x;\theta_1)} > c_\alpha \quad \Rightarrow \quad L(x;\theta_1) < \frac{L(x;\theta_0)}{c_\alpha}$$

بالإضافة إلى ذلك يمكن كتابة:

$$G_{1\alpha}^* = G_{1\alpha}^* G_1 \cup G_{1\alpha}^* \overline{G}_1 \quad , \quad G_1 = G_1 G_{1\alpha}^* \cup G_1 \overline{G}_{1\alpha}^*$$

أنظر شكل (1.2.2).



شكل (1.2.2)

ولدينا حسب الفرض:

$$P_{\theta_0}(X \in G^*_{1\alpha}) = \int_{G^*_{1\alpha}} L(x;\theta_0)dx = \alpha \quad ; \quad dx = \prod_{1}^{n} dx_i$$

$$P_{\theta_0}(X \in G_1) = \int_{G_1} L(x;\theta_0)dx = \alpha_1 \le \alpha$$

وعلى ذلك فإن قوة كل من الاختبارين G_1 ، $G^*_{1\alpha}$:

$$W(G^*_{1\alpha};\theta_1) = \int_{G^*_{1\alpha}G_1} L(x;\theta_1)dx + \int_{G^*_{1\alpha}\overline{G}_1} L(x;\theta_1)dx$$

$$W(G_1;\theta_1) = \int_{G_1G^*_{1\alpha}} L(x;\theta_1)dx + \int_{G_1\overline{G}^*_{1\alpha}} L(x;\theta_1)dx$$

وبالتالي:

$$W(G^*_{1\alpha};\theta_1) - W(G_1;\theta_1) = \int_{G^*_{1\alpha}\overline{G}_1} L(x;\theta_1)dx - \int_{G_1\overline{G}^*_{1\alpha}} L(x;\theta_1)dx$$

$$\ge \frac{1}{c_\alpha}\left[\int_{G^*_{1\alpha}\overline{G}_1} L(x;\theta_0)dx - \int_{G_1\overline{G}^*_{1\alpha}} L(x;\theta_0)dx\right] \qquad (1)$$

لكن:

$$\int_{G_{1\alpha}^*} L(x;\theta_0)dx = \int_{G_{1\alpha}^* G_1} L(x;\theta_0)dx + \int_{G_{1\alpha}^* \bar{G}_1} L(x;\theta_0)dx = \alpha$$

$$\int_{G_1} L(x;\theta_0)dx = \int_{G_1 G_{1\alpha}^*} L(x;\theta_0)dx + \int_{G_1 \bar{G}_{1\alpha}^*} L(x;\theta_0)dx = \alpha_1 \le \alpha$$

أي أن المقدار ضمن القوسين في (1):

$$\int_{G_{1\alpha}^*} L(x;\theta_0)dx - \int_{G_1} L(x;\theta_0)dx = \int_{G_{1\alpha}^* \bar{G}_1} L(x;\theta_0)dx - \int_{G_1 \bar{G}_{1\alpha}^*} L(x;\theta_0)dx$$

$$= (\alpha - \alpha_1) \ge 0 \quad ; \quad \alpha_1 \le \alpha$$

إذن:

$$W(G_{1\alpha}^*;\theta_1) - W(G_1;\theta_1) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad W(G_{1\alpha}^*;\theta_1) \ge W(G_1;\theta_1)$$

وهو المطلوب.

يدعى الاختبار الموافق لمنطقة الرفض (3.2.2) باختبار نيمان وبيرسون لاختبار فرضية بسيطة H_0 ضد فرضية بديلة بسيطة أيضاً H_1.

إن اختبار نيمان وبيرسون بالإضافة إلى أنه الأقوى فهو غير متحيز، أي أن $W(G_{1\alpha}^*;\theta_1) \ge W(G_{1\alpha}^*;\theta_0) = \alpha$، ويمكن إثبات ذلك بسهولة على النحو الآتي:

$$W(G_{1\alpha}^*;\theta_1) = P_{\theta_1}(X \in G_{1\alpha}^*) = \int_{G_{1\alpha}^*} L(x;\theta_1)dx \ge \frac{1}{c_\alpha} \int_{G_{1\alpha}^*} L(x;\theta_0)dx = \frac{\alpha}{c_\alpha}$$

أي أن:

$$W(G_{1\alpha}^*;\theta_1) \ge \frac{\alpha}{c_\alpha}$$

إذا كانت $c_\alpha \le 1$ فإن:

$$W(G_{1\alpha}^*;\theta_1) \ge \alpha \quad ; \quad \frac{\alpha}{c_\alpha} \ge \alpha$$

وكذلك عندما $c_\alpha > 1$ ، فإن:

$$W(G_{1\alpha}^*;\theta_1) = \int_{G_{1\alpha}^*} L(x;\theta_1)dx = 1 - \int_{\bar{G}_{1\alpha}^*} L(x;\theta_1)dx$$
$$> 1 - \frac{1}{c_\alpha}\int_{\bar{G}_{1\alpha}^*} L(x;\theta_0)dx > 1 - \int_{\bar{G}_{1\alpha}^*} L(x;\theta_1)dx$$
$$= \int_{G_{1\alpha}^*} L(x;\theta_0)dx = \alpha$$

أي أن:

$$W(G_{1\alpha}^*;\theta_1) > \alpha$$

هكـــذا في الحالتين $(c_\alpha \le 1 \text{ or } c_\alpha > 1)$ فــإن $W(G_{1\alpha}^*;\theta_1) \ge \alpha$ ، أي أن الاختبار $G_{1\alpha}^*$ الأقوى بحجم α وغير المتحيز.

فيما يلي أمثلة لتطبيق اختبار نيمان وبيرسون.

مثـال 1.2.2: النموذج الطبيعي I (اختبار فرضيات بسيطة)

إذا كانت $X = (X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية مـــن التوزيـــع $\mathcal{L}(\xi) \in N(\theta,\sigma^2)$ ، ونريد اختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد البديل $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$ ، فأوجد الاختبـــار الأقوى بحجم α.

نعلم أن:

$$L(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma}\right)^2}$$
$$= \sigma^{-n}(2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right\}$$

وعلى ذلك:

$$L(x;\theta_0) = \sigma^{-n}(2\pi)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2\right\}$$

$$L(x;\theta_1)=\sigma^{-n}(2\pi)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2\right\}$$

وبالتالي نسبة المعقولية البسيطة:

$$\begin{aligned}
\lambda(x)=\frac{L(x;\theta_0)}{L(x;\theta_1)}&=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_0)^2+\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2\right\}\\
&=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\theta_0)^2-(x_i-\theta_1)^2\right]\right\}\\
&=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[2(\theta_1-\theta_0)x_i-(\theta_1^2-\theta_0^2)\right]\right\}\\
&=\exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\theta_1-\theta_0)x_i+\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\theta_1^2-\theta_0^2)\right\}\\
&=\exp\left[\frac{-n}{\sigma^2}(\theta_1-\theta_0)\bar{x}+\frac{n}{2\sigma^2}(\theta_1^2-\theta_0^2)\right]
\end{aligned}$$

ويكون الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار H_0 ضد H_1، حسب مبدأ نيمان وبيرسون، معطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*}=\{x:\lambda(x)\le c\}\quad;\quad\psi(c)=\alpha$$

ولتعيين c من العلاقة (2.2.2) يلزمنا معرفة توزيع إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda(X)$ أو توزيع إحصاء آخر $T(X)$ (دالة مضطردة في Λ)، عند صحة الفرضية H_0.

إن المتباينة المعرفة لمنطقة الرفض $\lambda(x)\le c$ مكافئة للمتباينة:

$$T(x)=\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\ge-\frac{\sigma}{\sqrt{n}(\theta_1-\theta_0)}\ln c+\frac{\sqrt{n}}{2\sigma}(\theta_1-\theta_0)=t(c)$$

نحصل عليها بأخذ لوغاريتم الطرفين للمتباينة $\lambda(x)\le c$ وإجراء بعض العمليات الجبرية.

بما أن:

$$\mathcal{L}_{\theta_0}(\bar{X})=N\left(\theta_0,\frac{\sigma^2}{n}\right)\quad\Rightarrow\quad\mathcal{L}_{\theta_0}\left(T=\frac{\bar{X}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)=N(0,1)$$

فإن:

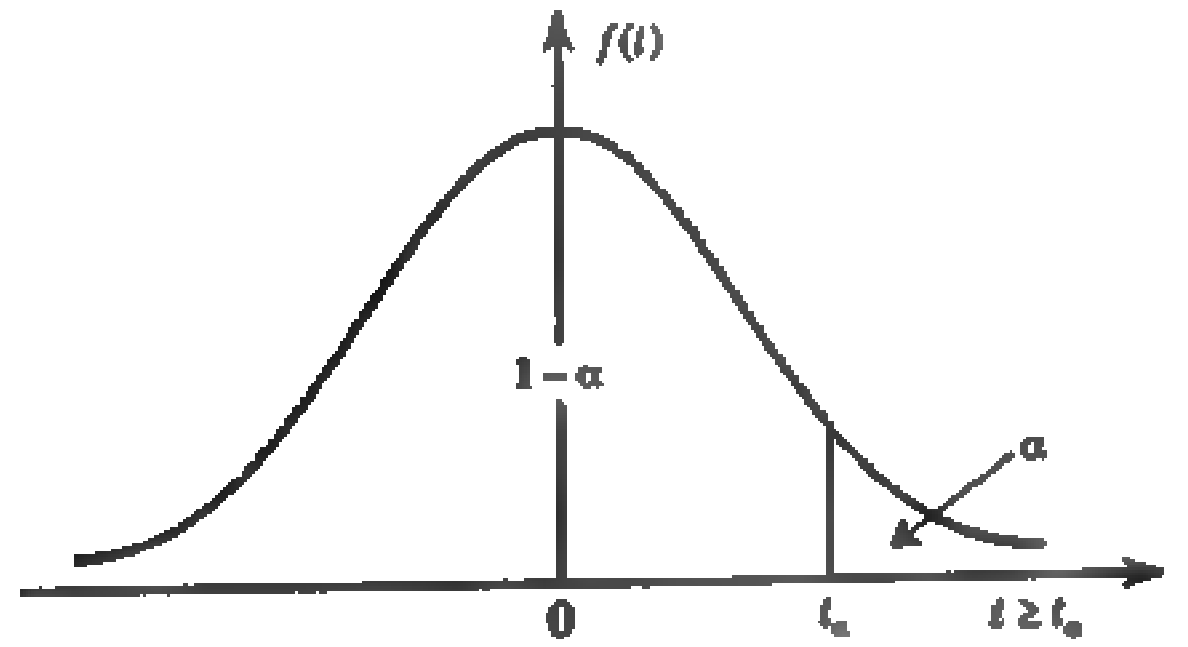
$$\psi(c) = P_{\theta_0}(\Lambda(X) \le c) = P_{\theta_0}(T(X) \ge t(c)) = 1 - \Phi(t(c)) = \Phi(-t(c)) \qquad (4.2.2)$$

حيث: $\Phi(.)$ دالة التوزيع الطبيعي المعياري. ويمكن تعيين $t(c)$ من العلاقة $\Phi(-t) = \alpha$ واستخدام جدول التوزيع الطبيعي (الملحق، جدول 2) ونرمز لها بـ t_α.
وبالتالي الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$ يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^* = \left\{x : t(x) = \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge t_\alpha\right\} \quad ; \quad \Phi(-t_\alpha) = \alpha \qquad (5.2.2)$$

أو بدلالة قيم الإحصاء $T(X)$:

$$\mathfrak{I}_{1\alpha}^* = \{t : t(x) \ge t_\alpha\}$$



شكل (2.2.2)

في الحالة المفروضة إحصاء الاختبار $T(X) = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \theta_0)}{\sigma}$، ومنطقة الرفض الموافقة $G_{1\alpha}^*$ (أو $\mathfrak{I}_{1\alpha}^*$) لا تعتمد على القيمة البديلة $\theta_1 > \theta_0$.

لنحسب الآن قوة الاختبار (5.2.2).

بما أن:

$$\mathcal{L}_{\theta_1}(\overline{X}) = N\left(\theta_1, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

فإن:

$$W(G^*_{1\alpha};\theta_1) = P_{\theta_1}\left(\overline{X} \geq \theta_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\alpha\right) = P_{\theta_1}\left(\frac{\overline{X}-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{\theta_0 - \theta_1 + \left(\sigma/\sqrt{n}\right)t_\alpha}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$= P_{\theta_1}\left(\frac{\overline{X}-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}} \geq -\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1 - \theta_0) + t_\alpha\right)$$

$$W(G^*_{1\alpha};\theta_1) = 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1 - \theta_0) + t_\alpha\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1 - \theta_0) - t_\alpha\right) \qquad (6.2.2)$$

وحيث إن $+\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1 - \theta_0) - t_\alpha > -t_\alpha$ (لأنه حسب الفرض $\theta_1 > \theta_0$)، فإن:

$$W(G^*_{1\alpha};\theta_1) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1 - \theta_0) - t_\alpha\right) > \Phi(-t_\alpha) = \alpha$$

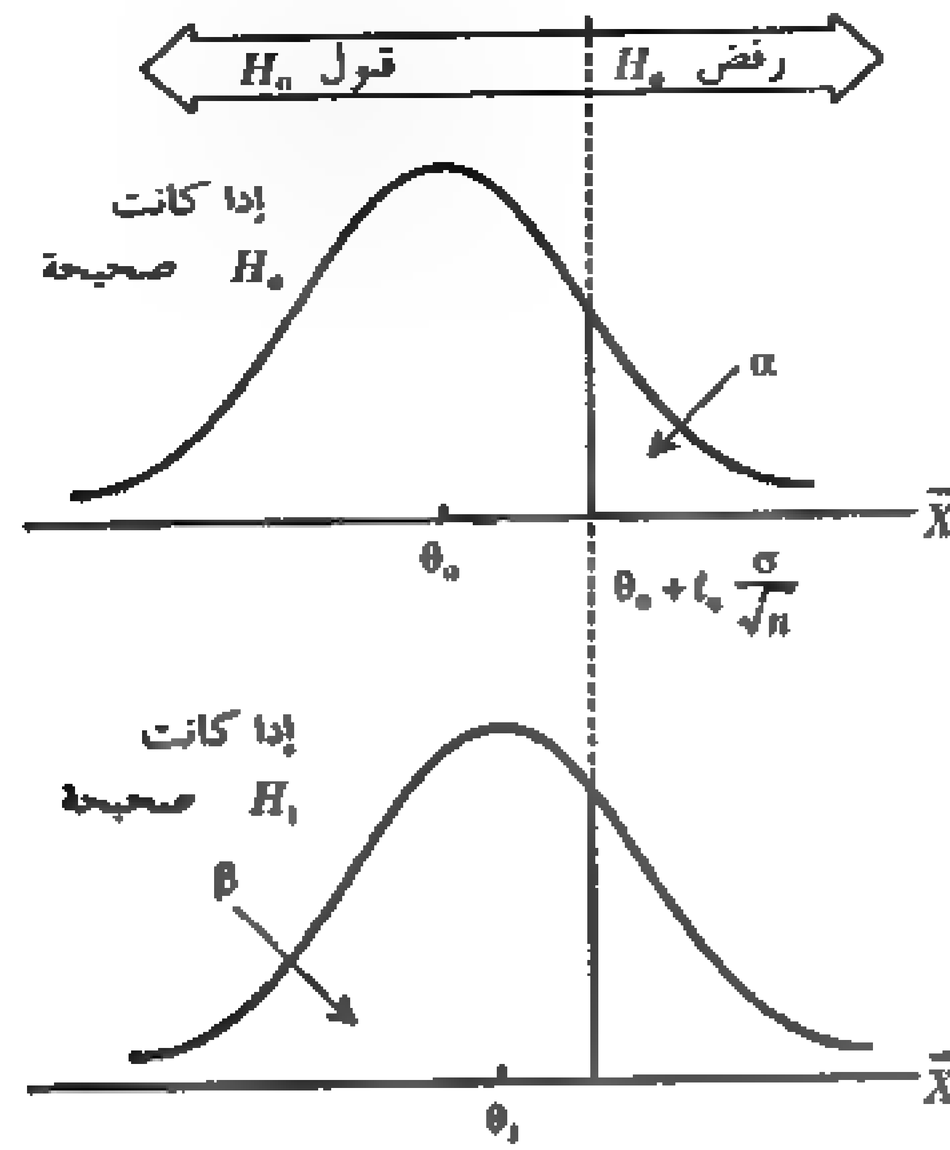
وهذا يعني أن الاختبار $G^*_{1\alpha}$ المعرف بالعلاقة (5.2.2) غير متحيز، واحتمال الوقـــوع في خطأ من النوع II:

$$\beta = P_{\theta_1}\left(\frac{\overline{X}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} < t_\alpha\right) = 1 - W(G^*_{1\alpha};\theta_1) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1 - \theta_0) - t_\alpha\right)$$

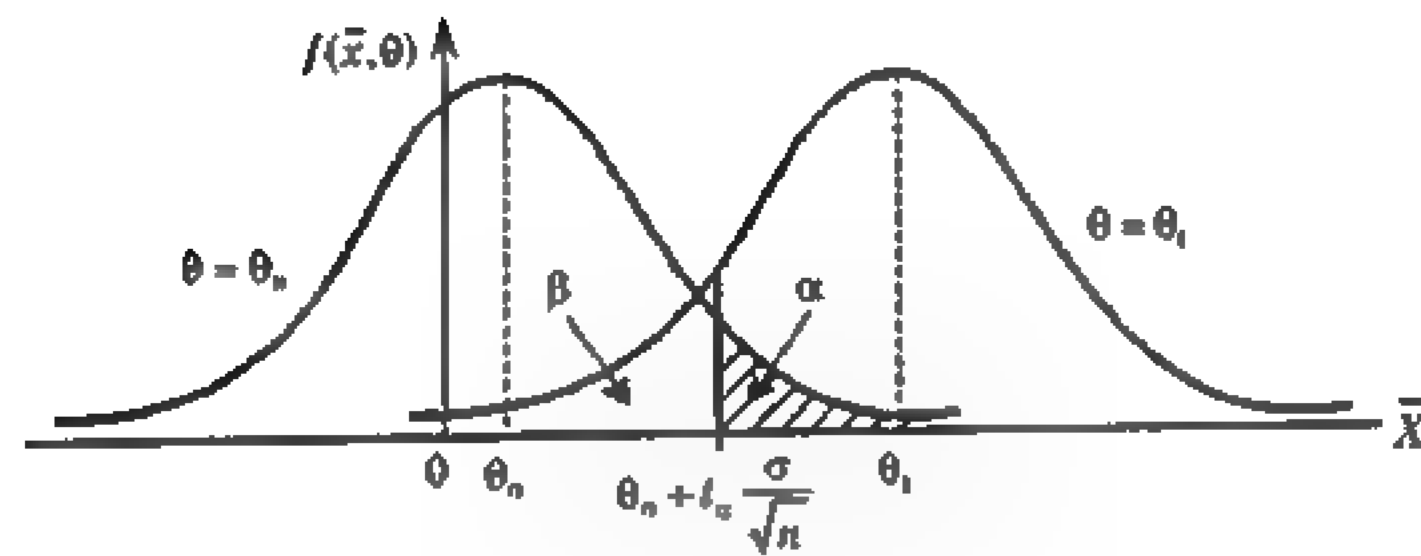
$$= \Phi\left(t_\alpha - \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1 - \theta_0)\right) = \beta(\alpha, n) \qquad (7.2.2)$$

نـــلاحظ من العلاقتين (4.2.2) و (7.2.2) أن احتمالي الخطأ يتناقصان بازديــــاد حجم العينة n، وعندما $n \to \infty$ فـــإن $\alpha = \beta = 0$، وهي الطريقة الوحيدة لإنقاص كل من α و β.

ويبدو بوضوح احتمالي الخطأ من النوع I و II في الحالة المفروضة $(\theta_1 > \theta_0)$ على الشكلين (3.2.2) و (4.2.2).



شكل (3.2.2)



شكل (4.2.2)

فمثلاً، إذا كانت $\sigma = 1$ و $n = 4$ وكانت $H_0 : \theta = 0$ ضد $H_1 : \theta = 2$، فـإن الاختبار الأقوى بحجم $\alpha = 0.05$ موافق لمنطقة الرفض:

$$G^*_{1\alpha} = \left\{x : \frac{\bar{x}-0}{1/2} \geq 1.65\right\} \quad ; \quad \Phi(-1.65) = 0.05$$

وقوة هذا الاختبار عند $\theta = 2$ [التعويض في العلاقة (6.2.2)]:

$$W(G^*_{1\alpha};2) = \Phi(4-1.65) = \Phi(2.35) = 0.9984$$

واحتمال الخطأ من النوع II:

$$\beta = 1 - W(G^*_{1\alpha};2) = 0.0016$$

وبشكل مشابه نجد، عندما $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta = \theta_1 < \theta_0$، أن الاختبار الأقوى للفرضية H_0 ضد H_1:

$$G^*_{1\alpha} = \left\{x : \frac{\bar{x}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -t_\alpha\right\} \quad ; \quad \Phi(-t_\alpha) = \alpha \qquad (8.2.2)$$

وقوته عند $\theta = \theta_1$:

$$W(G^*_{1\alpha};\theta_1) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_0-\theta_1) - t_\alpha\right) \qquad (9.2.2)$$

ومن ثم احتمال الوقوع في خطأ من النوع II:

$$\beta = 1 - W(G^*_{1\alpha};\theta_1) = 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_0-\theta_1) - t_\alpha\right) = \Phi\left(t_\alpha - \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_0-\theta_1)\right)$$

(10.2.2)

لنرَ الآن المسألة التالية: لتكن لدينا الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$، ولنفترض أن احتمالي الخطأ من النوع I و II معينين مسبقاً ولنرمز لها بـ α و β على الترتيب، ونريد تعيين العدد الأصغري من التكرارات (حجم العينة) الضروري لكي يكون احتمالي الخطأ من النوع I و II لا يتجاوزان α و β.

نلاحظ من العلاقة (7.2.2) أن β متناقصة في n، لذا العدد المطلوب n^* هو عبارة عن أصغر قيم n المحققة للشرط $\beta(\alpha,n)\le\beta$. ومن أجل تعيين قيمة n لدينا المعادلتان:

$$\Phi(-t_\alpha)=\alpha \quad , \quad \Phi\left(t_\alpha-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1-\theta_0)\right)=\beta \qquad (11.2.2)$$

إذا رمزنا بـ z_β للقيمة الحرجة للتوزيع $N(0,1)$ الموافقة لاحتمال β، أي أن z_β هي قيمة z المحقق للمساواة $\Phi(z_\beta)=\beta$، فإن:

$$z_\beta=t_\alpha-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1-\theta_0) \quad , \quad z_\alpha=-t_\alpha$$

أي أن:

$$n=\frac{\sigma^2(z_\alpha+z_\beta)^2}{(\theta_1-\theta_0)^2}$$

لكن العدد n^* يجب أن يكون صحيحاً، ولهذا يجب وضع:

$$n^*=\left[\!\left[\frac{\sigma^2(z_\alpha+z_\beta)^2}{(\theta_1-\theta_0)^2}\right]\!\right]+1 \qquad (12.2.2)$$

حيث إن الرمز $[\![a]\!]$ يعني الجزء الصحيح للعدد a. وهذا يعني عند تثبيت احتمالي الخطأين α و β فإن عدد الملاحظات n^* يتناسب طرداً مع التباين σ^2 وعكساً مع مربع الفرق بين القيمتين θ_0 و θ_1، أي $(\theta_1-\theta_0)^2$. فمثلاً، إذا كانت $\alpha=\beta=0.001$ فإن $z_\alpha=z_\beta=-3.09$، ومن العلاقة (12.2.2) نجد $n^*=\left[\!\left[38.2\sigma^2/(\theta_1-\theta_2)^2\right]\!\right]+1$. وعندما $\sigma=1$ و $\theta_1-\theta_0=1$ نجد $n^*=[\![38.2]\!]+1=39$. هكذا، لكي يكون احتمالا الخطأ من النوع I و II للاختبار $G_{1\alpha}^*$ لا يتجاوزان 0.001 يجب أن يكون حجم العينة n لا يقل عن 39.

نلاحظ أن الاختبارين المعرفين بالعلاقتين (5.2.2) و (8.2.2) لا يعتمدان على البديل θ_1.

مثال 2.2.2: النموذج الأسي $\Gamma(1,1/\theta)$ (اختبار فرضيتين بسيطتين)

إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع الأسي $\mathcal{L}(\xi) \in \Gamma(1,1/\theta)$ وكانت $H_0 : \theta = \theta_0$ و $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$، فأوجد الاختبار الأقوى (الأمثل) بحجم α.

بما أن:

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} \quad , \quad \theta > 0 \ , \ x > 0$$
$$L(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \theta^n e^{-\theta \sum_1^n x_i} = \theta^n e^{-n\theta \bar{x}}$$

وعلى ذلك:

$$L(x;\theta_0) = \theta_0^n e^{-n\theta_0 \bar{x}}$$
$$L(x;\theta_1) = \theta_1^n e^{-n\theta_1 \bar{x}}$$

ومن ثم نسبة المعقولية:

$$\lambda(x) = \frac{L(x;\theta_0)}{L(x;\theta_1)} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n e^{n(\theta_1-\theta_0)\bar{x}}$$

وبالتالي فالاختبار الأقوى بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$ يعطى بمنطقة الرفض المؤلفة من نقاط فضاء العينة $x \in G$ التي تحقق المتباينة:

$$\lambda(x) = \left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n e^{n(\theta_1-\theta_0)\bar{x}} \le c$$

أو التي تحقق المتباينة المكافئة (أخذ لوغاريتم الطرفين):

$$\ln \lambda(x) = \ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n + n(\theta_1 - \theta_0)\bar{x} \le \ln c \Rightarrow$$

$$n\bar{x} \le \frac{1}{\theta_1 - \theta_0}\ln c\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n \Rightarrow \sum_1^n x_i \le \frac{1}{\theta_1 - \theta_0}\ln c\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n = d$$

أي نرفض الفرضية H_0 إذا كانت:

$$T(x) = \sum_1^n x_i \le d$$

وتحدد قيمة d من العلاقة:

$$P_{\theta_0}\left(T(X) = \sum_{i=1}^n X_i \le d\right) = \alpha$$

وهذا يتطلب معرفة توزيع إحصاء الاختبار $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ ، عند صحة الفرضية H_0 . بما أن $T(X)$ متغير عشوائي مؤلف من مجموع عدة متغيرات عشوائية مستقلة ولكل منها توزيع $\Gamma(1,1/\theta)$ ، فإنه يخضع لتوزيع $\Gamma(n,1/\theta)$ [راجع البند (3.4-I)]، وعلى ذلك:

$$\alpha = \int_0^d \frac{\theta_0^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\theta_0 t} dt$$

ولحساب هذا التكامل نضع $z = 2\theta_0 t$ فنجد:

$$\alpha = \int_0^{2\theta_0 d} \frac{\theta_0^n}{\Gamma(n)}\left(\frac{z}{2\theta_0}\right)^{n-1} e^{-z/2}\frac{1}{2\theta_0}dz = \int_0^{2\theta_0 d}\frac{1}{2^n\Gamma(n)} z^{n-1} e^{-z/2} dz$$

والدالة المكاملة ما هي إلا دالة كثافة توزيع χ^2 بـــ $2n$ درجة حرية [انظر العلاقة (29.3.2-I)]، أي أن $\mathcal{L}(Z) = \chi^2_{(2n)}$ ، وعلى ذلك:

$$\alpha = P_{\theta_0}(T(X) \le d) = P_{\theta_0}(2\theta_0 T \le 2\theta_0 d) = P_{\theta_0}(Z \le 2\theta_0 d)$$

ومن جدول $\chi^2_{(2n)}$ (الملحق، جدول 4) نجد القيمة الحرجة $\chi^2_{1-\alpha,2n}$ الموافقة لاحتمال

$p = (1-\alpha)$ ، وهذا يعني أن:

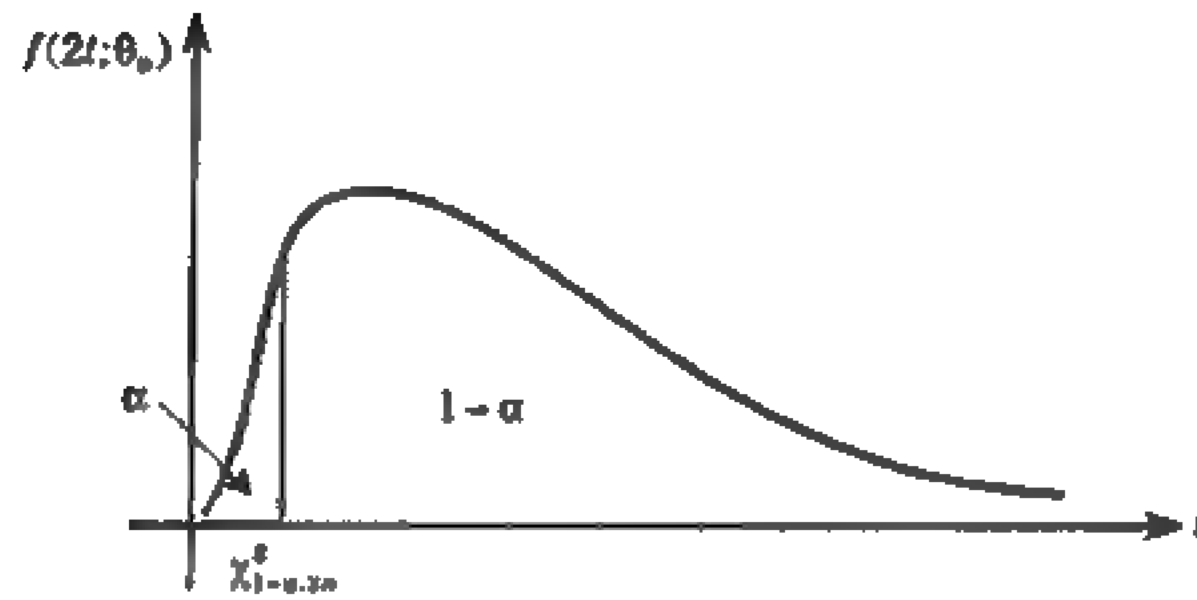
$$2\theta_0 d = \chi^2_{1-\alpha,2n} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{1}{2\theta_0}\chi^2_{1-\alpha,2n}$$

وبالتالي فالاختبار الأقوى بحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$ هو:

$$G^*_{1\alpha} = \left\{ x : \sum_{i=1}^{n} x_i \le \frac{1}{2\theta_0}\chi^2_{1-\alpha,2n} \right\} \qquad (13.2.2)$$

أو:

$$\Im^*_{1\alpha} = \left\{ t : t = \sum_{i=1}^{n} x_i \le \frac{1}{2\theta_0}\chi^2_{1-\alpha,2n} \right\}$$



شكل (5.2.2)

وقوة هذا الاختبار:

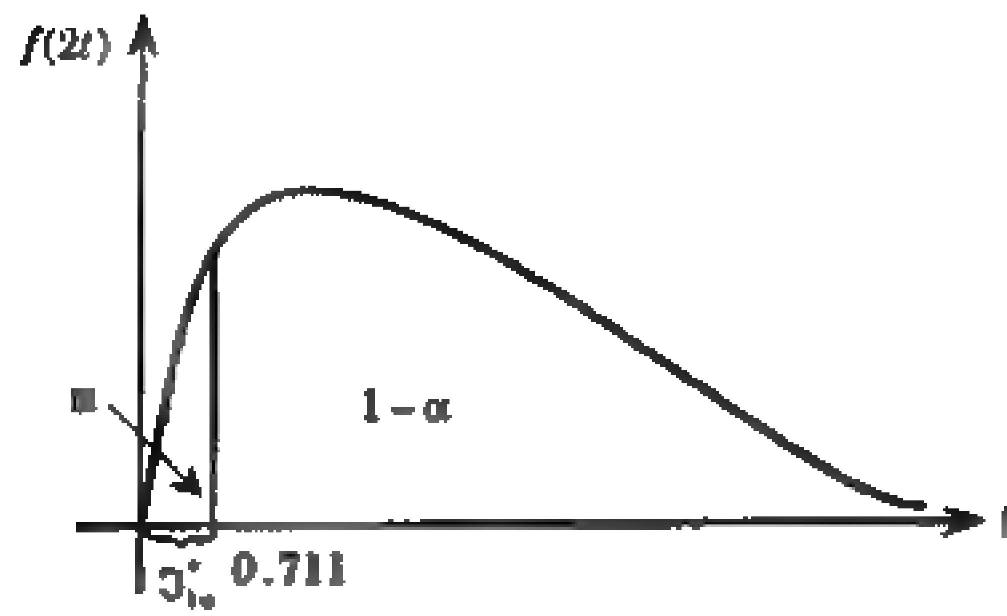
$$W(G^*_{1\alpha};\theta_1) = P_{\theta_1}\left(T(X) \le \frac{1}{2\theta_0}\chi^2_{1-\alpha;2n}\right) = P_{\theta_1}\left(2\theta_1 T \le \frac{\theta_1}{\theta_0}\chi^2_{1-\alpha,2n}\right) \qquad (14.2.2)$$

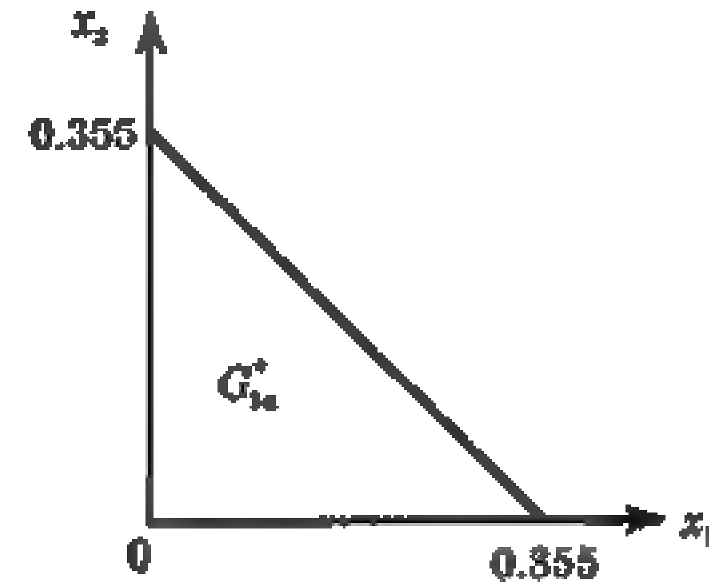
فمثلاً، عندما $\alpha = 0.05$ ، $n = 2$ و $H_1 : \theta_1 = 2$ ، $H_0 : \theta_0 = 1$ ، فإن الاختبار الأقوى يعطى بمنطقة الرفض:

$$G^*_{1\alpha} = \{x : x_1 + x_2 \le 0.356\} \quad ; \quad \chi^2_{0.95,4} = 0.711$$

أو:

$$\Im_{1\alpha}^{*}=\{t:t=x_1+x_2\le 0.356\}=\{t:2\theta_0 t=2t\le 0.711\}$$





شكل (7.2.2) **شكل (6.2.2)**

وقوته:

$$\begin{aligned} W(G_{1\alpha}^{*};2) &= P_{\theta_1}(X_1+X_2\le 0.356)\\ &= P_{\theta_1}\left(2\theta_1(X_1+X_2)\le 2\theta_1(0.356)\right)\\ &= P_{\theta_1}\left(4(X_1+X_2)\le 1.424\right)=0.161 \end{aligned}$$

من جدول توزيع χ^2 بـ $2n=4$ درجة حرية نجد $F(1.424)=0.161$.

وبشكل مشابه عندما $H_1:\theta=\theta_1>\theta_0$ نجد الاختبار الأقوى بحجم α يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*}=\left\{x:\sum_{1}^{n}x_i\ge\frac{1}{2\theta_0}\chi^2_{\alpha;2n}\right\} \qquad (15.2.2)$$

أو:

$$\Im_{1\alpha}^{*}=\left\{t:t\ge\frac{1}{2\theta_0}\chi^2_{\alpha,2n}\right\}$$

وقوته:

$$W(G_{1\alpha}^{*};\theta_1) = P_{\theta_1}\left(2\theta_1 T \geq \frac{\theta_1}{\theta_0}\chi^2_{\alpha;2n}\right) \qquad (16.2.2)$$

نترك إثبات ذلك للقارئ على سبيل المثال.

رأينا في المثالين (1.2.2) و (2.2.2) أن المعلمة وحيـــدة البعد (معلمة واحـــــدة). ولكن ليس هناك ما يمنع استخدام اختبار نيمان وبيرسون مهما كان عدد المعالم (معلمـــة متعددة الأبعاد) بشرط أن تكون معينة تماماً في الفرضيتين.

مثـــال 3.2.2 (النموذج الطبيعي العام، لختبار فرضيتين بسيطتين)

إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية مـــــن التوزيـــع $\mathcal{L}(\xi) \in N(\theta_1,\theta_2^2)$ وكانت $\theta = (\theta_1,\theta_2)$; $H_0 : \theta_0 = (\theta_{10},\theta_{20})$, $H_1 : \theta_1 = (\theta_{11},\theta_{21})$ ، فأوجد الاختبـــار الأقوى بحجم α.

كما نعلم:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right)^2}$$

$$L(x;\theta_0) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_0) = \theta_{20}^{-n}(2\pi)^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta_{10}}{\theta_{20}}\right)^2\right]$$

$$L(x;\theta_1) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1) = \theta_{21}^{-n}(2\pi)^{-n/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta_{11}}{\theta_{21}}\right)^2\right]$$

وعلى ذلك نسبة المعقولية البسيطة:

$$\lambda(x) = \frac{L(x;\theta_0)}{L(x;\theta_1)} = \left(\frac{\theta_{21}}{\theta_{20}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\theta_{20}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_{10})^2 + \frac{1}{2\theta_{21}}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_{11})^2\right]$$

وحسب مبرهنة نيمان وبيرسون ترفض H_0 إذا كانت $\lambda(x) \leq c$. لكن:

$$\lambda(x) \le c \Rightarrow \ln\lambda(x) \le \ln c \Rightarrow$$

$$\ln\left(\frac{\theta_{21}}{\theta_{20}}\right)^n - \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_{10})^2}{\theta_{20}^2} + \frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_{11})^2}{\theta_{21}^2} \le \ln c \Rightarrow$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_{11})^2}{\theta_{21}^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_{10})^2}{\theta_{20}^2} \le 2\left[\ln c - \ln\left(\frac{\theta_{21}}{\theta_{20}}\right)^2\right] = d \qquad (17.2.2)$$

ومن ثم:

$$\left(\frac{1}{\theta_{21}^2} - \frac{1}{\theta_{10}^2}\right)\sum_{1}^{n} x_i^2 + 2\left(\frac{\theta_{10}}{\theta_{20}^2} - \frac{\theta_{11}}{\theta_{21}^2}\right)\sum_{1}^{n} x_i \le d - n\left(\frac{\theta_{11}^2}{\theta_{21}^2} - \frac{\theta_{10}^2}{\theta_{20}^2}\right) = k$$

أي أن المتباينة (17.2.2) وكذلك المتباينة:

$$\left(\frac{1}{\theta_{21}^2} - \frac{1}{\theta_{20}^2}\right)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\left(\frac{\theta_{10}}{\theta_{20}^2} - \frac{\theta_{11}}{\theta_{21}^2}\right)\sum_{1}^{n} x_i \le k \qquad (18.2.2)$$

مكافئة للمتباينة $\lambda(x) \le c$.

يمكننا دراسة بعض الحالات الخاصة في هذا المثال. فمثلاً:

1. إذا كانت $\theta_{20} = \theta_{21}$ (الانحرافين المعياريين متساويين)، فإن منطقة الرفض المعرفة بالمتباينة (18.2.2) تصبح:

$$(\theta_{10} - \theta_{11})\sum_{1}^{n} x_i \le \frac{\theta_{20}^2}{2} k = k'$$

وهنا نميز حالتين:

(1) إذا كانت $\theta_{10} > \theta_{11}$، فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le \frac{k'}{\theta_{10} - \theta_{11}} = k^*$$

أي أن إحصاء الاختبار $T(X)=\sum_{1}^{n} X_i$، والاختبار الأقوى يعطى بمنطقة رفـــض مـــن الشكل:

$$G_1^* = \left\{x : \sum_{1}^{n} x_i \le k^*\right\}$$

بما أن $\mathcal{L}_{\theta_0}(T) \in N\left(n\theta_{10}, n\theta_{20}^2\right)$ فإن:

$$\mathcal{L}\left(Z = \frac{T - n\theta_{10}}{\sqrt{n}\theta_{20}}\right) = N(0,1)$$

وبالتالي يتعين الثابت k^* من العلاقة:

$$\Phi\left(\frac{k^* - n\theta_{10}}{\sqrt{n}\theta_{20}}\right) = \alpha$$

وباستخدام جدول التوزيع الطبيعي نجد:

$$\frac{k^* - n\theta_{10}}{\sqrt{n}\theta_{20}} = -z_\alpha \quad \Rightarrow \quad k^* = n\theta_{10} - \sqrt{n}\theta_{20} z_\alpha$$

ومن ثم الاختبار الأقوى يوافق منطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^* = \left\{x : \sum_{1}^{n} x_i \le n\theta_{10} - \sqrt{n}\theta_{20} z_\alpha\right\} \qquad (19.2.2)$$

(2) إذا كانت $\theta_{10} < \theta_{11}$، فإن:

$$\sum_{1}^{n} x_i \ge k^*$$

والاختبار الأقوى بحجم α يكون:

$$G_{1\alpha}^* = \left\{x : \sum_{1}^{n} x_i \ge n\theta_{10} + \sqrt{n}\theta_{20} z_\alpha\right\}$$

حيث إن:

$$P_{\theta_{11}}(X\in G_{1\alpha}^{*})=\Phi\left(\frac{n\theta_{10}-k^{*}}{\sqrt{n}\theta_{20}}\right)=\alpha \;\Rightarrow\; k^{*}=n\theta_{10}+\sqrt{n}\theta_{20}z_{\alpha}$$

2. إذا كانت $\theta_{10}=\theta_{11}$، فإن منطقة الرفض المعرفة بالمتباينة (17.2.2) تصبح:

$$\left(\frac{1}{\theta_{21}^{2}}-\frac{1}{\theta_{20}^{2}}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_{10})^2\le d \tag{20.2.2}$$

وهنا نميز أيضاً حالتين:

(1) إذا كانت $\theta_{21}<\theta_{20}$ $\left(\frac{1}{\theta_{21}^{2}}-\frac{1}{\theta_{20}^{2}}>0\right)$، فإن:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_{10})^2\le\left(\frac{1}{\theta_{21}^{2}}-\frac{1}{\theta_{20}^{2}}\right)^{-1}d=k$$

أي أن إحصاء الاختبار $T(X)=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_{10})^2$. ونعلم أن $\mathcal{L}_{\theta_0}\left(\frac{T}{\theta_{20}^{2}}\right)=\chi_{(n)}^{2}$ [راجع المبرهنة (6.3.2-I)] وعليه الاختبار الأقوى بحجم α:

$$G_{1\alpha}^{*}=\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_{10})^2\le k=\theta_{20}^{2}\chi_{1-\alpha;n}^{2}\right\} \tag{21.2.2}$$

ويتحدد k من العلاقة:

$$P_{\theta_0}(T\le k)=P_{\theta_0}\left(\frac{T}{\theta_{20}^{2}}\le\frac{k}{\theta_{20}^{2}}\right)=\alpha$$

أي أن $k=\theta_{20}^{2}\chi_{1-\alpha;n}^{2}$.

(2) إذا كانت $\theta_{21}>\theta_{20}$ $\left(\frac{1}{\theta_{21}^{2}}-\frac{1}{\theta_{20}^{2}}<0\right)$، فإن المتباينة (20.2.2) تصبح:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_{10})^2 \geq k$$

ومن ثم الاختبار الأقوى بحجم α يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*}=\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_{10})^2 \geq k\right\} \quad , \quad k=\theta_{20}^2\chi_{\alpha;n}^2 \qquad (22.2.2)$$

3.2 اختبار نيمان – بيرسون في حالة النموذج منقطع

NEYMAN-PERSON TEST IN THE CASE DISCRETE MODEL

يمكن إجراء مناقشة مشابهة لحالة نموذج مستمر من أجل نموذج منقطع. لنفترض أن $F_0=F(x;\theta_0)$ ، $F_1=F(x;\theta_1)$ توزيعان منقطعان (متقطعان) $f_j(x);j=0,1$ دالتي الاحتمال الموافقتين بحيث إن $f_j(x_i)>0$ من أجل كل القيم الممكنة x_i للمتغير العشوائي الملاحظ ع $\left(\sum_i f_j(x_i)=1;j=0,1\right)$. عندئذٍ الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار الفرضية $H_0:\theta=\theta_0$ ضد $H_1:\theta=\theta_0$ يعطى بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1=\{x:\lambda(x)\leq c\} \qquad (1.3.2)$$

حيث إن:

$$\lambda(x)=\frac{L(x;\theta_0)}{L(x;\theta_1)}=\frac{\prod_{i=1}^{n}f_0(x_i)}{\prod_{i=1}^{n}f_1(x_i)}$$

تشتمل منطقة الرفض G_1 على العدد الأقصى من النقاط $x=(x_1,\ldots,x_n)$ المحققة للشرط:

$$\sum_{x\in G_1}L(x;\theta_0)\leq\alpha \qquad (2.3.2)$$

لكن خلافاً لحالة نموذج مستمر، بحكم صفة الانقطاع لتوزيع العينة X، ليس بالإمكان دائماً إيجاد قيمة معينة لـ c في المتباينة $\lambda(x) \le c$ المعرفة للفئة G_1 بحيث تتحقق المساواة في (2.3.2). ويمكن تعيين الفئة G_1 بأن نضم إليها -على التتالي- النقاط $x = (x_1,\dots,x_n)$ طالما لم نبلغ المستوى α [لم تتحقق المساواة في (2.3.2)]، ونتوقف عند أول نقطة تجعل $\sum_{G_1} L(x;\theta_0) \ge \alpha$، ويمكن إيضاح ذلك على النحو الآتي:

لنرمز بـ $\{\dots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \dots\}$ لفئة القيم الممكنة لإحصاء نسبة المعقولية $\Lambda(X)$. عندئذٍ في الحالة العامة يمكن تعيين عدد صحيح موجب $k = k(\alpha)$ ، بحيث تتحقق المتباينة المزدوجة:

$$\sum_{x:\lambda(x)\le\lambda_{k-1}} L(x;\theta_0) < \alpha \le \sum_{x:\lambda(x)\le\lambda_k} L(x;\theta_0) \tag{3.3.2}$$

إذا تحققت المساواة في الجزء الأيمن من العلاقة (3.3.2) فنأخذ الاختبار المعرف بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha} = \{x : \lambda(x) \le \lambda_k\} \tag{4.3.2}$$

وبتكرار المناقشة الواردة في البند (2.2) واستبدال التكامل بالمجموع يمكن إثبات أنه الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد البديل $H_1 : \theta = \theta_1$.

لنرَ الآن الحالة التي تكون فيها العلاقة (3.3.2) عبارة عن متباينة صارمة (وهذا ما يكون غالباً)، أي أن:

$$\sum_{x:\lambda(x)\le\lambda_{k-1}} L(x;\theta_0) < \alpha < \sum_{x:\lambda(x)\le\lambda_k} L(x;\theta_0) \tag{5.3.2}$$

لنرمز بـ:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \sum_{x:\lambda(x)\le\lambda_{k-1}} L(x;\theta_j) \quad ; \quad j=0,1 \\ p_j &= P_{\theta_j}\left(\Lambda(X)=\lambda_k\right) = \sum_{x:\lambda(x)=\lambda_k} L(x;\theta_j) \;;\; j=0,1 \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

وعلى ذلك يمكن كتابة المتباينة الصارمة (5.3.2) على النحو الآتي:

$$\alpha_0 < \alpha \le \alpha_0 + p_0 \;\Rightarrow\; 0 < \alpha - \alpha_0 < p_0$$

وهذه مكافئة للمتباينة المعـــرفة في العلاقة (5.3.2). لبناء اختبار بمستوى معنوية α تماماً يجب استعمال الأسلوب العشوائي، والاختبار الذي نحصل عليه يدعى بالاختبار العشـــوائي Randomized test، ويعطى عادة بدلالة دالة $\varphi(x)$ -تسمى بدالة الرفض- ودالة قـــوة الاختبار $\varphi(x)$ (احتمال رفض الفرضية عند كل نقطة $\theta \in \Theta$) تعطى بالعلاقة:

$$W(\theta) = W(\varphi;\theta) = E_\theta \varphi(X) \tag{7.3.2}$$

وخوارزمية إجراء الاختبار العشوائي كالآتي:

إذا كانت القيمة الملاحظة $\lambda(x) < \lambda_k$ نرفض H_0 باحتمال يساوي الواحـــد، وإذا كانت $\lambda(x) > \lambda_k$ نرفض H_0 باحتمال يساوي الصفر (نقبل H_0)، أما عنـــد تحقـــق المساواة $\lambda(x) = \lambda_k$ نجري تجربة عشوائية إضافية (نظريا) ذات ناتجين $R, \overline{R}$ باحتمـــالين على الترتيب $\gamma = (\alpha - \alpha_0)/p_0$، $1-\gamma$، بحيث نرفض فرضية العدم H_0، عند ظـــهور $\overline{R}$، باحتمال يساوي $\gamma = (\alpha - \alpha_0)/p_0$ ونقبل H_0، عند ظهور R، باحتمال يساوي $1-\gamma$. وبعبارة أخـــرى يعطى الاختبار العشوائي لاختبار فرضيتـــين بســـيطتين H_0 و H_1 بدلالة دالة الرفض $\varphi^*(x)$ المعرفة على النحو الآتي:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & , \ \lambda(x) < \lambda_k \\ (\alpha - \alpha_0)/p_0 & , \ \lambda(x) = \lambda_k \\ 0 & , \ \lambda(x) > \lambda_k \end{cases} \tag{8.3.2}$$

واحتمال الوقوع في خطأ من النوع I لمثل هذا الاختبار يساوي:

$$\begin{aligned} P(H_1|H_0) = W(\theta_0) = E_{\theta_0}\varphi^*(X) &= P_{\theta_0}\left(\Lambda(X) < \lambda_k\right) + P_{\theta_0}\left(\Lambda(X) = \lambda_k, \overline{R}\right) \\ &= P_{\theta_0}\left(\Lambda(X) \le \lambda_{k-1}\right) + P_{\theta_0}\left(\Lambda(X) = \lambda_k\right) P_{\theta_0}(\overline{R}) \\ &= \alpha_0 + p_0 \frac{\alpha - \alpha_0}{p_0} = \alpha \end{aligned} \tag{9.3.2}$$

وقوة هذا الاختبار:

$$W(\theta_1) = E_{\theta_1}\varphi^*(X) = P_{\theta_1}\left(\Lambda(X) < \lambda_k\right) + P_{\theta_1}\left(\Lambda(X) = \lambda_k, \overline{R}\right)$$
$$= P_{\theta_1}\left(\Lambda(X) \le \lambda_{k-1}\right) + P_{\theta_1}\left(\Lambda(X) = \lambda_k\right)P_{\theta_1}(\overline{R})$$
$$= \alpha_1 + p_1 \frac{\alpha - \alpha_0}{p_0} \qquad (10.3.2)$$

وبشكل عام الاختبار الأقوى بحجم α يعطى بدلالة دالة الرفض $\varphi^*(x)$ على النحو الآتي:

$$G_{1\alpha}^* = \{x : 0 < \varphi^*(x) \le 1\}$$

حيث $\gamma = \frac{\alpha - \alpha_0}{p_0} = 1$ في حالة الاختبار غير عشوائي، وهذا يعني أن $\varphi^*(x) = 1$ عندما $x \in G_{1\alpha}^*$ $\left(\varphi^*(x) = 0 ; x \notin G_{1\alpha}^*\right)$، أما في حالة الاختبار عشوائي فإن $0 < \gamma < 1$.

هكذا، في الاختبار العشوائي تجزئ فضاء العينة G إلى ثلاث فئات متنافية تبادليــــاً A, B, C، بدلاً من فئتين G_0, G_1، حيث إن:

$$A = \{x : \lambda(x) < \lambda_k\} \quad , \quad B = \{x : \lambda(x) = \lambda_k\} \quad , \quad C = \{x : \lambda(x) > \lambda_k\}$$

وإذا كانت:

$x \in A$ نرفض H_0.

$x \in B$ نرفض H_0 باحتمال $0 < \gamma < 1$.

$x \in C$ نقبل H_0.

لنبرهن الآن أن الاختبار العشوائي المعرف بدالة الرفض (8.3.2) هـــو الاختبـــار الأقوى بحجم α لاختبار الفرضية البسيطة H_0 ضد الفرضية البسيطة H_1.

لنفترض وجود اختبارٍ ما آخر بحجم α أو أقل $(\alpha_1 \le \alpha)$ معطى بدالــــة الرفــض $E_{\theta_0}\varphi(X) \le \alpha$: $\varphi(x)$، ولنرمز بـ $G^{\pm} = \{x : \varphi^*(x) - \varphi(x) >< 0\}$، حيث الإشـــارة

"+" ("−") توافق المتباينة > (<). إذا كانت $x \in G^+$ فإن:

$$\varphi^*(x) - \varphi(x) > 0 \Rightarrow \varphi^*(x) > \varphi(x) \geq 0 \Rightarrow \varphi^*(x) > 0$$

وبالتالي:

$$L(x;\theta_0) \leq \lambda_k L(x;\theta_1) \;\Rightarrow\; L(x;\theta_1) \geq \frac{1}{\lambda_k} L(x;\theta_0) \geq 0$$

وإذا كانت $x \in G^-$:

$$\varphi^*(x) - \varphi(x) < 0 \Rightarrow \varphi^*(x) < \varphi(x) \leq 1 \Rightarrow \varphi^*(x) < 1$$

ومن ثم:

$$L(x;\theta_0) \geq \lambda_k L(x;\theta_1) \;\Rightarrow\; L(x;\theta_1) \leq \frac{1}{\lambda_k} L(x;\theta_0) \leq 0$$

وعلى ذلك:

$$\sum_x \left(\varphi^*(x) - \varphi(x)\right)\left(L(x;\theta_1) - \frac{1}{\lambda_k} L(x;\theta_0)\right) = \sum_{x \in G^+} + \sum_{x \in G^-} \;\; \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_x \left(\varphi^*(x) - \varphi(x)\right) L(x;\theta_1) \geq \frac{1}{\lambda_k} \sum_x \left(\varphi^*(x) - \varphi(x)\right) L(x;\theta_0)$$

ومن ثم فرق القوتين:

$$\begin{aligned}
\Delta &= W(\varphi^*;\theta_1) - W(\varphi;\theta_1) = E_{\theta_1}\varphi^*(X) - E_{\theta_1}\varphi(X) = E_{\theta_1}\left[\varphi^*(X) - \varphi(X)\right] \\
&= \sum_x \left(\varphi^*(x) - \varphi(x)\right) L(x;\theta_1) \geq \frac{1}{\lambda_k} \sum_x \left(\varphi^*(x) - \varphi(x)\right) L(x;\theta_0) \\
&= \frac{1}{\lambda_k}\left(E_{\theta_0}\varphi^*(X) - E_{\theta_0}\varphi(X)\right) = \frac{1}{\lambda_k}(\alpha - \alpha_1) \geq 0 \quad ; \quad E_{\theta_0}\varphi(X) = \alpha_1 \leq \alpha
\end{aligned}$$

أي أن:

$$W(\varphi^*;\theta_1) \geq W(\varphi;\theta_1)$$

وهو المطلوب.

هكذا، في حالة نموذج منقطع يمكن بناء الاختبار الأقوى، الذي يعتبر -بشكل عام- اختبـاراً عشـوائياً. والاختبـار العشـوائي يكـون ضرورياً فقط عند الفئة الحديـة $B = \{x : \lambda(x) = \lambda_k\}$، وذلك عندما نرغب الحصول على احتمال الخطأ من النـوع I يساوي تماماً α. ويفضل تطبيقياً في مثل تلك الحالات، إذا كان ممكناً، إجـراء بعـض التغيير في مستوى المعنوية α لإزالة ضرورة بناء الاختبار العشوائي، وذلك باسـتبدال α بـ α_0 واستخدام الاختبار غير العشوائي:

$$G^*_{1\alpha_0} = \{x : \lambda(x) \leq \lambda_{k-1}\}$$

الذي يعتبر الاختبار الأقوى بحجم α_0 $(\alpha_0 < \alpha)$، ويمكن أيضاً استخدام الاختبـار غير العشوائي:

$$G^*_{1\alpha'} = \{x : \lambda(x) \leq \lambda_k\}$$

بحجم $\alpha' = \alpha_0 + p_0 > \alpha$ ويتم اختيار α_0 أو $\alpha' = \alpha_0 + p_0$ بناءً على الجانب التطبيقي للمسألة قيد الدراسة (مقارنة الخسائر المترتبة على نوعي الخطأ).

سنوضح ما سبق من خلال بعض الأمثلة.

مثـال 1.3.2: (نموذج برنولي، اختبار فرضيتين بسيطتين)

إذا كـانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع $\mathcal{L}(\xi) \in B(1,\theta)$ ونريد اختبـار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد فرضية بديلة بسيطة $H_1 : \theta = \theta_1$، فأوجد الاختبار الأقـوى بحجم α.

بما أن:

$$f(x;\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} \quad ; \quad x = 0,1 \ , \ 0 < \theta < 1$$

فإن:

$$L(x;\theta_j) = \theta_j^r(1-\theta_j)^{n-r} \quad ; \quad j = 0,1$$

حيـــث إن $r = r(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ عـــدد النجاحـــات الملاحظـــة في العينـــة المشـــاهدة $x = (x_1, ..., x_n)$، وعليه:

$$\lambda(x) = \frac{L(x;\theta_0)}{L(x;\theta_1)} = \frac{\theta_0^r(1-\theta_0)^{n-r}}{\theta_1^r(1-\theta_1)^{n-r}} = \left[\frac{\theta_0(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_0)}\right]^r \left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)^n$$

إن الدالة $h(\theta) = \dfrac{\theta}{1-\theta}$ متزايدة في θ على الفترة $(0,1)$، لذا:

1. عندما $H_1 : \theta = \theta_1 < \theta_0$ فإن $\dfrac{h(\theta_0)}{h(\theta_1)} > 1$، ومن ثم $\lambda(x) \le c$ مكافئة للمتباينة:

$$r(x) \le (\ln c - n\rho_1/\rho) < \|[(\ln c - n\rho_1)/\rho]\| + 1 = r^* + 1$$

أي أن:

$$r(x) < r^* + 1 \quad \Rightarrow \quad r(x) \le r^*$$

حيث إن الرمز $\|a\|$ يعني الجزء الصحيح للعدد a وأن:

$$r^* = \|[(\ln c - n\rho_1)/\rho]\| \quad , \quad \rho = \ln\frac{h(\theta_0)}{h(\theta_1)} > 0 \quad , \quad \rho_1 = \ln\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_1}\right)$$

وبالتالي الاختبار يعطى بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1^* = \{x : r(x) \le r\}$$

ولتعيين الحد الحرج $r^* = r_\alpha$ نلاحظ أن $\mathcal{L}_{\theta_0}(r(X)) = B(n,\theta_0)$، وبالتالي الشـــرط (3.3.2) يصبح على الصورة:

$$\begin{aligned} &P_{\theta_0}(r(X) \le r^* - 1) < \alpha \le P_{\theta_0}(r(X) \le r^*) \\ &\sum_{m=0}^{r^*-1} C_m^n \theta_0^m (1-\theta_0)^{n-m} < \alpha \le \sum_{m=0}^{r^*} C_m^n \theta_0^m (1-\theta_0)^{n-m} \end{aligned} \qquad (11.3.2)$$

إذا كانت المساواة محققة في الطرف الأيمن من العلاقة (11.3.2) فنكون بذلك قد توصلنا إلى بناء اختبار نيمان وبيرسون $G_{1\alpha}^*$ بحجم α لاختبار الفرضية H_0 ضد البديل H_1، حيث $r^* = r_\alpha$ تتعين من العلاقة:

$$P_{\theta_0}\left(r(X) \le r^*\right) = \sum_{m=0}^{r^*} C_m^n \theta_0^m (1-\theta_0)^{n-m} = \alpha \qquad (12.3.2)$$

وباستخدام جدول توزيع ذي الحدين نجد $r^* = r_\alpha$، ومن ثم الاختبار الأقوى بحجم α المطلوب يوافق منطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^* = \{x : r(x) \le r_\alpha\} \qquad (13.3.2)$$

بما أن $\mathcal{L}_{\theta_1}\left(r(X)\right) = B(n, \theta_1)$، فإن قوة الاختبار:

$$W(G_{1\alpha}^*; \theta_1) = P_{\theta_1}\left(r(X) \le r_\alpha\right) = \sum_{m=0}^{r_\alpha} C_m^n \theta_1^m (1-\theta_1)^{n-m} \qquad (14.3.2)$$

غالباً عند تعيين α مسبقاً تتحقق المتباينة الصارمة في العلاقة (11.3.2)، وبالتالي الاختبار المعرف بمنطقة الرفض (13.3.2) سيكون له مستوى معنوية (دلالة) لا يساوي α تماماً، بل أكبر α' $(\alpha' = \alpha_0 + p_0 > \alpha)$.

إذا كان المطلوب في الحالة المفروضة بناء اختبار بمستوى معنوية (دلالة) يساوي تماماً α، فينبغي اللجوء إلى بناء الاختبار العشوائي وذلك على النحو الآتي:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & , \ r(x) < r_\alpha \\ \gamma = \dfrac{\alpha - \alpha_0}{p_0} & , \ r(x) = r_\alpha \\ 0 & , \ r(x) > r_\alpha \end{cases} \qquad (15.3.2)$$

حيث إن:

$$\alpha_0 = P_{\theta_0}\left(r(X) \le r_\alpha - 1\right) = \sum_{m=0}^{r_\alpha - 1} C_m^n \theta_0^m (1-\theta_0)^{n-m}$$

$$p_0 = P_{\theta_0}\left(r(X) = r_\alpha\right) = C_m^n \theta_0^{r_\alpha} (1-\theta_0)^{n-r_\alpha}$$

ويتعين الحد الحرج $r = r_\alpha$ من العلاقة:

$$P_{\theta_0}\left(r(X) \le r_\alpha\right) = \sum_{m=0}^{r_\alpha} C_m^n \theta_0^m (1-\theta_0)^{n-m} = \alpha_0 + p_0 = \alpha' \qquad (16.3.2)$$

أي نرفض الفرضية H_0 عند $r(x) < r_\alpha$ ونقبلها عندما $r(x) > r_\alpha$. بينما إذا كانت $r(x) = r_\alpha$ نرفض الفرضية H_0 باحتمال $\gamma = \dfrac{\alpha - \alpha_0}{p_0}$ (تقبل باحتمال $1-\gamma$). وعندئذٍ احتمال الخطأ من النوع I للاختبار العشوائي $\varphi^*(X)$ يساوي:

$$\begin{aligned} P(H_1|H_0) = W(\varphi^*;\theta_0) = E_{\theta_0}\varphi(X) &= P_{\theta_0}\left(r(X) < r_\alpha\right) + P_{\theta_0}\left(r(X) = r_\alpha\,,\,\overline{R}\right) \\ &= P_{\theta_0}\left(r(X) < r_\alpha\right) + P_{\theta_0}\left(r(X) = r_\alpha\right) P_{\theta_0}\left(\overline{R}\right) \\ &= \alpha_0 + p_0 \frac{\alpha - \alpha_0}{p_0} = \alpha \end{aligned}$$

وقوة هذا الاختبار:

$$\begin{aligned} W(\varphi^*;\theta_1) = E_{\theta_1}\varphi^*(X) &= P_{\theta_1}\left(r(X) < r_\alpha\right) + P_{\theta_1}\left(r(X) = r_\alpha\,,\overline{R}\right) \\ &= P_{\theta_1}\left(r(X) < r_\alpha\right) + P_{\theta_1}\left(r(X) = r_\alpha\right) P_{\theta_1}\left(\overline{R}\right) \\ &= \sum_{m=0}^{r_\alpha - 1} C_m^n \theta_1^m (1-\theta_1)^{n-m} + (\alpha - \alpha_0)\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{r_\alpha}\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n-r_\alpha} \end{aligned} \qquad (17.3.2)$$

2. عندما $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$ فإن $\dfrac{h(\theta_0)}{h(\theta_1)} < 1$ ، ومن ثم المتباينة $\lambda(x) \le c$ تصبح مكافئة للمتباينة:

$$r(x) \ge (\ln c - n\rho_1)/\rho \ge \left\|(\ln c - n\rho_1)/\rho\right\| > r^* - 1 \quad ; \quad \left\|(\ln c - n\rho_1)/\rho\right\| = r^*$$

$$r(x) > r^* - 1 \quad \Rightarrow \quad r(x) \ge r^*$$

أي أن منطقة الرفض من الشكل:

$$G_1^* = \{x : r(x) \ge r^*\}$$

ويكتب الشرط (3.3.2) على النحو الآتي:

$$\sum_{m=r^*+1}^{n} C_m^n \theta_0^m (1-\theta_0)^{n-m} < \alpha \le \sum_{m=r^*}^{n} C_m^n \theta_0^m (1-\theta_0)^{n-m} \qquad (18.3.2)$$

إذا وجد عدد صحيح r^*، ولنرمز له بـ r_α، يحقق المساواة في الطرف الأيمن من المتباينة (18.2.2) فيكون الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ مقابل $H_1 : \theta = \theta_1 < \theta_0$ يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^* = \{x : r(x) \ge r_\alpha\} \qquad (19.3.2)$$

أما في حالة عدم وجود عدد صحيح r_α يحقق ذلك، فالاختبار الأقوى بحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ مقابل $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$ يعطى بدالة الرفض:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & , \quad r(x) > r_\alpha \\ \dfrac{\alpha - \alpha_0}{p_0} & , \quad r(x) = r_\alpha \\ 0 & , \quad r(x) < r_\alpha \end{cases} \qquad (20.3.2)$$

وبتعيين الحد الحرج $r^* = r_\alpha$ من العلاقة:

$$\begin{aligned} P_{\theta_0}\big(r(X) \ge r_\alpha\big) &= \sum_{m=r_\alpha}^{n} C_m^n \theta_0^m (1-\theta_0)^{n-m} = \alpha' \\ P_{\theta_0}\big(r(X) \ge r_\alpha\big) &= P_{\theta_0}\big(r(X) \ge r_\alpha + 1\big) + P_{\theta_0}\big(r(X) = r_\alpha\big) = \alpha_0 + p_0 = \alpha' \end{aligned} \qquad (21.3.2)$$

وقوة الاختبار غير العشوائي (19.3.2):

$$W(G_{1\alpha}^*;\theta_1) = P_{\theta_1}\big(r(X) \ge r_\alpha\big) = \sum_{m=r_\alpha}^{n} C_m^n \theta_1^m (1-\theta_1)^{n-m} \qquad (22.3.2)$$

وقوة الاختبار العشوائي (20.3.2):

$$\begin{aligned} W(\varphi^*;\theta_1) &= E_{\theta_1}\varphi^*(X) = P_{\theta_1}\big(r(X) > r_\alpha\big) + \frac{\alpha - \alpha_0}{p_0} P_{\theta_1}\big(r(X) = r_\alpha\big) \\ &= \sum_{m=r_\alpha+1}^{n} C_m^n \theta_1^m (1-\theta_1)^{n-m} + (\alpha - \alpha_0)\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{r_\alpha}\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n-r_\alpha} \end{aligned} \qquad (23.3.2)$$

مثـال 2.3.2

لتكن $X=(X_1,...,X_{10})$ عينة عشوائية من التوزيع $B(1,\theta)$ $\mathcal{L}(\xi)\in$ ونريد اختبار الفرضية $H_0:\theta_0=0.01$ ضد $H_1:\theta_1=0.02$ عند مستوى معنوية $\alpha=0.0001$.

لبناء الاختبار الأقوى بحجم $\alpha=0.0001$ نبحث في جدول تـوزيع ذي الحـدين عن العدد الصحيح $r=r_\alpha$ المحقق للمساواة:

$$P_{\theta_0=0.01}(r(X)\geq r_\alpha)=0.0001 \quad ; \quad r(X)=\sum_1^{10}X_i$$

إن وجد مثل هذا العدد فالاختبار الأقوى (غير العشوائي) بحجم $\alpha=0.0001$ موجود ويعطى بمنقطة الرفض:

$$G^*_{1\alpha}=\{x:r(x)\geq r_\alpha\}$$

لأن $\theta_1>\theta_0$.

فعلاً من جدول ذي الحدين $n=10$ و $\theta_0=0.01$ نجد:

$$P_{\theta_0}(r(X)\geq r_\alpha=3)=0.0001$$

أي أن:

$$G^*_{1\alpha}=\{x:r(x)\geq 3\}$$

مثـال 3.3.2: (نموذج بواسون، اختبار فرضية بسيطة)

إذا كانت $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع $\mathcal{L}(\xi)\in\Pi(\theta)$ وكـانت $H_1:\theta=\theta_1$ ، $H_0:\theta=\theta_0$ ، فأوجد الاختبار الأقوى بحجم α:

بما أن:

$$L(X;\theta_j)=\prod_{i=1}^{n}f(X_i,\theta_j)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta_j^{X_i}}{X_i!}e^{-\theta_j} \quad ; \quad j=0,1$$

فنرفض الفرضية H_0 عندما:

$$\Lambda(X) = \frac{L(X;\theta_0)}{L(X;\theta_1)} = \frac{\theta_0^{\sum_1^n X_i} e^{-n\theta_0}}{\theta_1^{\sum_1^n X_i} e^{-n\theta_1}} \le c$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نجد:

$$\ln\Lambda(X) = \sum_1^n X_i \ln\frac{\theta_0}{\theta_1} - n(\theta_0 - \theta_1) \le \ln c$$

$$\ln\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)\sum_1^n X_i \le \ln c + n(\theta_0 - \theta_1) = c'$$

وهنا نميز حالتين:

1. $\theta_1 > \theta_0$.
2. $\theta_1 < \theta_0$.

الحالة الأولى: $\theta_1 > \theta_0$ أي أن $\frac{\theta_0}{\theta_1} < 1$ وبالتالي $\ln\frac{\theta_0}{\theta_1} < 0$، وعلى ذلك:

$$T(X) = \sum_{i=1}^n X_i \ge \frac{c'}{\ln(\theta_0/\theta_1)} = d$$

ومن ثم منطقة الرفض في الحالة المعطاة تأخذ الشكل:

$$G_1^* = \left\{x : \sum_1^n x_i \ge d\right\} \tag{24.3.2}$$

ولتعيين الحد الحرج d يلزمنا معرفة توزيع إحصاء الاختبار $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$، وهذا الإحصاء عبارة عن مجموع عدة متغيرات عشوائية مستقلة لكل منها نفس التوزيع وهو توزيع $\mathcal{L}(\xi) \in \Pi(\theta)$، وبالتالي [راجع 2 في الفقرة (3.8.3-I)]:

$$\mathcal{L}_\theta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \Pi(n\theta)$$

وعليه الشرط (3.3.2) يكتب على النحو الآتي:

$$P_{\theta_0}\left(T(X) \ge d+1\right) < \alpha \le P_{\theta_0}\left(T(X) \ge d\right)$$

$$\sum_{t=d+1}^{\infty} \frac{(n\theta_0)^t}{t!} e^{-n\theta_0} < \alpha \le \sum_{t=d}^{\infty} \frac{(n\theta_0)^t}{t!} e^{-n\theta_0} \qquad (25.3.2)$$

إذا كانت المساواة محققة في الطرف الأيمن من العلاقة (25.3.2)، أي يمكن إيجـــاد عدد صحيح $d = d_\alpha$ يحقق الشرط:

$$P_{\theta_0}\left(T(X) \ge d\right) = \sum_{t=d}^{\infty} \frac{(n\theta_0)^t}{t!} e^{-n\theta_0} = \alpha$$

وهذا يعني توصلنا إلى بناء الاختبار (غير العشوائي) الأقوى بحجم α لاختبار الفرضية H_0 ضد الفرضية البديلة H_1 معطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*} = \left\{x : \sum_{1}^{n} x_i \ge d_\alpha\right\} \qquad (26.3.2)$$

وهذا الاختبار لا يعتمد على البديل θ_1. وقوة هذا الاختبار:

$$W(G_{1\alpha}^{*};\theta_1) = P_{\theta_1}\left(T(X) \ge d_\alpha\right) = \sum_{t=d}^{\infty} \frac{(n\theta_1)^t}{t!} e^{-n\theta_1} \qquad (27.3.2)$$

وفي حالة تحقق المتباينة الصارمة في (25.3.2)، فالاختبار المعرف بمنطقـــة الرفـــض (24.3.2) سيكون له مستوى معنوية أكبر من α نرمز له بـــ α'، وفي هـــذه الحالـــة الاختبار العشوائي يعطى بمنطقة الرفض:

$$\varphi^{*}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \sum_{1}^{n} x_i > d_\alpha \\ \dfrac{\alpha - \alpha_0}{p_0} & , \quad \sum_{1}^{n} x_i = d_\alpha \\ 0 & , \quad \sum_{1}^{n} x_i < d_\alpha \end{cases} \qquad (28.3.2)$$

حيث d_α تتعين من العلاقة:

$$P_{\theta_0}\left(T(X) \geq d_\alpha\right) = \sum_{t=d}^{\infty} \frac{(n\theta_0)^t}{t!} e^{-n\theta_0} = \alpha'$$

$$\alpha' = P_{\theta_0}\left(T(X) \geq d_\alpha + 1\right) + P_{\theta_0}\left(T(X) = d_\alpha\right) = \alpha_0 + p_0$$

وقوة الاختبار (28.3.2):

$$W(\varphi^*;\theta_1) = P_{\theta_1}\left(T(X) > d_\alpha\right) + P_{\theta_1}\left(T(X) = d_\alpha , \overline{R}\right)$$

$$= \sum_{t=d+1}^{\infty} \frac{(n\theta_1)^t}{t!} e^{-n\theta_1} + \frac{(n\theta_1)^{d_\alpha}}{d_\alpha} \frac{(\alpha - \alpha_0)}{p_0} \qquad (29.3.2)$$

فمثلاً إذا كانت $\alpha = 0.0511$، $n = 10$ و $H_1 : \theta = 0.5$، $H_0 : \theta = 0.4$،
فمن جدول توزيع بواسون بمتوسط $n\theta_0 = 4$، نجد:

$$P_{\theta_0}(T \geq 8) = \sum_{t=8}^{\infty} \frac{4^t}{t!} e^{-4} = 0.0511$$

وبالتالي الاختبار الأقوى بحجم $\alpha = 0.0511$ موجود ويعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^* = \left\{ x : \sum_{1}^{10} x_i \geq 8 \right\}$$

أما في حالة $\alpha = 0.05$، فمن جدول توزيع بواسون بمتوسط 4 نجد:

$$P_{\theta_0}\left(T(X) \geq 9\right) = 0.0214 = \alpha_0$$

$$P_{\theta_0}\left(T(X) \geq 8\right) = 0.0511 = \alpha'$$

وعلى ذلك فإن $d = 8,9$ تحصران بينهما الاحتمال $\alpha = 0.05$، وفي هذه الحالة (التقيد بقيمة α) نستخدم الاختبار العشوائي:

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}1 & , \sum x_i>8\\ 0.963 & , \sum x_i=8\\ 0 & , \sum x_i<8\end{cases}$$

وتكون قوة الاختبار:

$$W(\varphi^*;\theta_1)=P_{\theta_1}(T>8)+0.963P_{\theta_1}(T=8)=$$

$$\approx 0.0681+0.963(0.0653)=0.131$$

الحالة الثانية: $\theta_1<\theta_0$:

$$\theta_1<\theta_0 \Rightarrow \frac{\theta_0}{\theta_1}>1 \Rightarrow \ln\frac{\theta_0}{\theta_1}>0$$

وعلى ذلك:

$$T(X)=\sum_{i=1}^{n} X_i \le \frac{c'}{\ln(\theta_0/\theta_1)}=d$$

أي أن منطقة الرفض في هذه الحالة تأخذ الشكل:

$$G_1^*=\left\{x:\sum_{1}^{n} x_i \le d\right\} \qquad (30.3.2)$$

وتأخذ المتباينة (2.3.2) الشكل التالي:

$$\sum_{t=0}^{d-1}\frac{(n\theta_0)^t}{t!}e^{-n\theta_0}<\alpha\le\sum_{m=0}^{d}\frac{(n\theta_0)^t}{t!}e^{-n\theta_0} \qquad (31.3.2)$$

إذا تحققت المساواة في الطرف الأيمن من العلاقة، فيكون الاختبار الأقوى بحجم α (غير العشوائي) لاختبار الفرضية H_0 ضد H_1 موجود ويعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^*=\left\{x:\sum_{1}^{n} X_i \le d_\alpha\right\} \qquad (32.3.2)$$

وقوة هذا الاختبار:

$$W(\varphi^*;\theta_1) = P_{\theta_1}(T(X) \le d_\alpha) = \sum_{t=0}^{d_\alpha} \frac{(n\theta_1)^t}{t!} e^{-n\theta_1} \tag{33.3.2}$$

وفي الحالة الأخرى حيث تتحقق المتباينة الصارمة في (31.3.2)، فـإن الاختبـار الأقوى بحجم α (العشوائي) يعطي بدالة الرفض:

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & , \sum_1^n x_i < d_\alpha \\ \frac{\alpha - \alpha_0}{p_0} & , \sum_1^n x_i = d_\alpha \\ 0 & , \sum_1^n x_i > d_\alpha \end{cases} \tag{34.3.2}$$

وقوة الاختبار (34.3.2):

$$\begin{aligned} W(\varphi^*;\theta_1) &= P_{\theta_1}(T(X) < d_\alpha) + \frac{\alpha - \alpha_0}{p_0} P_{\theta_1}(T(X) = d_\alpha) \\ &= \sum_{t=0}^{d_\alpha} \frac{(n\theta_1)^t}{t!} e^{-n\theta_1} + \frac{\alpha - \alpha_0}{p_0} \frac{(n\theta_1)^{d_\alpha}}{d_\alpha!} e^{-n\theta_1} \end{aligned} \tag{35.3.2}$$

فمثلاً إذا كانت $n = 10, \alpha = 0.0404$ و $H_0 : \theta = 0.5, \theta_1 = 0.4$ فإن الاختبار الأقوى بحجم $\alpha = 0.0404$ يعطي بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^* = \left\{ x : \sum_1^{10} x_i \le 1 \right\} \quad ; \quad P_{\theta_0}(T(X) \le 1) = 0.0404$$

وقوة الاختبار:

$$W(G_{1\alpha}^*;\theta_1) = P_{\theta_1}(T(X) \le 1) = \sum_{t=0}^{1} \frac{4^t}{t!} e^{-4} = 0.0916$$

أما إذا كـانت $\alpha = 0.05$، فـلا يوجـد عـدد صحيـح d يحقـق المسـاواة $P_{\theta_0}(T(X) \le d = 0.05)$، بل نجد من جدول توزيع بواسون بمتوسط $n\theta_0 = 5$ بأن:

$$P_{\theta_0}\left(T(X)\le 1\right)=0.0214 \quad , \quad T(X)=\sum_{1}^{10}X_i$$
$$P_{\theta_0}\left(T(X)\le 2\right)=0.0511$$

وهذا يعني أن $d=1,2$ تحصران بينهما الاحتمال $\alpha=0.05$، والاختبار الأقوى بحجم $\alpha=0.05$ يعطى بدالة الرفض:

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}1 & , \sum x_i<2\\ 0.11 & , \sum x_i=2\\ 0 & , \sum x_i>2\end{cases}$$

وتكون قوة الاختبار:

$$W(\varphi^*;\theta_1)=\sum_{t=0}^{1}\frac{4^t}{t!}e^{-4}+\frac{\alpha-\alpha_0}{p_0}\left(\frac{4^2}{21}e^{-4}\right)$$
$$=0.0916+\frac{0.05-0.0404}{0.0842}(0.1465)=0.1481$$

تمارين

1. إذا كانت $X=(X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\theta,4)$ وكانت $H_0:\theta=0;H_1:\theta=2$، فأوجد الاختبار الأقوى بحجم $\alpha=0.01$.

2. إذا كانت $X=(X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع الطبيعي $\mathcal{L}(\xi)\in N(0,\theta^2)$ وكانت $H_0:\theta=1,H_2:\theta=2$، فأوجد الاختبار الأقوى بحجم $\alpha=0.05$.

3. إذا كانت $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع $\mathcal{L}(\xi) \in \Gamma(1, \theta)$ وكانت $H_0 : \theta = 3 , H_1 : \theta = 2$ ، فأوجد الاختبار الأقوى بحجم $\alpha = 0.10$.

4. لتكن X عينة عشوائية من ملاحظة واحدة من توزيع:

$$f(x;\theta) = (2\theta x + 1 - \theta) \quad ; \quad 0 < x < 1 \ , \ -1 < \theta < 1$$

أوجد الاختبار الأقوى بحجم $\alpha = 0.01$ لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = 0$ ضد $H_1 : \theta = 1$ ، ثم أوجد قوة هذا الاختبار.

5. إذا كانت X عينة عشوائية مؤلفة من ملاحظة واحدة من توزيع $f(x;\theta)$ ، فأوجد الاختبار الأقوى بحجم $\alpha = 0.05$ واحسب قوته في الحالات الآتية:

أ.
$$f(x;\theta) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - x) \quad ; \quad 0 < x < \theta$$
$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad ; \quad H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$$

ب.
$$f(x;\theta) = (\theta - 1)x^{\theta-2} \quad ; \quad 0 < x < 1 \ , \ \theta > 1$$
$$H_0 : \theta = 2 \quad ; \quad H_1 : \theta = 3$$

ج.
$$f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)} \quad ; \quad x \geq \theta$$
$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad ; \quad H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$$

6. إذا كانت $X = (X_1, X_2)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} \quad ; \quad 0 < x < 1$$

فأوجد الاختبار الأقوى بحجم $\alpha = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$ لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = 1$ ضد $H_1 : \theta = 2$ ، ومن ثم أوجد قوة هذا الاختبار. هل الاختبار الذي تحصلت عليه غير متحيز؟

7. لتكن X ملاحظة واحدة من توزيع:

$$f(x;\theta)=(2\theta x+1-\theta) \quad ; \quad 0<x<1\ ,\ -1\le\theta\le 1$$

أوجد الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار $H_0:\theta=0$ ضد $H_1:\theta=1$.

8. إذا كانت $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $f(x;\theta)$، فأوجد الاختبار الأقوى بحجم $\alpha=0.01$ ثم احسب قوته في الحالتين التاليتين:

أ. $f(x;\theta)=\frac{1}{1-\theta}e^{-(1-\theta)x} \quad ; \quad x>0\ ,\ \theta>1$

$H_0:\theta=\theta_0 \quad , \quad H_1:\theta=\theta_1>\theta_0$

ب. $f(x;\theta)=(1-\theta)e^{-x/(2-\theta)} \quad ; \quad x>0\ ,\ \theta>2$

$H_0:\theta=\theta_0 \quad , \quad H_1:\theta=\theta_1<\theta_0$

9. إذا كانت $X=(X_1,...,X_{10})$ عينة عشوائية من توزيع بيرنولي $B(1,\theta)$، وكانت $H_0:\theta_0=0.25\,,H_1:\theta=0.75$، فأوجد الاختبار الأقوى في كل من الحالات الآتية: $\alpha=0.0197\,,0.0781\,,0.05$.

10. إذا كانت $X=(X_1,...,X_6)$ عينة عشوائية من توزيع بواسون $\Pi(\theta)$، وكانت $H_0:\theta=5\,,H_1:\theta=3$، فأوجد الاختبار الأقوى بحجم $\alpha=0.05$. ثم إذا كان لديك العينة الملاحظة $x=(5,3,2,4,7)$ فهل تقبل فرضية العدم H_0 أم ترفضها؟

11. إذا كانت $X=(X_1,...,X_{10})$ عينة عشوائية من توزيع بواسون $\Pi(\theta)$ وكانت $H_0:\theta=0.40\,,H_1:\theta=0.5$ فأوجد:

أ. الاختبار الأقوى بحجم $\alpha=0.0214$.

ب. الاختبار الأقوى (غير العشوائي) بحجم $\alpha=0.541$ أو أصغر قليلاً.

ج. الاختبار الأقوى (غير العشوائي) بحجم $\alpha=0.051$ أو أكبر قليلاً.

الفصل الثالث:

الاختبارات وحيدة الجانب

1.3 مقدمة

درسنا في الفصل الثاني اختبار فرضية بسيطة مقابل فرضية بديلة بسيطة أيضاً.

وتعتبر الحالة التي تكون فيها كل من الفرضيتين H_0 ، H_1 فرضية بسيطة نادرة نسبياً في التطبيقات الإحصائية، أي غالباً تصادفنا في التطبيقات الحالة التي تكون فيها كلتا الفرضيتان H_0 و H_1 (أو إحداهما على الأقل) مركبة. وفي مثل تلك الحالة توجد الاختبارات الأقوى بانتظام فقط إذا كانت التوزيعات المتخذة (النموذج الاحصائي) محققة لشروط معينة. وهنا يجب أن نفرق بين خمس حالات:

1. H_0 فرضية عدم بسيطة $(\Theta_0 = \{\theta_0\})$ ضد فرضية بديلة مركبة من الشكل $H_1 = H_1^+ : \theta > \theta_0$ أو من الشكل $H_1 = H_1^- : \theta < \theta_0$ ، وتسمى كل من الفرضية H_1^+ و H_1^- بالفرضية وحيدة الجانب One-sided hypothesis من اليمين أو من اليسار على الترتيب.

2. H_0 فرضية مركبة وحيدة الجانب (من اليمين أو من اليسار)، أي من الشكل $H_0 : \theta \geq \theta_0$ أو $H_0 : \theta \leq \theta_0$ ضد فرضية مركبة وحيدة الجانب H_1^- أو H_1^+ على الترتيب.

3. H_0 فرضية بسيطة $(H_0 : \theta = \theta_0)$ ضد فرضية مركبة ذات جانبين $H_1 : \theta \neq \theta_0$ Tow-sided hypothesis.

4. H_0 فرضية مركبة ذات جانبين من الشكل $H_0 : \theta \leq \theta_1 \text{ or } \theta \geq \theta_2$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$.

5. H_0 فرضية مركبة من الشكل $H_0 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \theta \leq \theta_1 \text{ or } \theta \geq \theta_2$.

وسوف نبدأ بدراسة الحالة الأولى عندما تكون فرضية العدم H_0 بسيطة والفرضية البديلة H_1 مركبة وحيدة الجانب.

2.3 الاختبار الأقوى بانتظام لاختبار فرضية بسيطة ضد فرضية مركبة وحيدة الجانب

UNIFORMLY MOST POWERFUL TEST FOR SIMPLE HYPOTHESIS AGAINST ONE-SIDED HYPOTHESIS

تدعى اختبارات الفرضيات من النوع (1) و (2) بالاختبارات وحيدة الجانب، بينما تدعى اختبارات الفرضيات من النوع (3) و (4) و (5) بالاختبارات ذات الجانبين.

رأينا في الفصل الثاني عندما تكون كل من الفرضية H_0 و H_1 بسيطة يوجد دائماً اختبار أقوى بحجم α $(G_{1\alpha}^*)$ نحصل عليه بتطبيق مبدأ نيمان وبيرسون (مبرهنة 1.2.2). لكن عندما تكون H_0 فرضية بسيطة و H_1 فرضية مركبة فنكون مطالبين بمقارنة قيمة $H_0 : \theta = \theta_0$ مع فئة من القيم المعدودة أو اللانهائية $\theta \in \Theta_1 \subseteq \Theta \setminus \{\theta_0\}$، وفي هذه الحالة يمكن بناء اختبارات أقوى بحجم α لاختبار الفرضية H_0 ضد كل بديل $\theta \in \Theta_1$، أي بناء اختبارات نيمان وبيرسون $G_{1\alpha}^* = G_{1\alpha}^*(\theta_0, \theta)$ من أجل كل البدائل $\theta \in \Theta_1$. إذا كانت الاختبارات $G_{1\alpha}^*(\theta_0, \theta)$ لا تعتمد على البديل $\theta \in \Theta_1 \subset \Theta$، أي أن الاختبارات

الأقوى واحدة لا تتغير (لها منطقة رفض واحدة $(G_{1\alpha}^{*}(\theta_0)$)، وبالتالي الاختبار المعطى بمنطقة الرفض $G_{1\alpha}^{*}(\theta_0)$ له أكبر قوة عند كل البدائل $\theta \in \Theta_1$. وفي هذه الحالة يسمى الاختبار الذي حصلنا عليه $(G_{1\alpha}^{*}(\theta_0)$ بالاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية H_0 ضد الفرضية المركبة H_1، أما إذا تبين أن الاختبار $G_{1\alpha}^{*}(\theta_0, \theta)$ يعتمد على البديل $\theta \in \Theta_1$ (يتغير بتغير البديل θ)، أي عدم وجود الاختبار الأقوى من أجل كل القيم $\theta \in \Theta_1$، وبالتالي لا يوجد الاختبار الأقوى بانتظام وبحجم α لاختبار الفرضية H_0 ضد الفرضية المركبة H_1. هكذا، فالاختبار الأقوى بانتظام وبحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة H_1 إن وجد فهو عبارة عن اختبار نيمان وبيرسون بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد بديل معين $\theta_1 \in \Theta_1$.

سنقتصر في هذا البند على دراسة الحالة التي تكون فيها فرضية العدم H_0 بسيطة و $H_1 = H_1^{+} : \theta > \theta_0$ أو $H_1 = H_1^{-} : \theta < \theta_0$.

لقد رأينا في بعض الأمثلة الواردة سابقاً (الفصل الثاني) أن الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار الفرضية البسيطة H_0 ضد الفرضية البسيطة H_1 لا يعتمد على البديل H_1، وبالتالي يمكن اعتباره الاختبار الأقوى بانتظام وبحجم α لاختبار الفرضية البسيطة H_0 ضد الفرضية من جانب واحد H_1^{+} أو H_1^{-}.

فمثلا، بالعودة إلى المثال (1.2.2) نجد أن اختبار نيمان وبيرسون لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$ يعطى بمنطقة الرفض (5.2.2)، وهذه المنطقة لا تعتمد على البديل θ_1. وبالتالي اختبار نيمان وبيرسون (5.2.2) يعتبر أيضاً الاختبار الأقوى بانتظام وبحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^{+} : \theta > \theta_0$، ونرمز عندئذٍ لـ $G_{1\alpha}^{*}$ بـ $G_{1\alpha}^{*+}$ للدلالة على أن الفرضية البديلة H_1^{+}.

هكذا، الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار فرضية العدم H_0 ضد الفرضية البديلة H_1^{+} موافق لمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*+} = \left\{ x : \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq t_\alpha \right\} \quad , \quad \Phi(-t_\alpha) = \alpha \tag{1.2.3}$$

ودالة قوة هذا الاختبار:

$$W(G_{1\alpha}^{*+};\theta) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta - \theta_0) - t_\alpha\right) \quad ; \quad \theta \geq \theta_0 \tag{2.2.3}$$

نلاحظ من العلاقة (2.2.3) أن دالة قوة الاختبار (1.2.3) متزايدة في θ وتبلغ نهايتها الصغرى عند $\theta = \theta_0$ وتساوي حجم الاختبار $W(G_{1\alpha}^{*+};\theta_0) = \Phi(-t_\alpha) = \alpha$، أي أن $W(G_{1\alpha}^{*+};\theta) > \alpha ; \theta > \theta_0$، وهذا يعني أن الاختبار (1.2.3) غير متحيز.

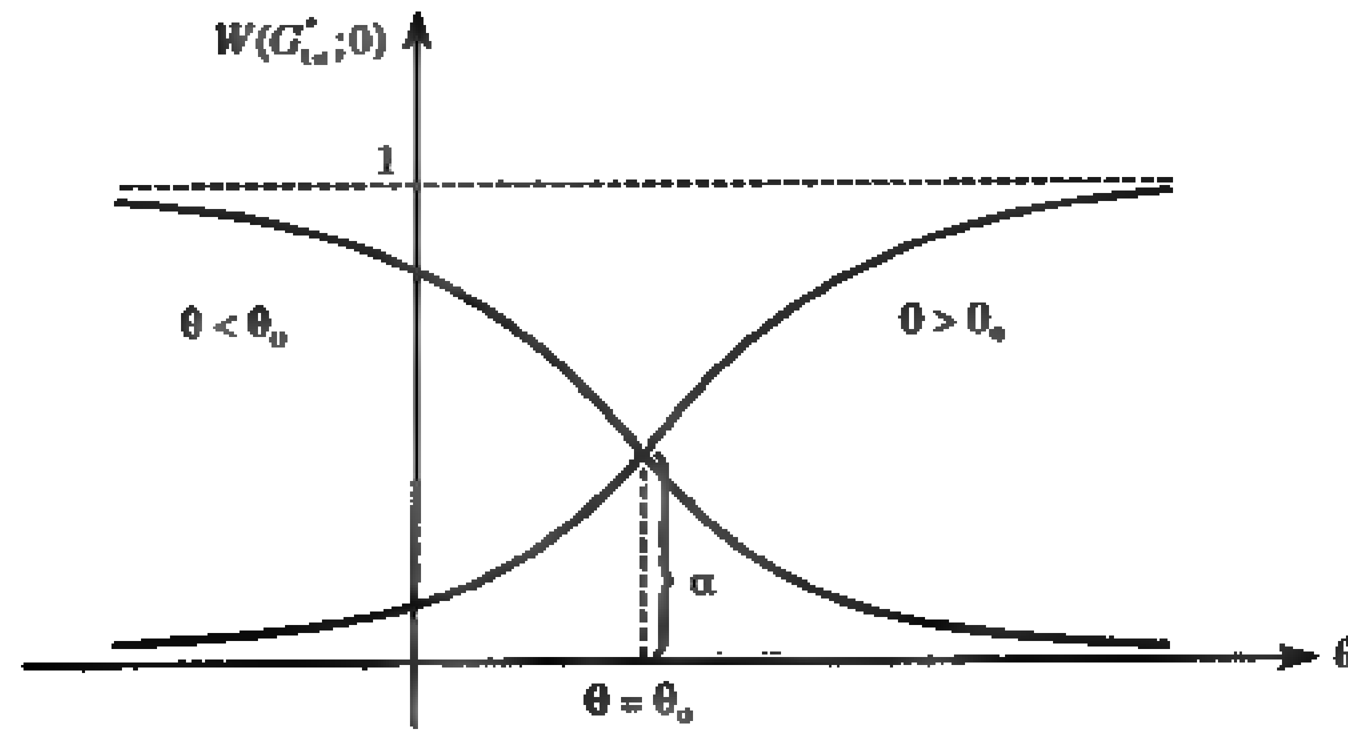
وبشكل مشابه نجد أن اختبار نيمان وبيرسون لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1^- : \theta = \theta_1 < \theta_0$ المعطى بمنطقة الرفض (8.2.2) لا يعتمد على البديل θ_1، ومن ثم يعتبر الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$، وإذا رمزنا لـ $G_{1\alpha}$ [المعرف بالعلاقة (8.2.2)] بـ $G_{1\alpha}^{*-}$ للإشارة إلى الفرضية البديلة H_1^-، فإن:

$$G_{1\alpha}^{*-} = \left\{ \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -t_\alpha \right\} \quad ; \quad \Phi(-t_\alpha) = \alpha \tag{3.2.3}$$

ودالة قوة الاختبار $G_{1\alpha}^{*-}$:

$$W(G_{1\alpha}^{*-};\theta) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_0 - \theta) - t_\alpha\right) \quad ; \quad \theta \leq \theta_0 \tag{4.2.3}$$

وهي دالة متناقصة في θ وتبلغ نهايتها الصغرى عند $\theta = \theta_0$ وتساوي حجم الاختبار $W(G_{1\alpha}^{*};\theta_0) = \Phi(-t_\alpha) = \alpha$، أي أن $W(G_{1\alpha}^{*};\theta) > \alpha ; \theta < \theta_0$، وهذا يعني أن الاختبار (3.2.3) غير متحيز. ويبدو ما سبق بوضوح على الشكل (1.2.3).



شكل (1.2.3)

إذا تمعنا في فئة البدائل كاملة، أي أن:

$$H_1 = H_1^{+} \cup H_1^{-} : \theta \neq \theta_0$$

فإن الاختبار الأقوى بانتظام لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ مقابل $H_1 : \theta \neq \theta_0$ غير موجود، لأنه دائماً واحد من الاختبارين (1.2.3) ، (3.2.3) أقوى من أي اختبار له نفس مستوى المعنوية α أو أقل [أنظر شكل (1.2.3)].

ويمكن الوصول إلى استنتاجات مشابهة بناءً على نتائج المثال (2.2.2) حيث وجدنا أن الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$ هو:

$$G_{1\alpha}^{*+} = \left\{ x : \sum_{1}^{n} x_i \leq \frac{1}{2\theta_0} \chi^2_{1-\alpha, 2n} \right\} \qquad (5.2.3)$$

ومنطقة الرفض هذه لا تعتمد على البديل θ_1، وبالتالي يعتبر هذا الاختبار الأقوى بانتظام وبحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ مقابل الفرضية البديلة $H_1^{+} : \theta > \theta_0$.

ورأينا أيضاً أن الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^{-} : \theta = \theta_1 < \theta_0$ يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*-} = \left\{ x : \sum_{1}^{n} x_i \geq \frac{1}{2\theta_0} \chi^2_{\alpha, 2n} \right\} \qquad (6.2.3)$$

وهذه المنطقة لا تعتمد على البديل θ_1، وعلى ذلك يعتبر هذا الاختبار الأقوى بانتظــــام وبحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ مقابل $H_1^- : \theta < \theta_0$.

تعريف 1.2.3: إحصاء نسبة المعقولية المضطرد

Monotone Likelihood-Ratio Statistic

يقال إن لعائلة من التوزيعات $F = \{F(x;\theta) ; \theta \in \Theta\}$، حيث Θ فــترة، إحصــاء نسبة معقولية مضطرداً، إذا وجد إحصاء $T = T(X_1,..., X_n)$ بحيث:

$$\Lambda(X) = \frac{L(X;\theta')}{L(X;\theta'')} = g(T) \qquad (7.2.3)$$

دالة مضطردة (غير متناقصة Non-decrease أو غير مــــتزايدة Non-increase) في T وذلك من أجل كل $\theta' < \theta''$ (أو $\theta' > \theta''$).

مثـال 1.2.3

إذا كانت $X = (X_1,..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} \quad ; \quad x > 0 \ , \ \theta > 0$$

فإن إحصاء نسبة المعقولية:

$$\Lambda(X) = \frac{L(X_1,..., X_n;\theta')}{L(X_1,..., X_n;\theta'')} = \left(\frac{\theta'}{\theta''}\right)^n \exp\left[-(\theta' - \theta'')\sum_1^n X_i\right] = g(T) \ ; \ \theta'' > \theta' > 0$$

دالة مضطردة (متزايدة) في الإحصاء $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$.

مثـال 2.2.3

إذا كانت $X = (X_1,..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} \quad , \quad 0 < x < \theta$$

فهل يوجد لهذا النموذج إحصاء نسبة معقولية مضطرد في إحصاء ما $T(X)$.

علما أن:

$$L(X;\theta)=\frac{1}{\theta^n} \quad ; \quad 0 \le \max X_i = X_{(n)} \le \theta$$

فإن:

$$\Lambda(X)=\begin{cases}(\theta''/\theta')^n & ; \quad 0 < X_{(n)} < \theta' \\ 0 & ; \quad \theta' \le X_{(n)} < \theta''\end{cases}$$

وهذا يعني كلما زادت θ' زادت $X_{(n)}$ وقلت قيمة $\Lambda(X)$، أي أن $\Lambda(X)$ دالة غير متزايدة (مضطردة) في الإحصاء $T(X)=X_{(n)}$.

لنصوغ الآن الشرط العام الكافي لوجود الاختبار الأقوى بانتظام وبحجم α لاختبار فرضية بسيطة ضد فرضية مركبة وحيدة الجانب. لتكن $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع ينتمي لعائلة التوزيعات $F=\{F(x;\theta);\theta\in\Theta\}$، حيث Θ فترة، ونريد اختبار فرضية العدم $H_0:\theta=\theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1=H_1^+:\theta>\theta_0$ أو $H_1=H_1^-:\theta<\theta_0$، عند مستوى معنوية محدد مسبقاً α. والمبرهنة التالية تبين هذا الشرط وتحدد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار H_0 ضد H_1.

مبرهنة 1.2.3

إذا كانت $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع ينتمي لعائلة التوزيعات المعلمية $F=\{F(x;\theta);\theta\in\Theta\subseteq R\}$ وكان لهذا النموذج إحصاء نسبة معقولية مضطرد في إحصاء $T=T(X)=T(X_1,...,X_n)$، فالاختبار الأقوى بانتظام وبحجم α موجود لاختبار فرضية العدم $H_0:\theta=\theta_0$ ضد الفرضية وحيدة الجانب H_1 (H_1^+ أو H_1^-) وينطبق على اختبار نيمان وبيرسون بحجم α لاختبار الفرضية $H_0:\theta=\theta_0$ ضد بديل معين θ_1 من H_1.

الإثبات

بما أن، حسب الفرض، إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda(X)$ دالة مضطردة في T ونرمز لها بـ $g(T) = g(T(X))$، فإن:

$$\Lambda(X) = g(T)$$

هنا نميز حالتين:

1. $g(T)$ دالة غير متناقصة (Non-decreasing) في T.
2. $g(T)$ دالة غير متزايدة (Non-increasing) في T.

سنقتصر إثبات هذه المبرهنة على حالة اختبار فرضية عدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 = H_1^+ : \theta > \theta_0$. وبشكل مشابه يمكن إثبات صحة المبرهنة عندما $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 = H_1^- : \theta < \theta_0$.

الحالة الأولى: $g(T)$ دالة غير متناقصة (متزايدة أو ثابتة) في T.

كما نعلم، حسب مبدأ نيمان وبيرسون، إن الاختبار الأقوى وبحجم α لاختبار فرضية عدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد بديل معين $\theta_1 > \theta_0$ يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^* = \{x : \lambda(x) \le c_\alpha\} \qquad (8.2.3)$$

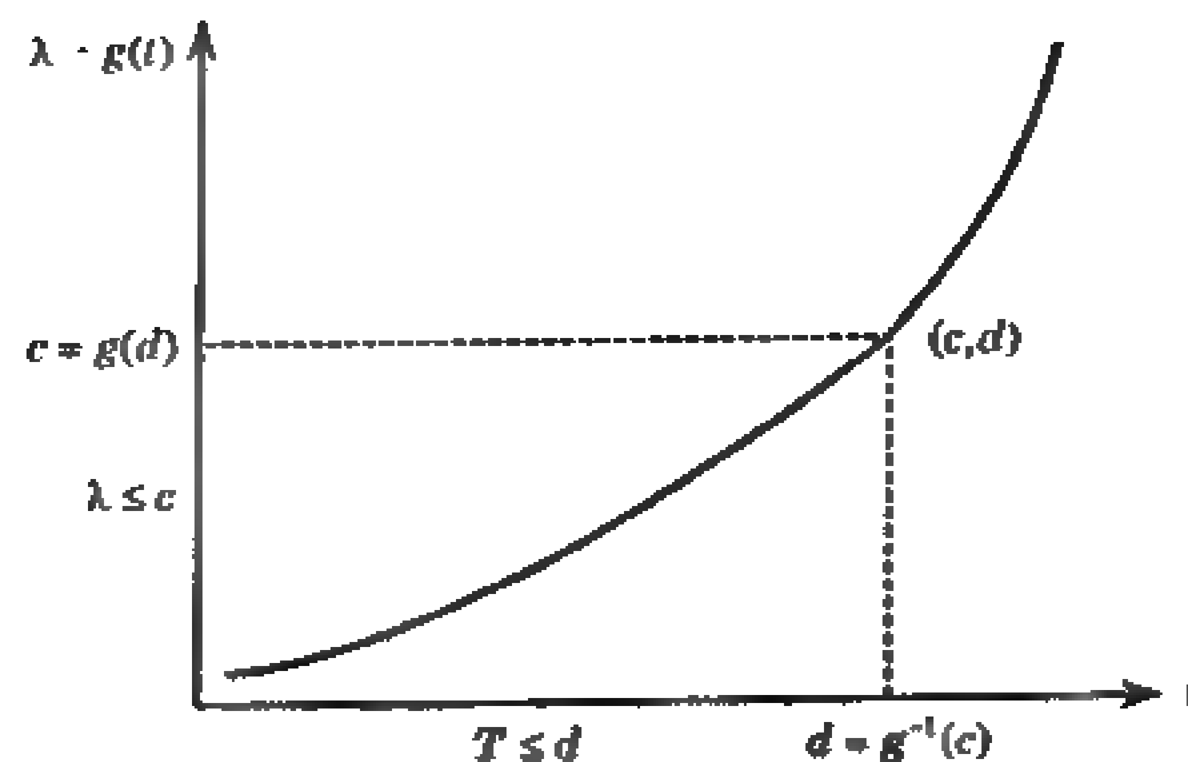
حيث إن c_α تحقق المساواة:

$$P_{\theta_0}\left(\Lambda(X) \le c_\alpha\right) = \alpha \qquad (9.2.3)$$

وبما أن النموذج المقترح F له إحصاء نسبة معقولية غير متناقص (حسب الفرض) في إحصاء $T = T(X)$، فإن:

$$\Lambda(X) = g(T) \le c \iff T(X) \le g^{-1}(c) = d$$

وتبدو العلاقة بين المتباينتين المتكافئتين $\lambda(x) \le c$ و $T(x) \le d$ بوضوح على الشكل (2.2.3).



شكل (2.2.3)

وعلى ذلك فالاختبار (8.2.3) بدلالة الإحصاء $T(X)$ يكتب:

$$G_{1\alpha}^{*} = \{x : t = T(x) \le d_\alpha\} \qquad (10.2.3)$$

حيث إن d_α تحقق المساواة:

$$P_{\theta_0}\left(\Lambda(X) \le c_\alpha\right) = P_{\theta_0}\left(T(X) \le d_\alpha\right) = \alpha$$

وبما أن الاختبار الموافق لمنطقة الرفض (10.2.3) لا يعتمد على البديل $\theta_1 > \theta_0$، فيعتبر الاختبار الأقوى بانتظام وبحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^{+} : \theta > \theta_0$. وإذا رمزنا بـ d_α^{+} و $G_{1\alpha}^{*+}$ لـ d_α و $G_{1\alpha}^{*}$ على الترتيب، حيث تشير الإشارة (+) إلى أن الفرضية البديلة وحيدة الجانب من اليمين H_1^{+}، فيكتب الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار H_0 ضد H_1^{+} على النحو الآتي:

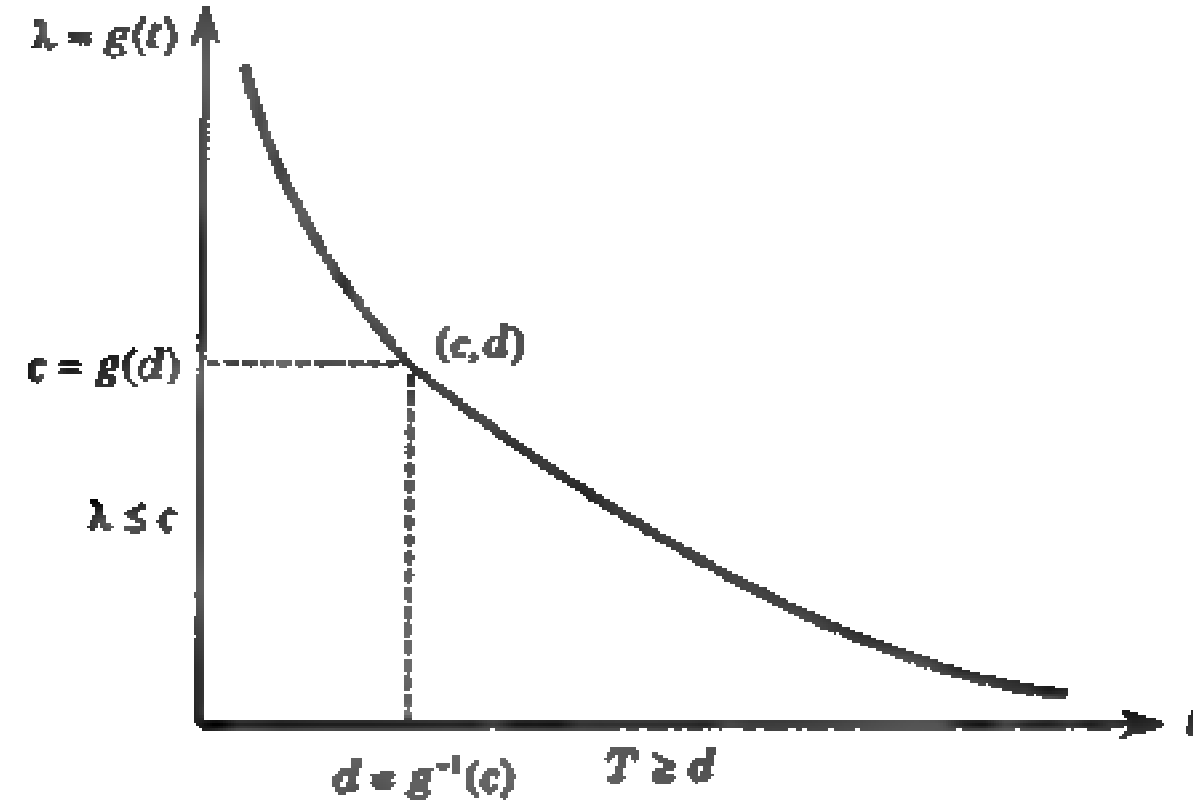
$$G_{1\alpha}^{*+} = \{x : t = T(x) \le d_\alpha^{+}\} \qquad (11.2.3)$$

الحالة الثانية: $g(T)$ دالة غير متزايدة (متناقصة أو ثابتة) في T.

بما أن $\Lambda(X) = g(T)$ دالة غير متزايدة في T، فإن:

$$\Lambda(X) = g(T) \le c \quad \Leftrightarrow \quad T \ge g^{-1}(c) = d$$

أي أن المتباينة $T(X) \geq d$ مكافئة للمتباينة $\Lambda(X) \leq c$، ويبدو ذلك بوضوح على الشكل (3.2.3).



شكل (3.2.3)

وعلى ذلك يمكن كتابة منطقة الرفض (8.2.3) بدلالة الإحصاء T على الصورة:

$$G_{1\alpha}^{*} = \{x : t = T(x) \geq d_{\alpha}\} \tag{12.2.3}$$

حيث إن d_{α} تحقق العلاقة:

$$P_{\theta_0}\left(\Lambda(X) \leq c_{\alpha}\right) = P_{\theta_0}\left(T(X) \geq d_{\alpha}\right) = \alpha$$

وبما أن منطقة الرفض (12.2.3) لا تعتمد على البديل θ_1، فتعتبر منطقة الرفض الموافقة للاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار H_0 ضد الفرضية البديلة $H_1^{+} : \theta > \theta_0$. وإذا استخدمنا الرمزين d_{α}^{+} و $G_{1\alpha}^{*+}$ فإن:

$$\begin{aligned} G_{1\alpha}^{*+} &= \{x : t = T(x) \geq d_{\alpha}^{+}\} \\ P_{\theta_0}\left(T(X) \geq d_{\alpha}^{+}\right) &= \alpha \end{aligned} \tag{13.2.3}$$

بشكل مشابه يمكن إثبات أن الاختبار الأقوى بانتظام وبحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^{-} : \theta < \theta_0$ موجود ويعطى بمنطقة الرفض:

$$G^{*-}_{1\alpha} = \{x : t = T(x) \le d^-_\alpha\} \quad ; \quad P_{\theta_0}\left(T(X) \le d^-_\alpha\right) = \alpha \qquad (14.2.3)$$

عندما تكون $\Lambda(X) = g(T)$ دالة غير متناقصة في T. بينما يعطى بمنطقة الرفض:

$$G^{*-}_{1\alpha} = \{x : t = T(x) \ge d^-_\alpha\} \quad ; \quad P_{\theta_0}\left(T(X) \ge d^-_\alpha\right) = \alpha \qquad (15.2.3)$$

عندما تكون $\Lambda(X) = g(T)$ دالة غير متزايدة في T.

تصادفنا في التطبيقات الإحصائية نماذج إحصائية كثيرة لها إحصاء نسبة معقولية مضطرد في إحصاء $T(X)$، ومنها على الخصوص عائلة النماذج الأسية. رأينا عند دراسة النماذج الأسية [راجع بند (I-4.4)] بأن شكلها العام:

$$f(x;\theta) = \exp[A(\theta)B(x) + C(\theta) + D(x)]$$

حيث إن $f(x;\theta)$ دالة كثافة أو دالة احتمال المتغير العشوائي الملاحظ ξ. وأن لكل نموذج أسي إحصاءً كافياً:

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} B(X_i)$$

وحسب تعريف الإحصاء الكافي [راجع بند (I-2.4)]:

$$L(X;\theta) = g^*(T(X);\theta)h(X)$$

وعليه إحصاء نسبة المعقولية:

$$\Lambda(X) = \frac{L(X;\theta')}{L(X;\theta'')} = \frac{g^*(T;\theta')h(X)}{g^*(T;\theta'')h(X)} = g(T)$$

دالة في الإحصاء الكافي T، ومن ثم إذا كانت الدالة $A(\theta)$ متزايدة أو متناقصة في θ، فإن إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda(X)$ دالة مضطردة في الإحصاء الكافي $T(X) = \sum_{1}^{n} B(X_i)$. وبالتالي حسب المبرهنة (1.2.3) فالاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد H_1 (H_1^+ أو H_1^-) موجود دائماً. ولأهمية النماذج الأسية في التطبيقات الإحصائية سندرس هذه الحالة بشيء من التفصيل من خلال

المثال العام الآتي.

مثـال 1.2.3

إذا كانت $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع $\mathcal{L}(\xi) \in F$، حيـث إن F عائلة النماذج الأسية بمعلمة وحيدة البعد θ (θ فترة)، فأوجد الاختبار الأقوى بانتظـــام بحجم α في الحالتين:

1. $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$.
2. $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$.

بما أن:

$$f(x;\theta) = \exp[A(\theta)B(x) + C(\theta) + D(x)]$$

و $T(X) = \sum_1^n B(X_i)$ إحصاء كافي للمعلمة θ، فإن إحصاء نسبة المعقولية:

$$\Lambda(X) = \frac{L(X;\theta_0)}{L(X;\theta_1)} = \exp\{[A(\theta_0) - A(\theta_1)]T(X) - n[C(\theta_0) - C(\theta_1)]\} = g(T)$$

دالة في الإحصاء الكافي $T(X)$، حيث θ_1 بديل ما من H_1 (H_1^+ أو H_1^-). وهنا نميـز الحالتين:

الحالة الأولى: $A(\theta)$ دالة متزايدة في θ، وبالتالي $\Lambda(X) = g(T)$ دالة مضطردة في T، وعلى ذلك:

1. إذا كانت $H_1 = H_1^+ : \theta > \theta_0$، فإن إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda = g(T)$ دالة غـــير متزايدة في T، لأن $(A(\theta_0) - A(\theta_1)) < 0 ; \theta_1 > \theta_0$، وبالتالي حســـب المبرهنـــة (1.2.3) فالاختبار الأقوى بانتظام بحجم α موجود ويعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*+} = \{x : T(x) \geq d_\alpha^+\} \quad ; \quad P_{\theta_0}(T(X) \geq d_\alpha^+) = \alpha$$

2. إذا كانت $H_1 = H_1^- : \theta < \theta_0$، فإن إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda = g(T)$ دالة غـــير متناقصة في T، لأن $(A(\theta_0) - A(\theta_1)) > 0 ; \theta_1 < \theta_0$، وبالتالي حسب المبرهنـــة

(1.2.3) فالاختبار الأقوى بانتظام بحجم α موجود ويعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*-} = \{x : T(x) \le d_\alpha^-\} \quad ; \quad P_{\theta_0}\left(T(X) < d_\alpha\right) = \alpha$$

الحالة الثانية: $A(\theta)$ دالة متناقصة في θ، وهذا يعني $\Lambda = g(T)$ دالة مضطـــردة في T، وعلى ذلك:

1. إذا كانت $H_1^+ : \theta > \theta_0$، فإن إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda = g(T)$ دالة غير متناقصة في T، لأن $\left(A(\theta_0) - A(\theta_1)\right) > 0 \, ; \theta_1 > \theta_0$، وبالتـــالي الاختبار الأقوى بانتظـــام بحجم α موجود [حسب المبرهنة (1.2.3)] ويعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*+} = \{x : T(x) \le d_\alpha^+\} \quad ; \quad P_{\theta_0}\left(T(X) \le d_\alpha^+\right) = \alpha$$

2. إذا كانت $H_1^- : \theta < \theta_0$، فإن إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda = g(T)$ دالة غير مـــتزايدة في T، لأن $\left(A(\theta_0) - A(\theta_1)\right) < 0 \, ; \theta_1 < \theta_0$، ومن ثم فالاختبار الأقوى بانتظــــام بحجم α موجود [حسب المبرهنة (1.2.3)] ويعطى بمنطقة الرفض:

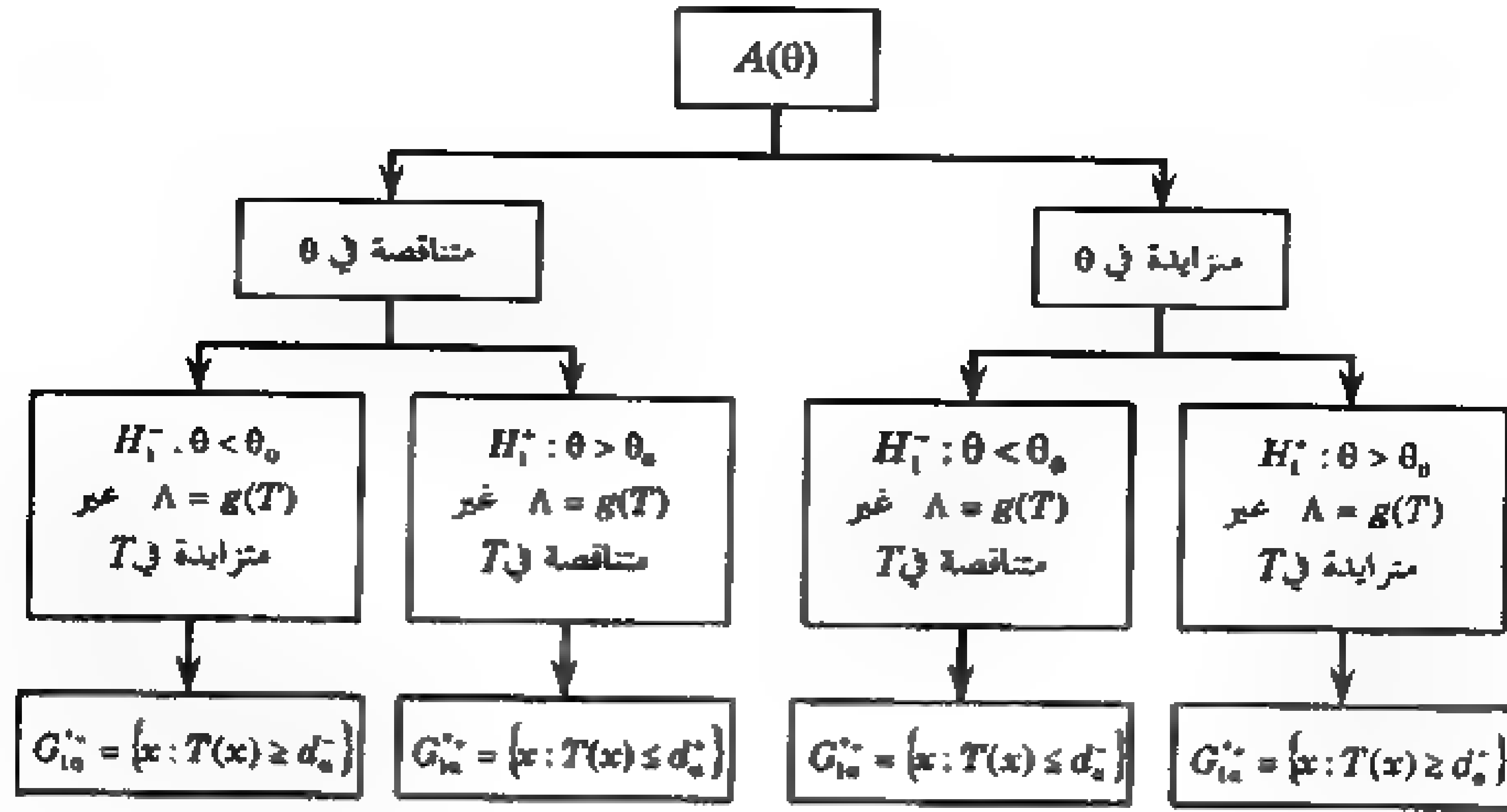
$$G_{1\alpha}^{*-} = \{x : T(x) \ge d_\alpha^-\} \quad ; \quad P_{\theta_0}\left(T(X) \ge d_\alpha^-\right) = \alpha$$

يمكن إيضاح ما سبق من خلال المخطط التالي (شكل 4.2.3). وفي حالة نمـــوذج أسي منقطع فالحد الحرج d يتعين كما بينا في المثال (1.3.2).

مثـال 2.2.3 (النموذج الطبيعي II، الاختبار الأقوى بانتظام من أجل فرضية بديلة وحيدة الجانب)

لتكن $X = (X_1, \ldots, X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع $\mathcal{L}(\xi) \in N(\mu, \theta^2)$، ونريـــد اختبار فرضية بسيطة $H_0 : \theta^2 = \theta_0^2$ حول التباين غير المعلوم، عند مستوى معنويـــة α، ضد الفرضية البديلة وحيدة الجانب:

1. $H_1^+ : \theta^2 > \theta_0^2$.
2. $H_1^- : \theta^2 < \theta_0^2$.



شكل (4.2.3)

بما أن النموذج الطبيعي $N(\mu,\theta^2)$ عضو في أسرة النماذج الأسية، فيمكن كتابة دالة كثافته على الصورة:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\theta}\right)^2} = \exp\left[-\frac{1}{2\theta^2}(x-\mu)^2 - \ln\theta - \frac{1}{2}\ln 2\pi\right]$$

وبمقارنتها بالشكل العام لصيغة النموذج الأسي نجد:

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} B(X_i) = \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \quad , \quad A(\theta) = -\frac{1}{2\theta^2}$$

وحيث أن الدالة $A(\theta) = -\frac{1}{2\theta^2}$ متزايدة في θ، فإن إحصاء نسبة المعقولية:

$$\Lambda(X) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\theta_0^2} - \frac{1}{\theta_1^2}\right)T(X) - \ln\frac{\theta_0}{\theta_1}\right] = g(T)$$

دالة مصطردة في الإحصاء الكافي $T(X)$. وعلى ذلك وحسب المبرهنة (1.2.3) نجد أن الاختبار الأقوى بانتظام وبحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية

البديلة المركبة وحيدة الجانب H_1 (H_1^+ أو H_1^-) موجود:

1. إذا كانت الفرضية البديلة $H_1^+ : \theta^2 > \theta_0^2$، فإن $\Lambda(X) = g(T)$ دالـــة غـــير متزايدة في T، وبالتالي الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*+} = \{x : T(x) \geq d\}$$

ويتحدد الثابت d من العلاقة:

$$P_{\theta_0}\big(T(X) \geq d\big) = \alpha$$

وهذا يتطلب معرفة توزيع إحصاء الاختبار $T(X) = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ أو توزيع دالة مـــا مضطردة في T، عند صحة الفرضية $H_0 : \theta^2 = \theta_0^2$.

بما أن $\mathcal{L}\left(\frac{X_i - \mu}{\theta}\right) = N(0,1)$، فحسب المبرهنتين (6.3.2-I) و (7.3.2-I):

$$\mathcal{L}_\theta\left(\frac{X_i - \mu}{\theta}\right)^2 = \chi^2_{(1)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}_\theta\left(\frac{T}{\theta^2}\right) = \chi^2_{(n)}$$

وعلى ذلك:

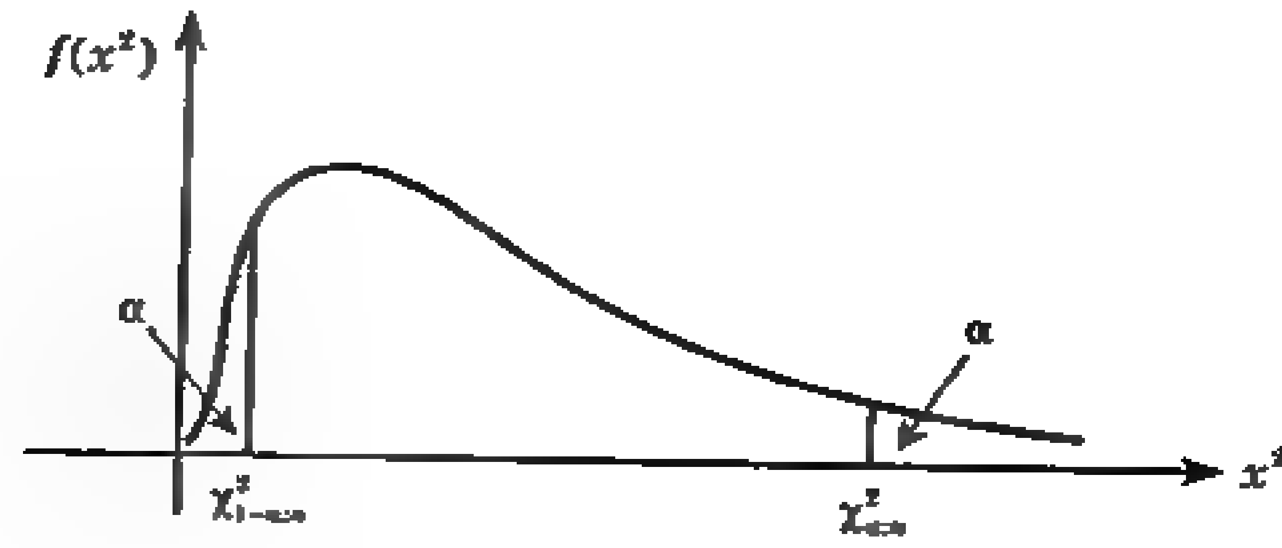
$$P_{\theta_0}\big(T(X) \geq d\big) = P_{\theta_0}\left(\frac{T(X)}{\theta_0^2} \geq \frac{d}{\theta_0^2}\right) = \alpha$$

وبـــاستخدام جدول توزيع χ^2 بـــ n درجة حرية ومستوى معنوية معطـــاة $0 < \alpha < 1$ (الملحق، جدول 4) نجد:

$$\frac{d_\alpha^+}{\theta_0^2} = \chi^2_{\alpha,n} \quad \Rightarrow \quad d_\alpha^+ = \theta_0^2\chi^2_{\alpha;n}$$

وتصبح منطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*+} = \left\{x : T(x) \geq \theta_0^2\chi^2_{\alpha;n}\right\} \tag{16.2.3}$$



شكل (5.2.3)

ودالة قوة الاختبار $G^{*+}_{1\alpha}$:

$$W(G^{*}_{1\alpha};\theta)=P_\theta\left(T(X)\ge\theta_0^2\chi^2_{\alpha,n}\right)=P_\theta\left(\frac{T(X)}{\theta^2}\ge\frac{\theta_0^2}{\theta^2}\chi^2_{\alpha,n}\right)$$

$$=1-F_{\chi^2_{(n)}}\left(\frac{\theta_0^2}{\theta^2}\chi^2_{\alpha,n}\right)\quad;\quad\theta^2\ge\theta_0^2\qquad(17.2.3)$$

إن دالة قوة الاختبار $W(G^{*}_{1\alpha};\theta)$ متزايدة في θ وتبلغ نمايتها الصغرى عند $\theta=\theta_0$ وتساوي α.

2. إذا كانت الفرضية البديلة $H_1^-:\theta^2<\theta_0^2$، فإن $\Lambda(X)=g(T)$ دالة غير متناقصة في T، وبالتالي الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α يعطى بمنطقة الرفض:

$$G^{*+}_{1\alpha}=\{x:T(x)\le d\}$$

ويتحدد d من العلاقة:

$$P_{\theta_0}\left(T(X)\le d\right)=P_{\theta_0}\left(\frac{T(X)}{\theta_0^2}\le\frac{d}{\theta_0^2}\right)=\alpha$$

ومن جدول توزيع $\chi^2_{(n)}$ وعند مستوى معنوية α (احتمال α) نجد:

$$\frac{d_\alpha^-}{\theta_0^2}=\chi^2_{1-\alpha;n}\quad\Rightarrow\quad d_\alpha^-=\theta_0^2\chi^2_{1-\alpha,n}$$

[أنظر الشكل (5.2.3)]، أي أن:

$$G_{1\alpha}^{*-} = \left\{x : T(x) \le \theta_0^2 \chi_{1-\alpha;n}^2\right\} \quad (18.2.3)$$

ودالة قوة هذا الاختبار:

$$W(G_{1\alpha}^{*};\theta) = P_\theta\left(T(X) \le \theta_0^2 \chi_{1-\alpha;n}^2\right) = P_\theta\left(\frac{T(X)}{\theta^2} \le \frac{\theta_0^2}{\theta^2} \chi_{1-\alpha;n}^2\right)$$

$$= F_{\chi^2_{(n)}}\left(\frac{\theta_0^2}{\theta^2} \chi_{1-\alpha;n}^2\right) \quad ; \quad \theta^2 \le \theta_0^2 \quad (19.2.3)$$

وهي دالة متناقصة في θ وتبلغ نهايتها الصغرى عند $\theta = \theta_0$ وتساوي α.

نلاحظ مما سبق أن كلا الاختبارين غير متحيز، بالإضافة إلى أن دالة القوة $W(G_{1\alpha}^{*};\theta)$ متزايدة عندما $\theta \ge \theta_0$ ومتناقصة عندما $\theta \le \theta_0$.

مثال 3.2.3: (نموذج $\Gamma(1,\theta)$، الاختبار الأقوى بانتظام من أجل فرضية وحيدة الجانب)

إذا كانت $X = (X_1,\ldots,X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع $\Gamma(1,\theta)$، فأوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة:

1. $H_1^+ : \theta > \theta_0$.
2. $H_1^- : \theta < \theta_0$.

بما أن نموذج $\Gamma(1,\theta)$ عضو في عائلة النماذج الأسية، فيمكن كتابة دالة كثافته على الصورة:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} = \exp\left(-\frac{1}{\theta}x - \ln\theta\right)$$

وبمقارنتها بالصورة العامة لدالة كثافة النموذج الأسي نجد:

$$T(X) = \sum_{i=1}^{n} B(X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad A(\theta) = -\frac{1}{\theta}$$

وبملاحظة أن الدالة $A(\theta) = -\frac{1}{\theta}$ متزايدة في θ، فإن إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda(X) = g(T)$ دالـــة مضطردة في الإحصاء الكافي T، وعلى ذلك وحسب المبرهنة (1.2.3) فالاختبـــار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفـــرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ مقابل الفرضية البديلة المركبـــة وحيدة الجانب H_1 (H_1^+ أو H_1^-) موجود:

1. إذا كانت الفرضية البديلة $H_1^+ : \theta > \theta_0$، فإن $\Lambda = g(T)$ دالة غير متزايدة في T، وبالتالي الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*+} = \{x : T(x) \geq d\}$$

ويتحدد الثابت d من العلاقة:

$$P_{\theta_0}(T(X) \geq d) = \alpha$$

وهذا يتطلب معرفة توزيع إحصاء الاختبار $T(X) = \sum_1^n X_i$ أو توزيع دالة مضطـــردة في T، عند صحة الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$.

بـــما أن تـــوزيع $\mathcal{L}_\theta(X_i) = \Gamma(1,\theta)$، فـــإن $\mathcal{L}_\theta(2X_i/\theta) = \chi^2_{(2)}$ [انظر العلاقـــة (30.3.2-I)]، وحسب المبرهنة (6.3.2-I) نجد أن $\mathcal{L}_\theta(2T(X)/\theta) = \chi^2_{(2n)}$، وبالتالي:

$$P_{\theta_0}(T(X) \geq d) = P_{\theta_0}\left(\frac{2T(X)}{\theta_0} \geq \frac{2d}{\theta_0}\right) = \alpha$$

وباستخدام جدول توزيع χ^2 بـــ $2n$ درجة حرية ومستوى معنوية تساوي α (الملحـــق، جدول 4)، نجد:

$$\frac{2d_\alpha^*}{\theta_0} = \chi^2_{\alpha;2n} \Rightarrow d_\alpha^* = \frac{1}{2}\theta_0\chi^2_{\alpha;2n}$$

وعلى ذلك:

$$G_{1\alpha}^{*+} = \left\{x : T(x) \geq \frac{1}{2}\theta_0\chi^2_{\alpha;2n}\right\} \qquad (20.2.3)$$

ودالة قوة الاختبار:

$$W(G_{1\alpha}^{*+};\theta)=P_\theta\left(T(X)\geq\frac{1}{2}\theta_0\chi^2_{\alpha;2n}\right)=P_\theta\left(\frac{2T(X)}{\theta}\geq\frac{\theta_0}{\theta}\chi^2_{\alpha;2n}\right)$$

$$=1-F_{\chi^2_{(2n)}}\left(\frac{\theta_0}{\theta}\chi^2_{\alpha;2n}\right)\quad;\quad\theta\geq\theta_0 \qquad (21.2.3)$$

وهذه الدالة متزايدة في θ وتبلغ نهايتها الصغرى عند $\theta=\theta_0$ وتساوي α.

2. وبشكل مشابه إذا كانت الفرضية البديلة $H_1^-:\theta<\theta_0$، فإن إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda=g(T)$ دالة غير متناقصة في T، وبالتالي الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*-}=\{x:T(x)\leq d\}$$

ويتعين الحد الحرج d من العلاقة:

$$P_{\theta_0}(T(X)\leq d)=P_{\theta_0}\left(\frac{2T(X)}{\theta_0}\leq\frac{2d}{\theta_0}\right)=\alpha$$

باستخدام جدول توزيع χ^2 بـ $2n$ درجة حرية واحتمال α نجد:

$$\frac{2d_\alpha^-}{\theta_0}=\chi^2_{1-\alpha;2n}\quad\Rightarrow\quad d_\alpha^-=\frac{1}{2}\theta_0\chi^2_{1-\alpha;2n}$$

وتصبح منطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*-}=\left\{x:T(x)\leq\frac{1}{2}\theta_0\chi^2_{1-\alpha;2n}\right\} \qquad (22.2.3)$$

ودالة قوة هذا الاختبار:

$$W(G_{1\alpha}^{*-};\theta)=P_\theta\left(T(X)\leq\frac{1}{2}\theta_0\chi^2_{1-\alpha;2n}\right)=P_\theta\left(\frac{2T(X)}{\theta}\leq\frac{\theta_0}{\theta}\chi^2_{1-\alpha;2n}\right)$$

$$=F_{\chi^2_{(2n)}}\left(\frac{\theta_0}{\theta}\chi^2_{1-\alpha;2n}\right)\quad;\quad\theta\leq\theta_0 \qquad (23.2.3)$$

وهي دالة متناقصة في θ وتبلغ نهايتها الصغرى عند $\theta = \theta_0$ وتساوي α.

مثـال 4.2.3:

إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع $\mathcal{L}(\theta) \in R(0,\theta)$، ونريـد اختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$، عند مستوى معنوية α، فهل يوجـد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α؟ وإن وجد ما هو؟

كما نعلم [راجع المثال (11.2.4-I)] أن:

$$L(x;\theta) = \frac{1}{\theta^n} \quad , \quad 0 < x_i \leq \theta \ ; \ i = 1,2,...,n$$

وإذا رمزنا بـ $x_{(n)} = \max_i x_i$، فيمكننا كتابة $L(x;\theta)$ كدالة في θ على النحـو الآتي:

$$L(x;\theta) = \frac{1}{\theta^n} \quad , \quad \theta \geq x_{(n)}$$

أو على الشكل:

$$L(x;\theta) = \frac{e\left(\theta - x_{(n)}\right)}{\theta^n}$$

حيث $e(x)$ دالة خوفسيد. ورأينا أن $T = X_{(n)}$ إحصاء كافٍ للمعلمة θ، وعلى ذلـك فإن:

$$\Lambda(X) = \frac{L(X;\theta_0)}{L(X;\theta_1)} = \frac{e(\theta_0 - T(X))}{e(\theta_1 - T(X))}\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n = g(T) \quad ; \quad \theta_1 > \theta_0 \geq X_{(n)} = T$$

وهي دالة غير متزايدة في الإحصـاء الكـافي $T(X) = X_{(n)}$ (كلمـا زادت θ_0 زادت $T = X_{(n)}$ وقلت النسبة Λ). أي أن التوزيع المنتظم $R(0,\theta)$ له إحصاء نسبة معقوليـة مضطرد في T، وبالتالي حسب المبرهنة (1.2.3) فالاختبار الأقوى بانتظـام وبحجـم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$ موجود ويعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*+} = \{x : T(x) = x_{(n)} \geq c\}$$

حيث تتحدد قيمة c من العلاقة:

$$P_{\theta_0}(T(X) \geq c) = \alpha$$

وهــذا يتطلب معرفة توزيع إحصاء الاختبار $T(X) = X_{(n)}$، عند صحة الفرضيــة H_0. وكما نعلم أن دالة كثافة $T = X_{(n)}$ [انظر العلاقة (5.10.3-I)]:

$$f(t;\theta) = \frac{n}{\theta^n} t^{n-1} \quad ; \quad 0 < t \leq \theta$$

وعلى ذلك:

$$P_{\theta_0}(T(X) \geq c) = \frac{n}{\theta_0^n}\int_c^{\theta_0} t^{n-1}dt = \alpha \;\Rightarrow\; 1 - \left(\frac{c}{\theta_0}\right)^n = \alpha \;\Rightarrow\; c_\alpha^+ = \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}$$

ومنطقة رفض الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α:

$$G_{1\alpha}^{*+} = \left\{x : x_{(n)} \geq \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}\right\} \qquad (24.2.3)$$

ودالة قوة هذا الاختبار:

$$\begin{aligned} W(G_{1\alpha}^{*+};\theta) &= P_\theta\left(T(X) \geq \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}\right) \\ &= \frac{n}{\theta^n}\int_{\theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}}^{\theta} t^{n-1}dt = 1-(1-\alpha)\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \quad ; \quad \theta \geq \theta_0 \end{aligned} \qquad (25.2.3)$$

وهي دالة متزايدة في θ وتبلغ نهايتها الصغرى عند $\theta = \theta_0$ وتساوي α.

وبإجراء مناقشة مشابهة في حالة اختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$، نجــد أن $\Lambda = g(T)$ دالة غير متناقصة في T والاختبــار الأقوى بانتظام بحجم α يعطى بمنطقــة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*-} = \left\{x : x_{(n)} \leq \theta_0 \sqrt[n]{1-\alpha}\right\} \qquad (26.2.3)$$

وقوة هذا الاختبار:

$$W(G_{1\alpha}^{*-};\theta)=\alpha\left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^n \quad ; \quad \theta\le\theta_0 \qquad (27.2.3)$$

وهي دالة متناقصة في θ وتبلغ نهايتها الصغرى عند $\theta=\theta_0$ وتساوي α.

مثـال 5.2.3

إذا كـانت $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع بيرنولي $B(1,\theta)$، ونريـد اختبار فرضية العدم $H_0:\theta=\theta_0$ ضد فرضية وحيدة الجانب H_1 (H_1^+ أو H_1^-) عنـد مستوى معنوية α، فهل يوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α؟ وإن وجد فما هو؟

بما أن:

$$f(x;\theta)=C_x^1\theta^x(1-\theta)^{1-x} \quad ; \quad x=0,1$$

ويمكن كتابتها على الصورة:

$$f(x;\theta)=\exp\left[x\ln\frac{\theta}{1-\theta}+\ln(1-\theta)+\ln C_x^1\right]$$

وهذا يعني أن النموذج $B(1,\theta)$ عنصر من عائلة النماذج الأسية. حيث:

$$T(X)=\sum_{i=1}^n B(X_i)=\sum_{i=1}^n X_i=r(X) \quad , \quad A(\theta)=\ln\frac{\theta}{1-\theta}$$

نلاحظ أن الـدالة المعلمية $A(\theta)$ متـزايدة في θ، وبالتالي إحصاء نسبة المعقوليـة $\Lambda=g(T=r(X))$ دالة مضطردة في $r(X)$. وعلى ذلك، وحسب المبرهنة (1.2.3) إن الاختبار الأقوى بانتظام وبحجم α لاختبار الفرضية $H_0:\theta=\theta_0$ مقابل الفرضية وحيـدة الجانب H_1 موجود. وهنا نميز حالتين:

1. إذا كانت $H_1=H_1^-:\theta<\theta_0$، فإن $\Lambda=g(r)$ دالة غير متناقصة في r، وهـذا يعني الاختبار الأقوى بانتظام وبحجم α يعطى بمنطقة الرفض (13.3.2) أو بدالـة الرفض (15.3.2) [الحالة الأولى في المثال (1.3.2)].

2. إذا كانت $H_1 = H_1^* : \theta > \theta_0$، فإن $\Lambda = g(r)$ دالة غير متزايدة في r، وبالتالي الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α يعطى بمنطقة الرفض (19.3.2) أو بدالة الرفض (20.3.2) [الحالة الثانية في المثال (1.3.2)].

مثال 6.2.3

إذا كانت $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta_2} e^{-(x-\theta_1)/\theta_2} \quad , \quad x \geq \theta_1$$

أي أن:

$$\theta = \{\theta = (\theta_1, \theta_2) : -\infty < \theta_1 < \infty , \theta_2 > 0\}$$

ونريد اختبار فرضية العدم البسيطة $H_0 : \theta = \theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20})$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta_1 < \theta_{10} , \theta_2 < \theta_{20}$، حيث يشير الدليل الثاني (0) إلى القيمة التي حددتها الفرضية H_0 للمعلمة $\theta = (\theta_1, \theta_2)$، فأوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α.

نطبق المبدأ العام لبناء الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار فرضية عدم بسيطة H_0 مقابل فرضية بديلة وحيدة الجانب H_1، وذلك بأخذ بديل معين $\theta_1 = (\theta_{11}, \theta_{21})$ من H_1 وبناء اختبار نيمان وبيرسون بحجم α لاختبار H_0 ضد هذا البديل.

بما أن:

$$\lambda(x) = \frac{L(x;\theta_0)}{L(x;\theta_1)} =$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{\theta_{21}}{\theta_{20}}\right)^n \exp\left\{n\left(\dfrac{1}{\theta_{21}} - \dfrac{1}{\theta_{20}}\right)\bar{x} + n\left(\dfrac{\theta_{10}}{\theta_{20}} - \dfrac{\theta_{11}}{\theta_{21}}\right)\right\} & ; \quad x_{(1)} = \min\limits_{1 \leq i \leq n} x_i \geq \theta_{10} \\ 0 & ; \quad x_{(1)} < \theta_{10} \end{cases}$$

يلاحظ أن إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda(X) = g(T = \overline{X})$ دالة غير متناقصة في الإحصاء الكافي $T(X) = \overline{X}$، لأن $\theta_{21} < \theta_{20}$. وحسب مبرهنة نيمان وبيرسون فالاختبار الأقوى بحجم α لاختبار H_0 ضد بديل معين θ_1 يعطى بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_{1\alpha}^{*} = \{x : \lambda(x) \le c\}$$

لكن المتباينة $\lambda(x) \le c$ مكافئة للمتباينة:

$$\{x_{(1)} < \theta_{10}\} \cup \{\overline{x} \le d \,, x_{(1)} \ge \theta_{10}\}$$

وحيث احتمال الحادث $\{X_{(1)} \ge \theta_{10}\}$، عند صحة الفرضية H_0، يساوي 1، فإن قيمة الثابت d تتحدد من العلاقة:

$$P_{\theta_0}(\overline{X} \le d_\alpha) = \alpha$$

هكذا نحصل على اختبار نيمان وبيرسون معطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*} = \{x : x_{(1)} < \theta_{10} \text{ or } \overline{x} \le d_\alpha\}$$

وبما أن منطقة الرفض $G_{1\alpha}^{*}$ لا تعتمد على البديل $\theta_1 = (\theta_{11}, \theta_{21})$، فإنه يعتبر الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20})$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta_1 < \theta_{10} \,, \theta_2 < \theta_{20}$.

3.3 الاختبار الأقوى بانتظام لاختبار فرضيتين وحيدتي الجانب

سنبحث في هذا البند اختبار الفرضيات من الشكل $H_0 : \theta \ge \theta_0$ ضد فرضية بديلة من الشكل $H_1^- : \theta < \theta_0$ أو من الشكل $H_0 : \theta \le \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$، أي اختبار فرضيتين مركبتين وحيدتي الجانب.

رأينا في البند (2.3)، عند دراستنا لاختبار فرضية عدم $H_0 : \theta = \theta_0$ مقابل فرضية مركبة وحيدة الجانب H_1 (H_1^+ أو H_1^-)، بأن الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α غير

موجود بشكل عام، بل يوجد عند توفر بعض الشروط في النموذج المقترح F. وهذه الشروط قدمت في المبرهنة (1.2.3). ورأينا بأن هنالك صفاً هاماً من النماذج محققة لتلك الشروط، ومنها على الخصوص عائلة النماذج الأسية.

إن الاختبار الأقوى بانتظام وبحجم α لاختبار فرضية العدم وحيدة الجانب من اليمين $H_0 : \theta \geq \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$ أو من اليسار $H_0 : \theta \leq \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$ غير موجود بشكل عام أيضاً، ووجوده يتوقف على توفر بعض الشروط كتلك الواردة في المبرهنة (1.2.3). وهذا ما تؤكده المبرهنة التالية.

مبرهنة 1.3.3

إذا كانت $X = (X_1,..., X_n)$ عينة عشوائية من مجتمع توزيعه عضو في عائلة التوزيعات المعلمية $F = \{F(x;\theta), \theta \in \Theta\}$، التي تعتمد على معلمة واحدة θ (θ وحيدة البعد)، وكان لها إحصاء نسبة معقولية مضطرد في إحصاء $T = T(X)$، فعندئذٍ يوجد دائماً الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار:

1. الفرضية $H_0 : \theta \leq \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$، وهو نفس الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة وحيدة الجانب من اليمين $H_1^+ : \theta > \theta_0$.
2. الفرضية $H_0 : \theta \geq \theta_0$ مقابل الفرضية $H_1^- : \theta < \theta_0$، وهو نفس الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة وحيدة الجانب من اليسار $H_1^- : \theta < \theta_0$.

لإثبات صحة المبرهنة (1.3.3) يجب أن نميز بين الحالتين:

الحالة الأولى: إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda(X) = g(T)$ دالة غير متناقصة في T.

الحالة الثانية: إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda(X) = g(T)$ دالة غير متزايدة في T.

الإثبـات

سنقتصر الإثبات على الحالة الأولى، ونترك الإثبات في الحالة الثانية للقــارئ علــى سبيل المثال وذلك باتباع نفس الأسلوب.

لنفترض أن إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda(X) = g(T)$ دالة غير متناقصة في T، ونريــد اختبار الفرضية $H_0 : \theta \le \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$، عند مستوى معنوية α.

لنبدأ باختبار الفرضية $H_0' : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$، عند مستوى معنويــة α. حسب الحالة الأولى في المبرهنة (1.2.3) فالاختبار الأقوى بانتظام بحجم α يعطى بمنطقــة الرفض (11.2.3)، أي أن:

$$G_{1\alpha}^{*+} = \left\{x : \lambda(x) = \frac{L(x;\theta_0)}{L(x;\theta_1)} \le c_\alpha^+\right\} = \left\{x : T(x) \le d_\alpha^+\right\} \quad ; \quad \theta_1 > \theta_0$$

حيث إن: $W(G_{1\alpha}^{*+};\theta_0) = \alpha$. وهذا يعني أن الاختبار $G_{1\alpha}^{*+}$ هو الاختبار الأقوى بانتظــام بحجم α لاختبار $H_0' : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$ ضمن فئــة الاختبــارات $P(G_{1\alpha_1})$ المحققة للشرط:

$$W(G_{1\alpha_1};\theta_0) = \alpha_1 \le \alpha \qquad (1)$$

لنفترض الآن أننا نريد اختبار فرضية العدم $H_0'' : \theta = \theta_0' < \theta_0$ ضد الفرضية البديلــة $H_1' : \theta = \theta_0$.

بما أن إحصاء نسبة المعقولية $\Lambda(X) = \frac{L(X;\theta_0)}{L(X;\theta_1)} = g(T)$ دالة غير متناقصــة في T (حسب الفرض)، وبناءً على المبرهنة (1.2.2) فالاختبار الأقوى لاختبار H_0'' ضد H_1' هو من الشكل $G_1 = \{x : T(x) \le d\}$ ومن ثم الاختبار:

$$G_{1\alpha}^{*+} = \left\{x : T(x) \le d_\alpha^+\right\}$$

يعتبر الاختبار الأقوى لاختبار $H_0'' : \theta = \theta_0' < \theta_0$ ضد $H_1'' : \theta = \theta_0$، لكن بحجم مختلف عن α نرمز له بـــ α' $(\alpha' \ne \alpha)$، أي أن:

$$W(G_{1\alpha}^{*+};\theta_0') = P_{\theta_0'}\left(T(X) \le d_\alpha^+\right) = \alpha' \qquad (2)$$

وأن قوة هذا الاختبار عند $\theta = \theta_0$ تساوي $W(G_{1\alpha}^{**};\theta_0) = \alpha$.

وكما نعلم أن اختبار نيمان وبيرسون لاختبار فرضية $H_0^{*}: \theta = \theta_0'$ ضد فرضية $H_1': \theta = \theta_0$ هو اختبار غير متحيز (قوة الاختبار أكبر أو تساوي حجمه)، أي أن:

$$W(G_{1\alpha}^{**};\theta_0') = \alpha' \le W(G_{1\alpha}^{**};\theta_0) = \alpha$$

وعلى ذلك:

$$W(G_{1\alpha}^{**};\theta) \le \alpha \quad ; \quad \theta \le \theta_0$$

أو:

$$\sup_{\theta \le \theta_0} W(G_{1\alpha}^{**};\theta) = W(G_{1\alpha}^{**};\theta_0) = \alpha$$

وهذا يعني أن الاختبار $G_{1\alpha}^{**}$ ينتمي لعائلة الاختبارات $P(G_{1\alpha_1})$ المحققة للشرط:

$$\sup_{\theta \le \theta_0} W(G_{1\alpha_1};\theta) = \alpha_1 \le \alpha \tag{3}$$

وبالتالي $W(G_{1\alpha_1};\theta) \le \alpha \,;\, \theta \le \theta_0$ [ليس بالضرورة $W(G_{1\alpha_1};\theta_0) = \alpha_1$].

نلاحظ أن فئة الاختبارات المحققة للشرط (3) تحتوي على فئة الاختبارات المحققة للشرط (1).

لإثبات أن الاختبار $G_{1\alpha}^{**}$ هو الأقوى بانتظام وبحجم α ضمن فئة الاختبارات المحققة للشرط (3) نأخذ اختباراً ما G_1 (محقق للشرط 3) غير $G_{1\alpha}^{**}$ ولنفترض θ_1 بديلاً ما من H_1^{*} (أي $\theta_1 > \theta_0$)، فيصبح المطلوب إثبات أن $W(G_{1\alpha}^{**};\theta_1) \ge W(G_1;\theta_1)$.

وإثبات هذا الأخير على النحو الآتي:

$$W(G_{1\alpha}^{**};\theta_1) = \int_{G_{1\alpha}^{**}} L(x;\theta_1)dx = \int_{G_{1\alpha}^{**}G_1} L(x;\theta_1)dx + \int_{G_{1\alpha}^{**}\overline{G}_1} L(x;\theta_1)dx$$

$$W(G_1;\theta_1) = \int_{G_1} L(x;\theta_1)dx = \int_{G_1 G_{1\alpha}^{**}} L(x;\theta_1)dx + \int_{G_1\overline{G}_{1\alpha}^{**}} L(x;\theta_1)dx$$

$$W(G_{1\alpha}^{**};\theta_1) = W(G_1;\theta_1) + \int_{G_{1\alpha}^{**}\overline{G}_1} L(x;\theta_1)dx - \int_{G_1\overline{G}_{1\alpha}^{**}} L(x;\theta_1)dx$$

وحسب تعريف منطقة الرفض $G_{1\alpha}^{*+}$، عندما $x \in G_{1\alpha}^{*+}$، فإن:

$$\lambda(x) = \frac{L(x;\theta_0)}{L(x;\theta_1)} \le c_\alpha^+ \Rightarrow L(x;\theta_1) \ge \frac{L(x;\theta_0)}{c_\alpha^+}$$

ومن ثم عندما $x \in \overline{G}_{1\alpha}^{*+}$ فإن:

$$\lambda(x) = \frac{L(x;\theta_0)}{L(x;\theta_1)} > c_\alpha^+ \Rightarrow L(x;\theta_1) < \frac{L(x;\theta_0)}{c_\alpha^+}$$

وعلى ذلك:

$$W(G_{1\alpha}^{*+};\theta_1) \ge W(G_1;\theta_1) + \frac{1}{c_\alpha^+}\left[\int_{G_{1\alpha}^{*+}\overline{G}_1} L(x;\theta_0)dx - \int_{G_1\overline{G}_{1\alpha}^{*+}} L(x;\theta_0)dx\right]$$

لكن حسب الفرض $W(G_1;\theta_0) \le \alpha$ و $W(G_{1\alpha}^{*+};\theta_0) = \alpha$، أي أن:

$$W(G_1;\theta_0) = \int_{G_1} L(x;\theta_0)dx = \int_{G_1G_{1\alpha}^{*+}} L(x;\theta_0)dx + \int_{G_1\overline{G}_{1\alpha}^{*+}} L(x;\theta_0)dx \le \alpha$$

$$W(G_{1\alpha}^{*+};\theta_0) = \int_{G_{1\alpha}^{*+}} L(x;\theta_0)dx = \int_{G_{1\alpha}^{*+}G_1} L(x;\theta_0)dx + \int_{G_{1\alpha}^{*+}\overline{G}_1} L(x;\theta_0)dx = \alpha$$

ومن ثم:

$$W(G_{1\alpha}^{*+};\theta_0) - W(G_1;\theta_0) = \int_{G_{1\alpha}^{*+}\overline{G}_1} L(x;\theta_0)dx - \int_{G_1\overline{G}_{1\alpha}^{*+}} L(x;\theta_0)dx \ge 0$$

وبالتالي، بما أن $c_\alpha^+ > 0$ فإن:

$$W(G_{1\alpha}^{*+};\theta_1) \ge W(G_1;\theta_1)$$

وهذه محققة مهما تكن $\theta_1 > \theta_0$. أي أن الاختبار $G_{1\alpha}^{*+}$ هو الاختبار الأقـــوى بانتظـــام بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta \le \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$، وهو المطلوب.

بشكل مشابه لاختبار الفرضية $H_0 : \theta \ge \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$، عنـــد مســـتوى

معوية α، وافتراض $\Lambda = g(T)$ دالة غير متناقصة في T، يمكن إثبات أن الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α هو ذاته الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$ ويعطى بمنطقة الرفض (14.2.3)، أي أن:

$$G_{1\alpha}^{*-} = \{x : T(x) \le d_\alpha^-\}$$

ويتعين الثابت d_α^- من الشرط:

$$P_{\theta_0}\left(T(X) \le d_\alpha^-\right) = \alpha$$

وبإتباع نفس الأسلوب، بافتراض $\Lambda = g(T)$ دالة غير متزايدة في T، نجد:

1. الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار $H_0 : \theta \le \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$ يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*+} = \{x : T(x) \ge d_\alpha^+\}$$

حيث d_α^+ تتعين من الشرط:

$$P_{\theta_0}\left(T(X) \ge d_\alpha^+\right) = \alpha$$

2. الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار $H_0 : \theta \ge \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$ موجود ويعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*-} = \{x : T(x) \ge d_\alpha^-\}$$

حيث إن d_α^- تتعين من الشرط:

$$P_{\theta_0}\left(T(X) \ge d_\alpha^-\right) = \alpha$$

مثال 1.3.3

لتكن $X = (X_1, \ldots, X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع $\mathcal{L}(\xi) \in N(\mu, \theta^2)$، ونريد اختبار:

1. الفرضية $H_0 : \theta^2 \le \theta_0^2$ مقابل $H_1^+ : \theta^2 > \theta_0^2$.

2. الفرضية $H_0:\theta^2 \ge \theta_0^2$ مقابل $H_1^-:\theta^2 < \theta_0^2$.

عند مستوى معنوية α.

في المثال (2.2.3) وجدنا أن النموذج الطبيعي $N(\mu,\theta^2)$ أسياً، وله إحصاء نسبة معقولية مضطرداً في الإحصاء الكافي $T(X)=\sum_1^n X_i$ (غير متزايد عندما $\theta^2 > \theta_0^2$ وغير متناقص عندما $\theta^2 < \theta_0^2$) وبالتالي حسب المبرهنة (1.3.3) يوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار:

1. الفرضية $H_0:\theta^2 \le \theta_0^2$ ضد $H_1^+:\theta^2 > \theta_0^2$ وهو الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية البسيطة $H_0:\theta^2 = \theta_0^2$ ضد $H_1^+:\theta^2 > \theta_0^2$، أي يعطى بمنطقة الرفض (16.2.3):

$$G_{1\alpha}^{*+} = \left\{x : t = T(x) \ge \theta_0^2 \chi_{\alpha,n}^2 \right\} \quad ; \quad t = \sum_1^n (x_i - \mu)^2$$

ودالة قوته معطاة بالعلاقة (17.2.3).

2. الفرضية $H_0:\theta^2 \ge \theta_0^2$ ضد $H_1^-:\theta^2 < \theta_0^2$. وهو الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية البسيطة $H_0:\theta^2 = \theta_0^2$ ضد $H_1^-:\theta^2 < \theta_0^2$، أي يعطى بمنطقة الرفض (18.2.3):

$$G_{1\alpha}^{*-} = \left\{x : t = T(x) \le \theta_0^2 \chi_{1-\alpha,n}^2 \right\} \quad ; \quad t = \sum_1^n (x_i - \mu)^2$$

ودالة قوة هذا الاختبار معرفة بالعلاقة (19.2.3).

ملاحظات على المبرهنتين (1.2.3) و (1.3.3)

1. في المبرهنة (1.2.3) كانت فرضية العدم $H_0:\theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة وحيدة الجانب H_1 ($H_1^+:\theta > \theta_0$ أو $H_1^-:\theta < \theta_0$).

2. إذا كان النموذج المقترح F له إحصاء نسبة معقولية مضطرد في إحصاء T، فإن

الاختبـــار الأقـــوى بانتظـــام بحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$ موجود وينطبق على اختبار نيمان وبيرسون بحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضـــد بـــديل معين θ_1 من الفرضية البديلة H_1^+. أما إذا كانت الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$، فـــإن الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α موجود أيضاً وينطبق علـــى اختبار نيمان وبيرسون بحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد بديل معـــين θ_1 مـــن H_1^-.

3. في المبرهنة (1.3.3) كانت فرضية العدم $H_0 : \theta \le \theta_0$ (أو $H_0 : \theta \ge \theta_0$) ضـــد $H_1^+ : \theta > \theta_0$ (أو $H_1^- : \theta < \theta_0$).

4. إذا كان النموذج المقترح F له إحصاء نسبة معقولية مضطرد في إحصاء T، فـــإن الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار $H_0 : \theta \le \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$ موجود وينطبق على الاختبار الأقوى بانتظـــام بحجـــم α لاختبـــار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضـــد $H_1^+ : \theta > \theta_0$، وهذا الأخير بدوره ينطبق على اختبار نيمان وبيرسون بحجـــم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد بديل معين θ_1 من H_1^+. لكن إذا كانت فرضية العـــدم $H_0 : \theta \ge \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$، فالاختبار الأقوى بحجم α موجـــود وينطبـــق على الاختبـــار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضـــد $H_1^- : \theta < \theta_0$، وهذا الأخير بـــدوره ينطبق على اختبار نيمان وبيرسون بحجـــم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد بديل معين θ_1 من H_1^-.

مثـال 2.3.3

إذا كان عمر آلة من نوع معين عبارة عن متغـــير عشـــوائي ξ يخضـــع للتوزيـــع $\mathcal{L}(\xi) \in \Gamma(1,\theta)$، وكنت $X_1,\dots,X_n$ الأعمار المسجلة عند مراقبـــة n آلـــة مـــن ذات النوع، ونريد اختبار فرضية العدم $H_0 : \theta \ge \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$.

بما أن النموذج $\Gamma(1,\theta)$ ينتمي لعائلة النماذج الأسية، حيث إن الإحصاء $T = \sum_1^n X_i$ و $A(\theta) = -\frac{1}{\theta}$ دالة متزايدة في θ، فله إحصـــاء نسبة معقولية غير متنـــاقص في T (لأن

$\theta_1 < \theta_0$، حيث θ_1 بديل معين من H_1^-). وحسب المبرهنتين (1.2.3) و (1.3.3) فالاختبار الأقوى بانتظام بحجم α موجود وينطبق على اختبار نيمان وبيرسون بحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد بديل معين $H_1 : \theta < \theta_0$. وهذا الأخير يعطى بمنطقة الرفض المعرفة بالعلاقة (22.2.3)، أي أن:

$$G_{1\alpha}^{*} = \left\{ x : \sum_{i=1}^{n} x_i \le \frac{1}{2}\theta_0 \chi_{1-\alpha,2n}^{2} \right\}$$

$$P_{\theta_0}\left(\sum_{1}^{n} X_i \le \frac{1}{2}\theta_0 \chi_{1-\alpha,2n}^{2} \right) = \alpha$$

وهذه النتيجة متوقعة لأن المعلمة θ عبارة عن متوسط المتغير العشوائية ξ، أي أن $E_\theta \xi = \theta$ ، وبالتالي من الطبيعي تفسير القيم الصغيرة للإحصاء $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ لصالح الفرضية البديلة $H_1^- : \theta < \theta_0$.

مثال 3.3.3

تستخدم عادة في العمليات الإنتاجية المراقبة الإحصائية لجودة المنتج باستخدام أسلوب المعاينة. لنفترض مصنعاً ما ينتج منتجاً معيناً، وأن كل وحدة منتج، وبشكل مستقل عن وحدات المنتج الأخرى، يمكن أن تكون معطوبة (غير محققة للمواصفات المعيارية) باحتمال ثابت غير معلوم $0 < \theta < 1$، ومن ثم احتمال أن تكون محققة للمواصفات المعيارية (سليمة) يساوي $(1-\theta)$. ولمراقبة جودة هذا المنتج أخذت منها n وحدة لأعلي التعيين (عينة عشوائية بحجم n) فكانت نتيجة المراقبة موصوفة بالمتغير العشوائي $X = (X_1, ..., X_n)$، حيث $X_i = 1; i = 1, ..., n$ إذا كانت وحدة المنتج معطوبة و $X_i = 0$ عندما تكون سليمة. وغالباً في مثل هذه الحالة نحتاج لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta \ge \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$، حيث θ_0 نسبة عطب ما حرجة. إذا بينت نتيجة الاختبار أن الفرضية H_0 صحيحة، فيجب إيقاف العملية الإنتاجية في المصنع المذكور لإجراء التحسينات اللازمة لتقليص نسبة العطب.

لبناء الاختبار المطلوب تصاغ المسألة على النحو الآتي:

لدينا عينة عشوائية $X = (X_1,\dots,X_n)$ من التوزيع $\mathcal{L}(\xi) \in B(1,\theta)$، ونريد اختبار الفرضية $H_0 : \theta \ge \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta \le \theta_0$، عند مستوى معنوية α.

رأينا في المثال (5.2.3) أن نموذج بيرنولي $B(1,\theta)$ ينتمي لعائلة النماذج الأسية وله إحصاء نسبة معقولية مضطرد في الإحصاء الكافي $r(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (عدد وحدات المنتج المعطوبة في العينة). وبالتالي حسب المبرهنة (1.3.3) فالاختبار الأقوى بحجم α لاختبار $H_0 : \theta \ge \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$ موجود وهو ذاته الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$.

وبما أن $A(\theta) = \ln \frac{\theta}{1-\theta}$ دالة متزايدة في θ فإن $\Lambda = g(r)$ دالة غير متناقصة في $r(X)$ عندما $H_1^- : \theta < \theta_0$، وبالتالي الاختبار (غير العشوائي) الأقوى بانتظام بحجم α يعطى بمنطقة الرفض (13.3.2):

$$G_{1\alpha}^* = \{x : r(x) \le r_\alpha\}$$

أما الاختبار (العشوائي) الأقوى بانتظام بحجم α يعطى بدالة الرفض (15.3.2):

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad r(x) < r_\alpha \\ \dfrac{\alpha - \alpha_0}{p_0} & ; \quad r(x) = r_\alpha \\ 0 & ; \quad r(x) > r_\alpha \end{cases}$$

مثـــال 4.3.3

تستخدم أحياناً في شروط المثال السابق، خطة أخرى للمراقبة، التي تدعى بأسلوب المعاينة ذات الحدين السالبة. في هذه الحالة تستمر عمليات السحب العشوائية لوحدات المنتج حتى الحصول على عدد معين من النجاحات r (يفهم النجاح هنا ظهور وحدة منتج معطوبة). لنرمز بـ Y_i لعدد التكرارات بين $(i-1)$ و i نجاحاً [عدد وحدات المنتج المسحوبة قبل الحصول على i نجاحاً وبعد الحصول على $(i-1)$ نجاحاً]. عندئذٍ:

$$P_\theta(Y_i = y) = \theta(1-\theta)^y \quad , \quad y = 0,1,\dots$$

وهذا يعني أن العينة العشوائية $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ مأخوذة من توزيـع ذي الحديـن السالب $\overline{B}(1,\theta)$ (الذي ينتمي إلى عائلة النماذج الأسية)، حيـث إن $T(Y) = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ و $A(\theta) = \ln(1-\theta)$ دالة متناقصة في θ. وبالتالي نسبة المعقولية $\Lambda(X) = g(T)$ دالـة غير متزايدة في T (لأن $H_1^- : \theta < \theta_0$)، وعلى ذلك فالاختبار الأقوى بحجم α لاختبـار الفرضية $H_0 : \theta \geq \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$ موجود وينطبق على اختبار نيمان وبيرسـون لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta = \theta_1 < \theta_0$، أي يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^* = \left\{ x : \sum_{i=1}^{r} y_i \geq d \right\}$$

وبما أن $\mathcal{L}_\theta\left(T(Y) = \overline{B}(r,\theta)\right)$ فإن الحد الحرج d يتعين من العلاقة:

$$P_{\theta_0}\left(T(Y) = \sum_{1}^{r} Y_i \geq d \right) = \alpha \qquad (1)$$

إذا وجد عدد صحيح يحققها. وفي حالة عدم وجود عدد صحيح d يحقق العلاقـة (1)، نستخدم الأسلوب العشوائي والاختبار يعطى بدالة الرفض:

$$\varphi^*(y) = \begin{cases} 1 & ; \quad \sum_{1}^{r} y_i > d_\alpha^- \\ \dfrac{\alpha - \alpha_0}{p_0} & ; \quad \sum_{1}^{r} y_i = d_\alpha^- \\ 0 & ; \quad \sum_{1}^{r} y_i < d_\alpha^- \end{cases}$$

وتتعين d_α^- من العلاقة:

$$\sum_{d_\alpha}^{\infty} C_y^{r+y-1} \theta^r (1-\theta)^y = \alpha' = \alpha_0 + p_0$$

هكذا منطقة الرفض من الشكل:

$$\left\{y : \sum_{1}^{r} y_i \geq d\right\}$$

وهذه تتفق مع التصور البديهي للمسألة، حيث من الطبيعي توقع ظهور r نجاحاً (وحدة معطوبة) بسرعة كافية عند القيم الكبيرة لـ θ، أي زيادة حالات الفشل (وحدة سليمة) $\sum_{i=1}^{n} Y_i$ لصالح الرفض (لصالح $H_1^- : \theta < \theta_0$).

تمارين

1. إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع منتظم $\mathcal{L}(\xi) \in R(-\theta,\theta)$، فالمطلوب:

   أ. اختبر الفرضية $H_0 : \theta = 0.5$ ضد $H_1^+ : \theta > 0.5$ عند مستوى معنوية α.

   ب. إذا كانت $x = (0.196,-0.460,-0.114,0.325,0.174)$ عينة عشوائية ملاحظة و $\alpha = 0.01$، فهل تقبل الفرضية H_0 أم ترفضها؟.

2. لتكن $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $\Gamma(1,2\theta)$. اختبر الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^+ : \theta > \theta_0$ عند مستوى معنوية α، ثم أوجد دالة قوة الاختبار الذي حصلت عليه.

3. إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع بواسون $\Pi(\theta)$، فأثبت أن الاختبار (غير العشوائي) الأقوى بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1^+ : \theta > \theta_0$ يعطي بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_{1\alpha}^+ = \{x : \bar{x} \geq c_\alpha\}$$

ثم احسب دالة قوة هذا الاختبار وبين أنه غير متحيز. وإذا كانت n كبيرة، فأثبت أن الحد الحرج $c = c_\alpha$ يساوي تقريباً $\Phi(-t_\alpha) = \alpha$; $\theta_0 + t_\alpha\sqrt{\theta_0}/n$.

4. إذا كانت X عينة عشوائية من ملاحظة واحدة من توزيع $f(x;\theta)$، فأوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α ودالة قوته في الحالات الآتية:

أ. $f(x;\theta) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - x) \quad ; \quad 0 < x < \theta$

$H_0 : \theta = \theta_0 \quad , \quad H_1^+ : \theta > \theta_0$

ب. $f(x;\theta) = (\theta - 1)x^{\theta-2} \quad ; \quad 0 < x < 1, \ \theta > 1$

$H_0 : \theta = 2 \quad , \quad H_1 : \theta > 2$

ج. $f(x;\theta) = e^{-(x-\theta)} \quad ; \quad x \geq \theta$

$H_0 : \theta = \theta_0 \quad , \quad H_1^- : \theta > \theta_0$

5. إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta,4)$، فاختبر الفرضية $H_0 : \theta = 6$ ضد $H_1^+ : \theta > 6$، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

6. إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع برنولي $B(1,\theta)$، فاختبر الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta < \theta_0$، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

7. لتكن $X = (X_1,...,X_{25})$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta,1)$، ونريد اختبار الفرضية $H_0 : \theta \leq 2$ ضد $H_1^+ : \theta > 2$. إذا كان لدينا اختبار معطى بمنطقة الرفض:

$$G_1 = \{x : \bar{x} > 2.33\}$$

أ. أوجد حجمه ودالة قوته.

ب. هل يعتبر هذا الاختبار الأقوى بانتظام عند الحجم الذي تحصلت عليه؟

8. إذا كانت $X = (X_1,...,X_{10})$ عينة عشوائية من توزيع بواسون $\Pi(\theta)$، فاختبر الفرضية $H_0 : \theta = 0.4$ ضد $H_1 : \theta > 0.4$، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

9. إذا كانت X عينة عشوائية من ملاحظة واحدة مأخوذة من توزيع:

$$f(x;)=\theta x^{\theta-1} \quad ; \quad 0<x<1 \ , \ \theta>0$$

فالمطلوب:

أ. إذا كان اختبار الفرضية $H_0:\theta\leq 1$ ضد $H_1:\theta>1$ معطى بمنطقة الرفض:

$$G_1=\left\{x : x\geq\frac{1}{2}\right\}$$

فأوجد دالة قوة هذا الاختبار، ومن ثم حجمه.

ب. أوجد الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0:\theta=2$ ضد $H_1:\theta=1$.

ج. هل يوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية $H_0:\theta\geq 2$ ضد $H_1:\theta<2$؟ إذا وجد فما هو؟.

10. لتكن X ملاحظة واحدة من توزيع:

$$f(x;\theta)=(2\theta x+1-\theta) \quad ; \quad 0<x<1 \ , \ -1\leq\theta\leq 1$$

المطلوب:

أ. أوجد الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار $H_0:\theta=0$ ضد $H_1:\theta=1$.

ب. هل يوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية $H_0:\theta\leq 0$ ضد $H_1:\theta>0$، إن وجد فما هو؟.

11. لتكن $X=(X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta)=\frac{1}{\theta}x^{(1-\theta)/\theta} \quad ; \quad 0<x<1$$

ونريد اختبار الفرضية $H_0:\theta\leq\theta_0$ ضد $H_1:\theta>\theta_0$.

أ. أوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α.

ب. إذا علمت بأن $n = 2, \theta_0 = 1, \alpha = 0.05$ فعين الاختبار الأقوى بانتظام.

ج. إذا كانت لديك العينة العشوائية الملاحظة:

$$x = (0.1; 0.5; 0.3; 0.2; 0.8; 0.6; 0.8; 0.3)$$

فهل تقبل الفرضية H_0 أم ترفضها، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

12. لتكن $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع بواسون $\Pi(\theta)$ اختبر فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta > \theta_0$، عند مستوى معنوية α.

13. إذا كانت $X = (X_1, X_2)$ عينة عشوائية من توزيع منتظم $R(0, \theta)$، فأوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta \leq 1$ ضد $H_1 : \theta > 1$.

ثم إذا كان لديك اختبار معين بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1 = \{x : x_1 + x_2 \geq 1\}$$

لاختبار الفرضية H_0 ضد H_1، فأوجد دالة قوة هذا الاختبار وعين حجمه.

14. لتكن $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x; \theta) = \theta^2 x e^{-\theta x} \quad ; \quad x > 0$$

والمطلوب:

أ. لاختبار الفرضية $H_0 : \theta \leq 1$ ضد $H_1 : \theta > 1$ بُني الاختبار المعطى بمنطقة رفض من الشكل (من أجل $n = 1$):

$$G_1 = \{x : x \leq 1\}$$

فما هي دالة قوة وحجم هذا الاختبار.

ب. أوجد الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار $H_0 : \theta = 1$ ضد $H_1 : \theta = 2$.

ج. هل يوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta \leq 1$ ضد $H_1 : \theta > 1$، إذا وجد فما هو؟

الفصل الرابع:

اختبارات ذات جانبين

1.4 مقدمة

بحثنا في الفصل الثاني الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار فرضية عدم بسيطة H_0 ضد فرضية بديلة بسيطة أيضا H_1، ورأينا أن مثل هذا الاختبار غير المتحيز دائماً موجود (مهما يكن النموذج المقترح F)، ويمكن الحصول عليه باستخدام مبدأ نيمان وبيرسون [المبرهنة (1.2.2)].

وتعرضنا في الفصل الثالث للاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضيات من جانب واحد، ولاحظنا أن مثل هذا الاختبار موجود فقط للنماذج الإحصائية التي لها إحصاء نسبة معقولية مضطرد $\Lambda(X)$ في إحصاء $T(X)$، ومن بين هذه النماذج تلك التي تنتمي لعائلة النماذج الأسية بمعلمة واحدة θ، وهذه العائلة من الاتساع بحيث تشتمل على أهم النماذج الإحصائية المستخدمة في التطبيقات الإحصائية.

لكن في حالات عدة نحتاج لاختبار بعض الفرضيات الإحصائية ذات جانبين، وهذا يتطلب بناء الاختبارات المثلى، حيث من الصعب بل من المستحيل بناء الاختبارات الأقوى بانتظام بحجم α لمثل تلك الفرضيات. إلا أن هنالك اختبارات أخرى لمثل تلك الفرضيات (فرضيات ذات جانبين) سنتعرض لها في هذا الفصل.

2.4 اختبار فرضية بسيطة $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية ذات الجانبين $H_1 : \theta \neq \theta_0$

كما أشرنا سابقاً [راجع البند (2.3)] حتى من أجل النماذج الأسية ذات إحصاء نسبة معقولية مضطرد في إحصاء T لا يوجد -بشكل عام- الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار فرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (θ وحيدة البعد). في مثل هذه الحالة (رفض الفرضية H_0 لمجرد أن لا تكون θ مساويةً لـ θ_0، أي سواء أكانت θ أكبر أم أصغر من θ_0) يتبع الأسلوب الآتي لبناء الاختبارات:

يستخدم إحصاء $T(X)$ لبناء الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α_1 لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة وحيدة الجانب من اليسار $H_1^- : \theta < \theta_0$ وليكن:

$$G_{1\alpha}^{*-} = \{x : T(x) \leq d_{\alpha_1}^-\}$$

وكذلك بناء الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α_2 لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة وحيدة الجانب من اليمين $H_1^+ : \theta > \theta_0$، وليكن:

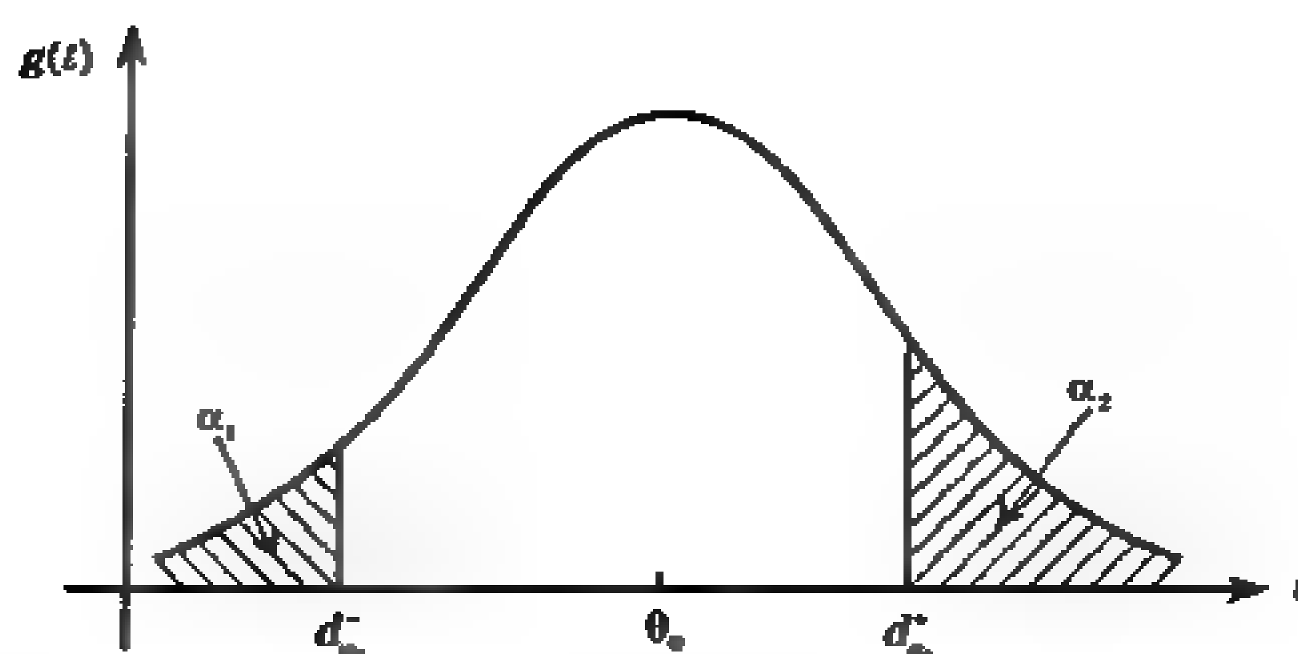
$$G_{1\alpha_2}^{*+} = \{x : T(x) \geq d_{\alpha_2}^+\}$$

وعلى ذلك يعطى الاختبار بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية ذات الجانبين $H_1 = H_1^- \cup H_1^+ : \theta \neq \theta_0$ بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha} = G_{1\alpha_1}^{*-} \cup G_{1\alpha_2}^{*+} = \{x : T(x) \leq d_{\alpha_1}^- \ \text{ or } \ T(x) \geq d_{\alpha_2}^+\} \quad ; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

ويبين الشكل (1.2.4) منطقة الرفض وتوزيع إحصاء اختبار $T(X)$ دالة كثافته $g(t)$، عندما تكون H_0 صحيحة.

بذلك نحصل على اختبار بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_0$، وهذا الاختبار ليس الأقوى بانتظام ضمن عائلة الاختبارات بحجم α أو أقل.



شكل (1.2.4)

لنر تطبيق هذا الأسلوب على مثال لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_0$ من أجل نموذج طبيعي $N(\theta,\sigma^2)$، عند مستوى معنوية α.

لتكن $X = (X_1,..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta,\sigma^2)$، ونريد بناء اختبار بحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

كما ذكرنا في بداية البند (2.3) أن الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α_1 لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1^- : \theta < \theta_0$ يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha_1}^{*-} = \left\{ x : \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -t_{\alpha_1} \right\} \quad , \quad \Phi(-t_{\alpha_1}) = \alpha_1$$

بينما الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α_2 لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1^+ : \theta > \theta_0$ يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha_2}^{*+} = \left\{ x : \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha_1} \right\} \quad , \quad \Phi(-t_{\alpha_2}) = \alpha_2$$

وبالتالي، في المسألة المطروحة يمكن استخدام الاختبار المعطى بمنطقة الرفض من الشكل:

$$G_{1\alpha} = \left\{ x : \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -t_{\alpha_1} \text{ or } \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha_2} \right\} \quad ; \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \qquad (1.2.4)$$

من الطبيعي إعطاء الأفضلية للاختبار المتناظر $(\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2)$، وهذا ما سنبينه لاحقاً، وعندئذٍ يأخذ الاختبار (1.2.4) الشكل الآتي:

$$\tilde{G}_{1\alpha} = \left\{x : \left|\frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}\right\} \tag{2.2.4}$$

لاستخدام خواص الاختبارات (1.2.4) واختيار الأفضل منها، لابد من دراسة دالة القوة:

$$W(G_{1\alpha};\theta) = P_\theta\left(X \in G^{*-}_{1\alpha_1}\right) + P_\theta\left(X \in G^{*+}_{1\alpha_2}\right)$$

من العلاقتين (2.2.3) و (4.2.3) نجد:

$$W(G_{1\alpha};\theta) = \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\Delta - t_{\alpha_1}\right) + \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\Delta - t_{\alpha_2}\right) = \varphi(\Delta) \quad , \quad \Delta = \theta - \theta_0$$

لندرس دالة القوة $W(G_{1\alpha};\theta)$ كدالة في Δ. مشتقيها الأول والثاني بالنسبة لـ Δ يساويان على الترتيب:

$$\varphi'(\Delta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left\{\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\Delta - t_{\alpha_2}\right)^2\right] - \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\Delta + t_{\alpha_1}\right)^2\right]\right\}$$

$$\varphi''(\Delta) = \frac{n}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}\left\{\left(t_{\alpha_2} - \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\Delta\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\Delta + t_{\alpha_2}\right)^2\right] + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\Delta + t_{\alpha_1}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\Delta + t_{\alpha_1}\right)^2\right]\right\}$$

وعلى ذلك نجد أن $\varphi'(\Delta) = 0$ عندما $\Delta = \Delta_0 = \frac{\sigma}{2\sqrt{n}}(t_{\alpha_2} - t_{\alpha_1})$، وفي هذه الحالة:

$$\varphi''(\Delta_0) = \frac{n}{\sigma^2\sqrt{2\pi}}(t_{\alpha_1} + t_{\alpha_2})\exp\left[-\frac{1}{8}(t_{\alpha_1} + t_{\alpha_2})^2\right]$$

وعند القيم الصغيرة لـ α فالمقداران t_{α_1} و t_{α_2} موجبان، وبالتالي $\varphi''(\Delta_0) > 0$، وهذا يعني أن الدالة $\varphi(\Delta)$ تبلغ نهايتها الصغرى عند النقطة $\Delta = \Delta_0$. وبما أن $\Delta_0 = 0$، فقط عندما $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha / 2$، فإن:

$$\varphi(0) = \Phi(-t_{\alpha_1}) + \Phi(-t_{\alpha_2}) = \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha \quad , \quad \varphi(\Delta \neq 0) > \alpha$$

وبالتالي الاختبار المتناظر $\widetilde{G}_{1\alpha}$ المعرف بالعلاقة (2.2.4) الوحيد ضمن الاختبارات المعرفة بالعلاقة (1.2.4) الذي يحقق الشرط $W(\widetilde{G}_{1\alpha};\theta) \geq \alpha$، أي غير متحيز. وفي الحالات الأخرى (أيْ عندما $\alpha_1 \neq \alpha_2$) فالاختبار (1.2.4) عند بعض البدائل θ من H_1 له قوة أقل من α، أي يعدّ اختباراً متحيزاً [راجع التعريف (1.9.1)]. هكذا، ضمن عائلة الاختبارات من الشكل (1.2.4) فقط الاختبار المتناظر (2.2.4) غير متحيز، وبالتالي يجب إعطاؤه الأفضلية. هذا بالإضافة إلى أن الاختبار (2.2.4) له أكبر قوة ضمن كل الاختبارات غير المتحيزة بمستوى معنوية α، أي يعتبر الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α (الأمثل). وهذه نتيجة للمبرهنة اللاحقة حول الشكل العام للاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

لتكن Θ فئة من الأعداد الحقيقية R (Θ فترة) و θ_0 نقطة داخلية من Θ. ونفترض فيما يلي أن التوزيعات المقترحة (النموذج الإحصائي) مستمرة إطلاقاً بالإضافة إلى أن دالة المعقولية $L(x;\theta)$ قابلة للاشتقاق عند كل نقطة داخلية $\theta \in \Theta$، ومشتقها:

$$\frac{\partial L(x;\theta)}{\partial \theta} = L_1(x;\theta)$$

عندئذٍ:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_S L(x;\theta)dx = \int_S L_1(x;\theta)dx$$

من أجل أي فئة جزئية $S \subseteq G$ وأي $\theta \in \Theta$.

لنعرف الآن الفئة:

$$\widetilde{G}_{1\alpha} = \{x : L(x;\theta_1) \geq cL(x;\theta_0) + c_1 L_1(x;\theta_0)\} \qquad (3.2.4)$$

حيث إن $\theta_1 \neq \theta_0$، والثابتان $c \geq 0$ و c_1 يعينان بشكل وحيد من الشرطين:

$$W(\widetilde{G}_{1\alpha};\theta_0) = P_{\theta_0}(\widetilde{G}_{1\alpha}) = \int_{\widetilde{G}_{1\alpha}} L(x;\theta_0)dx = h_1(c,c_1) = \alpha$$
$$W'(\widetilde{G}_{1\alpha};\theta_0) = P'_{\theta_0}(\widetilde{G}_{1\alpha}) = \int_{\widetilde{G}_{1\alpha}} L_1(x;\theta_0)dx = h_2(c,c_1) = 0 \qquad (4.2.4)$$

وللاختصار هنا ولاحقاً نكتب $P_\theta(S)$ بدلاً من $P_\theta(X \in S)$، حيث إن $S \subseteq G$.

مبـرهنة 1.2.4

إذا كانت الفئة $\widetilde{G}_{1\alpha}$ معرفة بالعلاقة (3.2.4)، فإنها تعطي الاختبار غـــير المتحـــيز الأقوى بانتظام Uniformly most powerful unbiased بمستوى معنوية α لاختبـــار فرضية بسيطة $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد فرضية ذات جانبين $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

الإثبـات

ليكن $G_{1\alpha}$ اختبار ما غير متحيز بحجم α (مستوى معنوية α) لاختبار فرضية العـدم البسيطة $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية ذات الجانبين $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

بما أن $W(G_{1\alpha};\theta_0) = \alpha$ ومشتق دالة القوة بالنسبة لـــ θ موجود، فإن:

$$W'(G_{1\alpha};\theta_0) = 0 \quad ; \quad W(G_{1\alpha};\theta) \geq \alpha \ , \ \theta \in \Theta \qquad (5.2.4)$$

بالإضافة لذلك:

$$\begin{aligned} P_{\theta_0}\left(\widetilde{G}_{1\alpha} \setminus \widetilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) &= P_{\theta_0}\left(\widetilde{G}_{1\alpha}\right) - P_{\theta_0}\left(\widetilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) \\ &= \alpha - P_{\theta_0}\left(\widetilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) = P_{\theta_0}\left(G_{1\alpha}\right) - P_{\theta_0}\left(\widetilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) \\ &= P_{\theta_0}\left(G_{1\alpha} \setminus \widetilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) \end{aligned} \qquad (6.2.4)$$

وبناءً على العلاقتين (5.2.4) و (6.2.4) نجد:

$$P'_{\theta_0}\left(\tilde{G}_{1\alpha} \setminus \tilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) + P'_{\theta_0}\left(\tilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) = 0$$
$$P'_{\theta_0}\left(G_{1\alpha} \setminus \tilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) + P'_{\theta_0}\left(\tilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) = 0$$

أي أن:

$$P'_{\theta_0}\left(\tilde{G}_{1\alpha} \setminus \tilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) = -P'_{\theta_0}\left(\tilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) = P'_{\theta_0}\left(G_{1\alpha} \setminus \tilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) \qquad (7.2.4)$$

من التعريف (3.2.4) للفئة $\tilde{G}_{1\alpha}$ والمساواتين (6.2.4) و (7.2.4) نحصل على العلاقة التالية:

$$P_{\theta_1}\left(\tilde{G}_{1\alpha} \setminus \tilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) \geq cP_{\theta_0}\left(\tilde{G}_{1\alpha} \setminus \tilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) + c_1P'_{\theta_0}\left(\tilde{G}_{1\alpha} \setminus \tilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) =$$
$$= cP_{\theta_0}\left(G_{1\alpha} \setminus \tilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) + c_1P'_{\theta_0}\left(G_{1\alpha} \setminus \tilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right)$$
$$\geq P_{\theta_1}\left(G_{1\alpha} \setminus \tilde{G}_{1\alpha}G_{1\alpha}\right) \quad ; \quad \theta_1 \neq \theta_0$$

وعلى ذلك نجد:

$$P_{\theta_1}\left(\tilde{G}_{1\alpha}\right) \geq P_{\theta_1}\left(G_{1\alpha}\right)$$

وبالتالي:

$$W\left(\tilde{G}_{1\alpha};\theta_1\right) \geq W\left(G_{1\alpha};\theta_1\right)$$

وبذلك تم إثبات أن الاختبار $\tilde{G}_{1\alpha}$ يعتبر الاختبار الأقوى لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد بديل ما معين θ_1 من H_1، ضمن عائلة الاختبارات غير المتحيزة $G_{1\alpha}$. لكن حسب الفرض الفئة $\tilde{G}_{1\alpha}$ لا تعتمد على البديل المعين θ_1، لذا هذا الاختبار يعتبر في نفس الوقت الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

وتبقى المبرهنة (1.2.4) صحيحة من أجل النماذج المنقطعة، آخذين بالاعتبار الشروط الواردة في اختبار نيمان وبيرسون [البند (3.2)].

لنطبق المبرهنة (1.2.4) على الاختبار المعطى بمنطقة الرفض (2.2.4). وفي هذه

المسألة لدينا:

$$L(x;\theta) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right]$$

أي أن:

$$L_1(x;\theta) = \frac{\partial L(x;\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}-\theta)L(x;\theta) \qquad (8.2.4)$$

وبالتالي، المتباينة في (3.2.4):

$$L(x;\theta_1) \geq cL(x;\theta_0) + c_1L_1(x;\theta_0) \Rightarrow \frac{L(x;\theta_1)}{L(x;\theta_0)} \geq c + c_1\frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}-\theta_0)$$

وهذه الأخيرة يمكن كتابتها:

$$\exp\left[MT(x) - \frac{\mu^2}{2}\right] \geq c + c_1'T(x) \qquad (9.2.4)$$

حيث إن:

$$T(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\theta_0) \quad , \quad M = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_1-\theta_0) \quad , \quad c' = c_1\frac{\sqrt{n}}{\sigma}$$

وبحل المتباينة (9.2.4) بالنسبة لـ $T(x)$ نحصل على الحل كمتباينة من الشكل:

$$T(x) \leq t^{(1)} \text{ or } T(x) \geq t^{(2)}$$

أي أن منطقة الرفض $\tilde{G}_{1\alpha}$ بدلالة الإحصاء $T(x)$ تكتب:

$$\tilde{G}_{1\alpha} = \left\{x : T(x) \leq t^{(1)} \text{ or } T(x) \geq t^{(2)}\right\} \qquad (10.2.4)$$

كما نعلم أن توزيع $T(X)$، عند صحة الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$، هو التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$. وهذا الأخير متناظر (متماثل) بالنسبة $t = 0$. وعلى ذلك، وحسب العلاقة (8.2.4) والشرط الثاني من (4.2.4) نجد:

$$\int_{\tilde{G}_{1\alpha}} L_1(x;\theta_0)dx = 0 \Rightarrow \int_{\tilde{G}_{1\alpha}} \frac{n}{\sigma}(\bar{x}-\theta_0)L(x;\theta_0)dx$$
$$= \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\int_{-\infty}^{t^{(1)}} t\varphi(t;\theta_0)dt + \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\int_{t^{(2)}}^{+\infty} t\varphi(t;\theta_0)dt = 0$$

حيث إن $\varphi(t;\theta_0)$ دالة كثافة t عند $\theta=\theta_0$. ولا يمكن أن تتحقق المساواة الأخيرة إلا إذا كانت $t^{(2)}=-t^{(1)}$. وعلى ذلك، وحسب الشرط الأول من العلاقة (4.2.4) نجد:

$$\int_{\tilde{G}_{1\alpha}} L(x;\theta_0)dx = \alpha \Rightarrow \int_{-\infty}^{-t^{(2)}} \varphi(t;\theta_0)dt + \int_{t^{(2)}}^{+\infty} \varphi(t;\theta_0)dt$$
$$= 2\int_{t^{(2)}}^{+\infty} \varphi(t;\theta_0)dt = \alpha \Rightarrow \int_{t^{(2)}}^{+\infty} \varphi(t;\theta_0)dt = \alpha/2 \Rightarrow$$
$$1-\Phi\left(t^{(2)}\right) = \Phi\left(-t^{(2)}\right) = \alpha/2 \Rightarrow t^{(2)} = t_{\alpha/2}$$

هكذا، يتحقق الشرطان في (4.2.4) فقط عندما يكون للمنطقة (3.2.4) الشكل:

$$\tilde{G}_{1\alpha} = \{x : |T(x)| \ge t_{\alpha/2}\} \quad ; \quad \Phi(-t_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

وهذه ما هي إلا منطقة الرفض (2.2.4) وهي لا تعتمد على البديل المعين θ_1 من H_1. وبالتالي، حسب المبرهنة (1.2.4)، فالاختبار (2.2.4) يعتبر الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0:\theta=\theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1:\theta\neq\theta_0$.

ودالة قوة هذا الاختبار:

$$W(\tilde{G}_{1\alpha};\theta) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta-\theta_0) - t_{\alpha/2}\right) + \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_0-\theta) - t_{\alpha/2}\right)$$

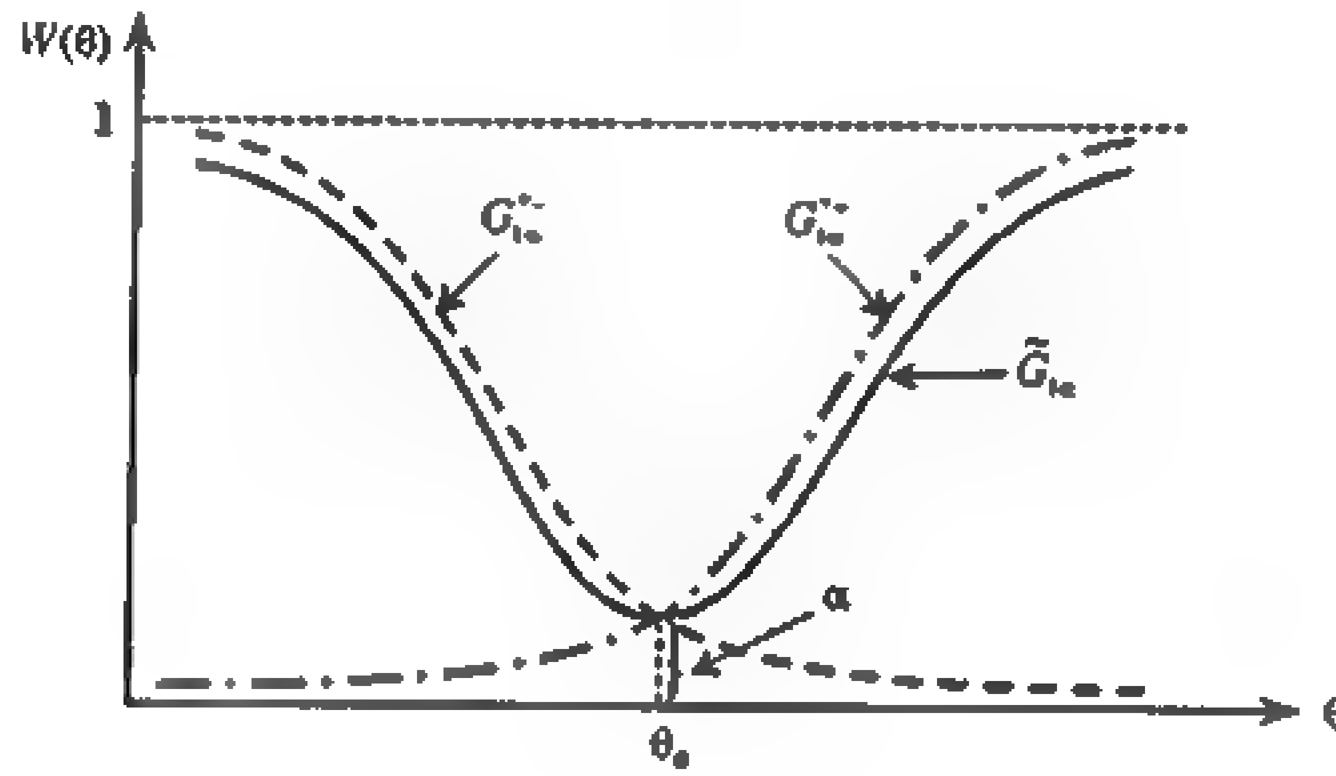
متناظرة بالنسبة للنقطة $\theta=\theta_0$ وتبلغ نهايتها الصغرى عندها وتساوي α، وهذا يعني أن $\inf_{\theta} W(\tilde{G}_{1\alpha};\theta) = W(\tilde{G}_{1\alpha};\theta_0) = \alpha$. ومن ثم عندما $\theta\neq\theta_0$ فإن $W(\tilde{G}_{1\alpha};\theta) > \alpha$، وتنتهي إلى الواحد بانتهاء θ إلى $\pm\infty$. وحسب المبرهنة (1.2.4) منحني دالة القوة $W(\tilde{G}_{1\alpha};\theta)$ يتموضع فوق منحني دالة قوة أي اختبار غير متحيز في المسألة المطروحة.

لنقارن دالة القوة $W(\widetilde{G}_{1\alpha};\theta)$ بدالتي القوة $W(G^{*+}_{1\alpha};\theta)$ و $W(G^{*-}_{1\alpha};\theta)$ المعرفتـــين بالعلاقتين (2.2.3) و (4.2.3) على الترتيب.

نلاحظ أن:

$$W(G^{*-}_{1\alpha};\theta) < W(\widetilde{G}_{1\alpha};\theta) < W(G^{*+}_{1\alpha};\theta) \quad ; \quad \theta > \theta_0$$
$$W(G^{*+}_{1\alpha};\theta) < W(\widetilde{G}_{1\alpha};\theta) < W(G^{*-}_{1\alpha};\theta) \quad ; \quad \theta < \theta_0$$
$$W(G^{*-}_{1\alpha};\theta) = W(\widetilde{G}_{1\alpha};\theta) = W(G^{*+}_{1\alpha};\theta) \quad ; \quad \theta = \theta_0$$

وهذا يعني (باستثناء القيمة $\theta = \theta_0$) أن قوة الاختبار $\widetilde{G}_{1\alpha}$ دائماً أقل من قوة أحـــد الاختبارين $G^{*+}_{1\alpha}$، $G^{*-}_{1\alpha}$ وأكبر من قوة الآخر، ويبدو ذلك بوضوح تام على الشكل (2.2.4).



شكل (2.2.4)

نلاحظ مما سبق أن تطبيق المبرهنة (1.2.4) يتطلب معرفـــة التوزيـــع الاحتمـــالي للإحصاء $\Lambda(X) = \dfrac{L(X;\theta_1)}{L(X;\theta_0)}$ ، عند الفرضية H_0 ، لتعيين الثابتين c و c_1. وهذا ليـــس بالأمر السهل بشكل عام، بل من الصعوبة بمكان غالباً، بالإضافة إلى ذلك صعوبة حساب التكاملين (4.2.4). لذا في التطبيقات الإحصائية تستخدم غالباً المبرهنة (1.2.4) لبنـــاء الاختبارات غير المتحيزة الأقوى بانتظام بحجم α في حالة النماذج الأسية بمعلمة واحـــدة θ (θ فترة) لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

وكما أشرنا سابقاً، أن لكل نموذج أسي إحصاء نسبة معقولية $\Lambda(X) = \dfrac{L(X;\theta_0)}{L(X;\theta_1)}$ مضطرد في الإحصاء الكافي $T(X) = \sum_{i=1}^{n} B(X_i)$، وعندئذٍ فإن المبرهنة التالية المشتقة من المبرهنة (1.2.4) تعطي دائماً، وبأقل صعوبة، الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_0$. وسنقدم هذه المبرهنة بدون إثبات.

مبـرهنة 2.2.4

إذا كانت $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع عضو في عائلة النماذج الأسية، التي تعتمد على معلمة واحدة فقط، وكانت فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية $H_1 : \theta \neq \theta_0$، فإن الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α موجود دائماً ويعطي بمنطقة رفض من الشكل $\widetilde{G}_{1\alpha} = \{x : 0 < \widetilde{\varphi}(x) \leq 1\}$ حيث إن:

$$\widetilde{\varphi}(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad T(x) < c_1 \text{ or } T(x) > c_2 \\ \gamma_j & ; \quad T(x) = c_j \,,\; j = 1,2 \\ 0 & ; \quad c_1 < T(x) < c_2 \end{cases} \qquad (11.2.4)$$

حيث إن $T(X) = \sum_{i=1}^{n} B(X_i)$ وتتحدد قيمة الثوابت $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ من العلاقتين:

$$\begin{aligned} &W(\widetilde{G}_{1\alpha};\theta_0) = E_{\theta_0}\widetilde{\varphi}(X) = \alpha \\ &\int_{-\infty}^{c_1} tg(t;\theta_0)dt + \int_{c_2}^{\infty} tg(t;\theta_0)dt = \alpha E_{\theta_0}T \end{aligned} \qquad (12.2.4)$$

في حالة نموذج مستمر.

وفي حالة نموذج منقطع فإن العلاقة الثانية تكتب على النحو الآتي:

$$\sum_{t<c_1} tg(t;\theta_0)dt + \sum_{t>c_2} tg(t;\theta_0)dt + c_1\gamma_1 P_{\theta_0}(T = c_1) + c_2\gamma_2 P_{\theta_0}(T = c_2) = \alpha E_{\theta_0} T$$

حيث إن $g(t;\theta)$ دالة كثافة (أو دالة الاحتمال في حالة المنقطع) للإحصاء T.

ملاحظة:

إن $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ في حالة نموذج مستمر و $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ في حالة نموذج منقطع والاختبار غير عشوائي. بينما في حالة نموذج إحصائي منقطع والاختبار عشوائي فيتم تعيين γ_1 , γ_2 بنفس الأسلوب الوارد في اختبار نيمان وبيرسون في حالة النموذج المنقطع.

لنوضح تطبيق المبرهنة السابقة من خلال بعض الأمثلة.

مثال 1.2.4

إذا كانت $X = (X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع $\mathcal{L}(\xi) \in N(\theta,\sigma^2)$، فاختبر فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_0$، عند مستوى معنوية α.

بما أن النموذج الطبيعي $N(\theta,\sigma^2)$ ينتمي لعائلة النماذج الأسية و $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i$، فحسب المبرهنة (2.2.4) فالاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجمα لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_0$ موجود ويعطى بمنطقة رفض من الشكل:

$$\widetilde{G}_{1\alpha} = \{x : T(x) \leq c_1 \text{ or } T(x) \geq c_2\}$$

وتتحدد قيمة c_1 , c_2 من العلاقتين الأولى والثانية في (12.2.4) على النحو الآتي:

$$W(\widetilde{G}_{1\alpha};\theta_0) = \int_{-\infty}^{c_1} g(t;\theta_0)dt + \int_{c_2}^{+\infty} g(t;\theta_0)dt = \alpha$$

$$\int_{-\infty}^{c_1} tg(t;\theta_0)dt + \int_{c_2}^{+\infty} tg(t;\theta_0)dt = \alpha E_{\theta_0} T$$

وبما أن $\mathcal{L}_{\theta}\left(T(X) = \sum_{1}^{n} X_i\right) = N(n\theta, n\sigma^2)$، فإن:

$$\mathcal{L}_{\theta_0}\left(Z = \frac{T - n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}\right) = N(0,1)$$

وعلى ذلك:

$$W(\tilde{G}_{1\alpha};\theta_0) = \int_{-\infty}^{\frac{c_1-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}}\varphi(z)dz + \int_{\frac{c_2-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}}^{+\infty}\varphi(z)dz = \alpha$$

أي أن:

$$\Phi\left(\frac{c_1-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)+1-\Phi\left(\frac{c_2-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\alpha \Rightarrow$$

$$\Phi\left(\frac{c_2-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{c_1-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)=1-\alpha \qquad (1)$$

وبشكل مشابه:

$$\int_{-\infty}^{c_1} tg(t;\theta_0)dt + \int_{c_2}^{+\infty} tg(t;\theta_0)dt = \int_{-\infty}^{\frac{c_1-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}} z\varphi(z)dz + \int_{\frac{c_2-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}}^{+\infty} z\varphi(z)dz = \alpha\int_{-\infty}^{+\infty} z\varphi(z)dz = 0$$

لكن:

$$\int_{-\infty}^{a_1} z\varphi(z)dz = -\varphi(a_1) \quad , \quad \int_{a_2}^{+\infty} z\varphi(z)dz = \varphi(a_2)$$

إذن:

$$\varphi\left(\frac{c_2-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\varphi\left(\frac{c_1-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)=0 \qquad (2)$$

من العلاقة (2) نجد:

$$\frac{c_2-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}} = -\frac{c_1-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}$$

وبالتعويض في (1) نجد:

$$\Phi\left(-\frac{c_1-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{c_1-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)=1-\alpha \Rightarrow$$

$$1-2\Phi\left(\frac{c_1-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)=1-\alpha \Rightarrow \Phi\left(\frac{c_1-n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}}\right)=\frac{\alpha}{2}$$

وهذا يعني $\frac{c_1 - n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}} = -z_{\alpha/2}$، ومن ثم $\frac{c_2 - n\theta_0}{\sigma\sqrt{n}} = z_{\alpha/2}$، أي أن:

$$c_1 = n\theta_0 - z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{n} \quad , \quad c_2 = n\theta_0 + z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{n}$$

وبالتالي الاختيار المطلوب يكون:

$$\widetilde{G}_{1\alpha} = \left\{ x : \sum_{i=1}^{n} x_i \le \left(n\theta_0 - z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{n}\right) \text{or} \sum_{i=1}^{n} x_i \ge \left(n\theta_0 + z_{\alpha/2}\sigma\sqrt{n}\right) \right\}$$

أو:

$$\widetilde{G}_{1\alpha} = \left\{ x : \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le -z_{\alpha/2} \text{ or } \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \ge z_{\alpha/2} \right\}$$

$$= \left\{ x : \left| \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \ge z_{\alpha/2} \right\} \quad ; \quad \Phi(-z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

وهو نفس الاختبار الذي حصلنا عليه سابقاً بتطبيق المبرهنة (1.2.4)، اختبار ذو ذيلين متساويين.

مثال 2.2.4

تصنع إحدى الشركات قطعاً ميكانيكية بالجملة، وقد ضُبطت كي يكون قطر هذه القطع واحداً ويساوي 12.60 mm. ولاختبار صحة ذلك الضبط أخذت عينة عشوائية من 100 قطعة من إنتاج تلك الآلة، وقيست أقطارها، فكان متوسط القطر $\bar{x} = 12.65\ \text{mm}$ والتباين $s^2 = 0.1584$. هل يمكن اعتبار ضبط الآلة صحيحاً عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

في هذا المثال، يطلب اختبار فرضية العدم $H_0 : \theta_{10} = 12.60\ \text{mm}$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \theta \ne 12.60\ \text{mm}$.

بما أن حجم العينة كبيراً $(n > 30)$ فإن:

$$\mathcal{L}_{\theta}(\overline{X}) \approx N\left(\theta_1, \frac{\theta_2^2}{n}\right) \quad ; \quad \theta = (\theta_1, \theta_2)$$

و $s^{*2} = \frac{n}{n-1} s^2 = 0.1600$ تقدير جيد لتباين المجتمع المجهول θ_2^2، أي أن:

$$\mathcal{L}_{\theta}(\overline{X}) \approx N\left(\theta_1, \frac{s^{*2}}{n}\right) = N(\theta,0.0016)$$

ومن ثم:

$$\mathcal{L}_{\theta_{10}}(\overline{X}) \approx N(12.60, 0.0016) \Rightarrow$$
$$\mathcal{L}_{\theta_{10}}\left(Z = \frac{\overline{X} - 12.60}{0.04}\right) \approx N(0,1)$$

وعلى ذلك فالاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم $\alpha = 0.05$ يعطى بمنطقة الرفض:

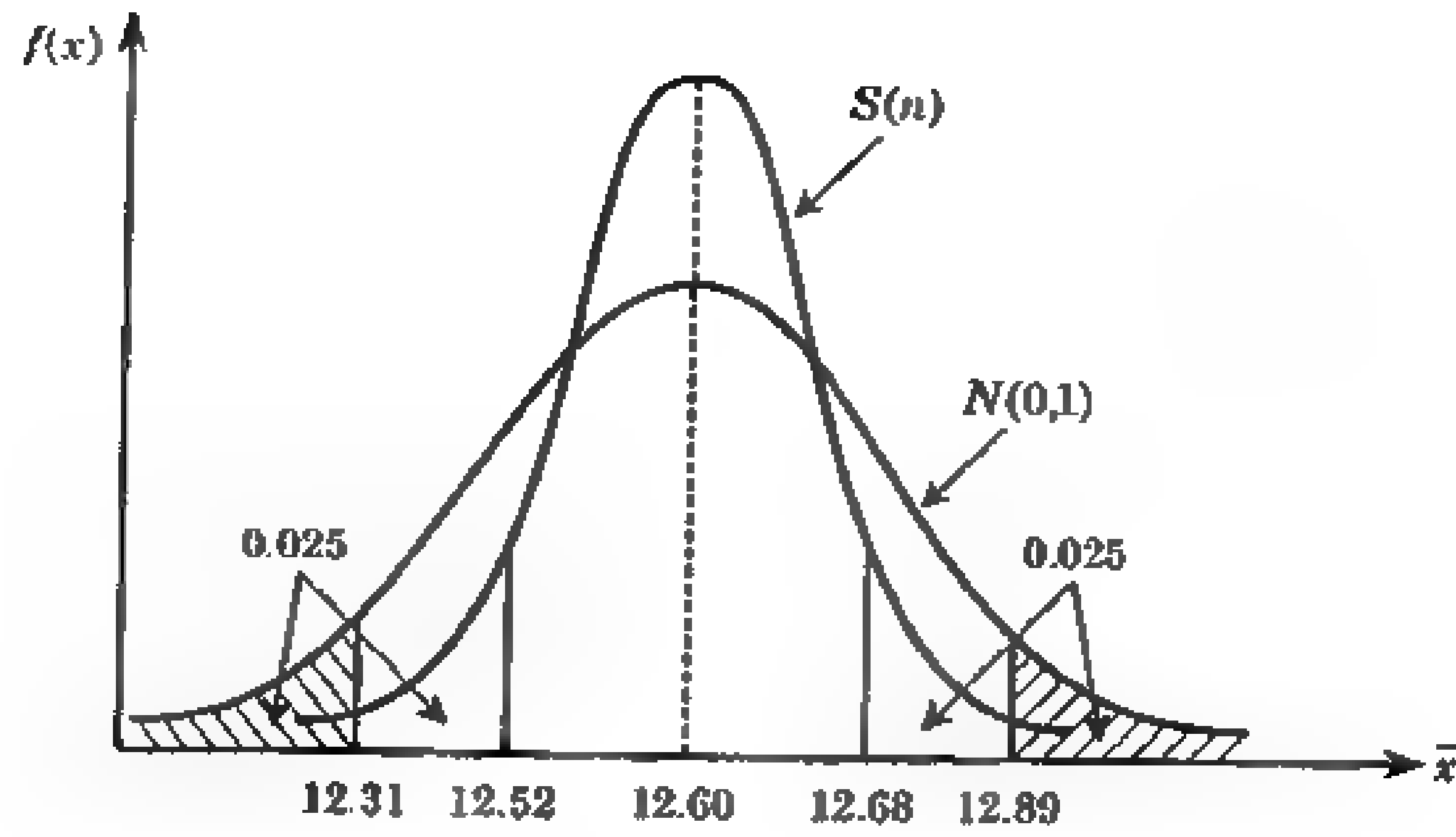
$$\widetilde{G}_{1\alpha} = \left\{x : \left|\frac{\overline{x} - 12.60}{0.04}\right| \geq 1.96\right\}$$
$$= \{x : \overline{x} \leq 12.52 \text{ or } \overline{x} \geq 12.68\} \quad ; \quad \Phi(-z_{\alpha/2}) = 1.96$$

بما أن القيمة الملاحظة $\overline{x} = 12.65$ mm لا تقع ضمن منطقة الرفض $\widetilde{G}_{1\alpha}$، أي أن القياسات التي أجريناها على العينة المشاهدة لا تتعارض مع صحة الفرضية H_0، وهذا يعني عدم وجود دليل على وضع صحة ضبط الآلة موضع الشك، ومن ثم لا يسعنا إلا قبول H_0 (أنظر الشكل 3.2.4).

لنفترض في المثال السابق لاحظنا أن $\overline{x} = 12.65$ mm والتباين $s^2 = 0.1584$ على عينة عشوائية مؤلفة من 10 قطع.

ضمن هذه الشروط:

$$s^{*2} = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{10}{9}(0.1584) = 0.176 \quad , \quad \frac{s^*}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{0.176}{10}} = 0.13$$



شكل (3.2.4)

بما أن حجم العينة صغير $(n = 10 < 30)$، فإن:

$$T = \frac{\overline{X} - \theta_0}{s^*/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 12.65}{0.13}$$

لا يتبع التـــوزيع الطبيعي $N(0,1)$، بل توزيع ستيودنت بـــ $n - 1 = 9$ درجات حريـــة، أي أن:

$$\mathcal{L}_{\theta_0}\left(T = \frac{\overline{X} - 12.60}{0.13}\right) = S_{(9)}$$

وعندئذٍ الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α يعطى بمنطقة الرفض:

$$\widetilde{G}_{1\alpha} = \left\{x : \left|\frac{\bar{x} - 12.60}{0.13}\right| \geq 2.26\right\}$$

$$= \{x : \bar{x} \leq 12.31 \text{ or } \bar{x} \geq 12.89\} \quad ; \quad t_{0.025;9} = 2.26$$

وحيث إن القيمة الملاحظة $\bar{x} = 12.65\text{ mm}$ لا تقع في منطقة الرفض فنقبل فرضية العدم $H_0 : \theta_{10} = 12.60\text{ mm}$.

نلاحظ أن منطقة القبول هي أوسع من سابقتها (عندما $n = 100$)، وهذا طبيعـــي

نتيجة لصغر العينة بحيث تفسر الانحرافات الأكبر نتيجة للعوامـــل العشـــوائية (ليســـت جوهرية) دون أن نحتاج للشك بصحة الفرضية H_0 (أنظر شكل 3.2.4).

مثـال 3.2.4

إذا كـــانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشـــوائية من التوزيع $\mathcal{L}(\xi) \in N(0,\theta^2)$، فأوجد الاختبار غير المتحيز الأقـــوى بانتظـــام بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

بما أن النموذج الطبيعي $N(0,\theta^2)$ ينتمي لعائلة النماذج الأسية و $T(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$ فحسب المبرهنة (2.2.4) الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α موجود ويعطـــى بمنطقة رفض من الشكل:

$$\widetilde{G}_{1\alpha} = \{x : T(x) \leq c_1 \text{ or } T(x) \geq c_2\}$$

وحيث إن:

$$\mathcal{L}_\theta(X_i) = N(0,\theta^2) \Rightarrow \mathcal{L}_\theta\left(\frac{X_i - 0}{\theta}\right) = N(0,1) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}_0\left(\frac{X_i^2}{\theta^2}\right) = \chi^2_{(1)} \Rightarrow \mathcal{L}_0\left(\frac{T}{\theta^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2}{\theta^2}\right) = \chi^2_{(n)}$$

[راجع مبرهنة (I-7.3.2) والنتيجة التالية لها]. إذا رمزنا بـ $Y = \frac{T}{\theta^2}$ وبـــ $g(y;\theta)$ لكثافة توزيعه، فنجد:

$$g(y) = g(y;\theta) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \quad , \quad y = 0$$

ويتعين الثابتان c_1 , c_2 من العلاقتين:

$$W(\widetilde{G}_{1\alpha};\theta_0) = \int_0^{a_1} g(y)dy + \int_{a_2}^{+\infty} g(y)dy = \alpha \quad ; \quad a_j = \frac{c_j}{\theta_0^2} \ , \ j = 1,2 \qquad (1)$$

$$\int_0^{a_1} yg(y)dy + \int_{a_2}^{+\infty} yg(y)dy = \alpha E_{\theta_0} Y = n\alpha \qquad (2)$$

بفرض:

$$\int_0^{a_1} g(y)dy = \alpha_1 \quad , \quad \int_{a_2}^{+\infty} g(y)dy = \alpha_2 \quad ; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

فإن:

$$a_1 = \frac{c_1}{\theta_0^2} = \chi^2_{1-\alpha_1;n} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \theta_0^2 \chi^2_{1-\alpha_1;n}$$

$$a_2 = \frac{c_2}{\theta_0^2} = \chi^2_{\alpha_2;n} \quad \Rightarrow \quad c_2 = \theta_0^2 \chi^2_{\alpha_2;n}$$

وبتطبيق طريقة التكامل بالتجزئة لحساب التكاملين الواردين في الطرف الأيسر من العلاقة (2) والاستفادة من العلاقة (1) نجد:

$$\frac{-2}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} a_1^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{a_1}{2}} + n\int_0^{a_1} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy +$$

$$+ \frac{2}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} a_2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{a_2}{2}} + n\int_{a_2}^{\infty} \frac{1}{2^{n/2}} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} dy =$$

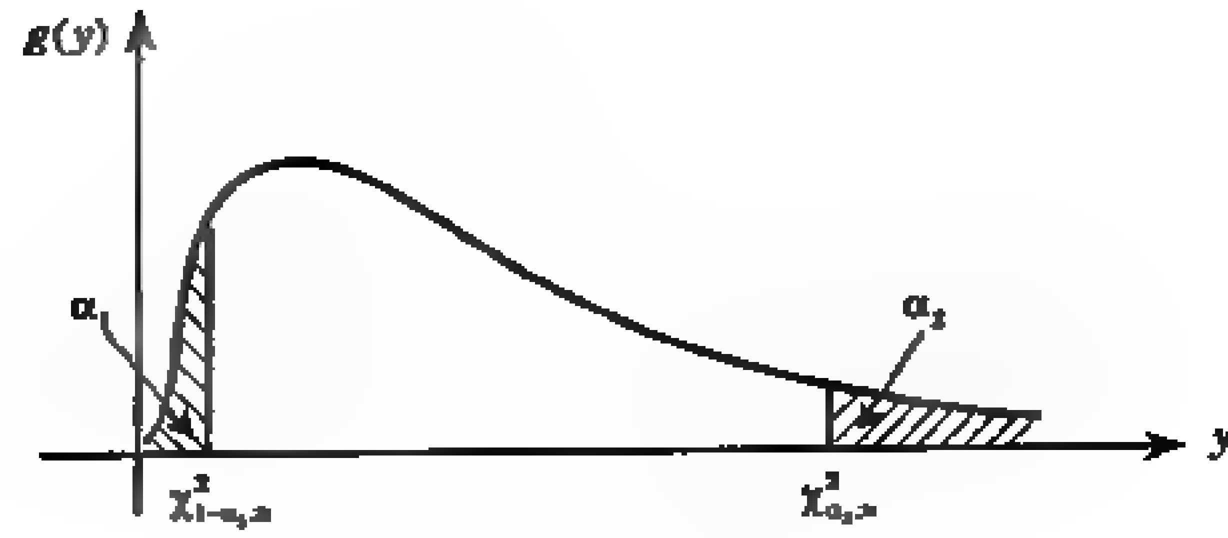
$$\frac{2}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \left(a_2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{a_2}{2}} - a_1^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{a_1}{2}} \right) + n\left(\int_0^{a_1} g(y)dy + \int_{a_2}^{\infty} g(y)dy \right) =$$

$$= \frac{2}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \left(a_2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{a_2}{2}} - a_1^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{a_1}{2}} \right) + n\alpha = n\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{2}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \left(a_2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{a_2}{2}} - a_1^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{a_1}{2}} \right) = 0$$

$$\left(a_2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{a_2}{2}} - a_1^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{a_1}{2}} \right) = 0 \Rightarrow \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{n/2} = \exp\left(\frac{a_2 - a_1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\chi^2_{\alpha_2;n}}{\chi^2_{1-\alpha_1;n}} \right)^{n/2} = \exp\left(\frac{\chi^2_{\alpha_2;n} - \chi^2_{1-\alpha_1;n}}{2} \right) \qquad (3)$$



شكل (4.2.4)

وهذا يعني أن تحقق الشرطين (1) و (2) مكافئ لتحقق الشـــرط (3)، أي بمعرفـــة القيمتين α_1 , α_2 المحققتين للعلاقة (3)، وذلك باستخدام جدول توزيع χ^2 بـــ n درجـــة حرية، نحصل على القيمتين $\chi^2_{1-\alpha_1;n}$ و $\chi^2_{\alpha_2;n}$ ومن ثم نجد الحديـــن الحرجـــين الموافقـــين $c_1 = \theta_0^2\chi^2_{1-\alpha_1;n}$ و $c_2 = \theta_0^2\chi^2_{\alpha_2;n}$. وبالتالي يتعين الاختبار غير المتحيز الأقـــوى بانتظـــام بحجم α لاختبار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_1$ ويعطى بمنطقة الرفض:

$$\widetilde{G}_{1\alpha} = \{x : T(x) \leq \theta_0^2\chi^2_{1-\alpha_1;n} \text{ or } T(x) \geq \theta_0^2\chi^2_{\alpha_2;n}\} \tag{4}$$

لتعيين قيمتي α_1 , α_2 المحققتين للعلاقة (3) نتبع طريقة المحاولة والخطأ، وعادة يتـــم الانطلاق من الحل المبدئي الذي يناظر احتمالات متساوية على الذيلين، وهذه الطريقـــة شاقة، لذا عندما تكون n ليست صغيرة $(n \geq 20)$، فإن الاختبار ذا الذيلين متســـاويي الاحتمـــال $(\alpha/2)$ يعتبر تقـــريباً جيداً للاختبار المعطـــى بالعلاقـــة (4)، لأن النســـبة $\chi^2_{\alpha_2,n}/\chi^2_{1-\alpha_1,n}$ تقترب من النسبة $\chi^2_{\alpha/2,n}/\chi^2_{1-\alpha/2,n}$ بازدياد حجم العينة n، بحيث يصـــبح الفارق بين هاتين النسبتين لا يتجاوز تقريباً 0.02 عندما تكون $n \geq 20$، وهذه الأخـــيرة نتيجة لكون توزيع $\chi^2_{(n)}$ ينتهي إلى التوزيع الطبيعي $N(n,2n)$ عندما $n \to \infty$. وعلـــى ذلك يتعين الحدان الحرجان a_1 , a_2 من العلاقة:

$$\int_0^{a_1} g(y)dy = \int_{a_2}^{\infty} g(y)dy = \frac{\alpha}{2}$$

وباستخدام جدول χ^2 بـــ n درجة حرية نجد:

$$a_1 = \chi^2_{1-\alpha/2;n} \Rightarrow c_1 = \theta_0^2\chi^2_{1-\alpha/2;n}$$
$$a_2 = \chi^2_{\alpha/2;n} \Rightarrow c_2 = \theta_0^2\chi^2_{\alpha/2;n}$$

وبالتالي يكون الاختبار المعطى بمنطقة الرفض:

$$\widetilde{G}_{1\alpha} = \{x : T(x) \le \theta_0^2\chi^2_{1-\alpha/2;n} \text{ or } T(x) \ge \theta_0^2\chi^2_{\alpha/2;n}\}$$

تقريب جيد للاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام $\widetilde{G}_{1\alpha}$ المعطى بالعلاقة (4) لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \ne \theta_0$، عند مستوى معنوية α.

مثـــال 4.2.4

إذا كانت $X = (X_1,..., X_n)$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع بواســــون $\Pi(\theta)$ فاختبر الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \ne \theta_0$، عند مستوى معنوية α.

بما أن نموذج بواسون $\Pi(\theta)$ ينتمي لعائلة النماذج الأسية وأن الإحصاء $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$، فحسب المبرهنة (2.2.4) فالاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضيـــة $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية $H_1 : \theta \ne \theta_0$ موجود ويعطى بمنطقة الرفض المعرفة بالعلاقـــة (11.2.4). وتتحدد الثوابت $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$ من العلاقتين في (12.2.4). وهذا يتطلـــب معرفة توزيع الإحصاء الكافي $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$، عند صحة الفرضية H_0. وهذا يخضع لتوزيـــع بواسون $\Pi(n\theta)$ [انظـــر العلاقة (11.8.39-I)]. إذا رمزنا بـــ $g(t;\theta)$ لدالة احتمـــال توزيع T، فإن العلاقتين (12.2.4) تكتبان على النحو الآتي:

$$\sum_{t=0}^{c_1-1} g(t;\theta_0) + \sum_{t=c_2+1}^{\infty} g(t;\theta_0) + \gamma_1 P_{\theta_0}(T = c_1) + \gamma_2 P_{\theta_0}(T = c_2) = \alpha \qquad (1)$$

$$\sum_{t=1}^{c_1-1} t g(t;\theta_0) + \sum_{t=c_2+1}^{\infty} t g(t;\theta_0) + c_1\gamma_1 P_{\theta_0}(T = c_1) + c_2\gamma_2 P_{\theta_0}(T = c_2) = n\theta_0\alpha \qquad (2)$$

يمكن التأكد بسهولة من أن:

$$tg(t;\theta) = n\theta g(t-1;\theta)$$

وعلى ذلك يمكن كتابة العلاقة (2) على الصورة:

$$n\theta_0\sum_{t=0}^{c_1-2} g(t;\theta_0) + n\theta_0\sum_{t=c_2}^{\infty} g(t;\theta_0) + n\theta_0\gamma_1 P_{\theta_0}(T=c_1-1) + n\theta_0\gamma_2 P_{\theta_0}(T=c_2-1) = n\theta_0\alpha \qquad (2')$$

وبالتالي يمكن كتابة العلاقتين (1) و (2') كما يلي:

$$P_{\theta_0}(T \le c_1 - 1) + 1 - P_{\theta_0}(T \le c_2) + \gamma_1 P_{\theta_0}(T = c_1) + \gamma_2 P_{\theta_0}(T = c_2) = \alpha \qquad (3)$$

$$P_{\theta_0}(T \le c_1 - 2) + 1 - P_{\theta_0}(T \le c_2 - 1) + \gamma_1 P_{\theta_0}(T = c_1 - 1) + \gamma_2 P_{\theta_0}(T = c_2 - 1) = \alpha \qquad (4)$$

لتعيين الثوابت $c_1 , c_2 , \gamma_1 , \gamma_2$ المحققة للمعادلتين (3) و (4) نتبع طريقة المحاولة والخطأ باستخدام جدول توزيع بواسون بمتوسط $n\theta_0$، وعادة يتم الانطلاق من الحل المبدئي الذي يناظر احتمالات متساوية على الذيلين، أي نأخذ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$، وقيم هذا الحل المبدئي نحصل عليها من المعادلتين:

$$P_{\theta_0}(T \le c_1 - 1) + \gamma_1 P_{\theta_0}(T = c_1) = \frac{\alpha}{2} \qquad (5)$$

$$1 - P_{\theta_0}(T \le c_2) + \gamma_2 P_{\theta_0}(T = c_2) = \frac{\alpha}{2} \qquad (6)$$

ويتم تعديل هذا الحل المبدئي حتى نحصل على قيم $c_1 , c_2 , \gamma_1 , \gamma_2$ المحققة للمعادلتين (3) و (4) في آن واحد.

فمثلاً، إذا كانت $n = 10 , \alpha = 0.1$ والفرضيتين $H_0 : \theta = 0.5 , H_1 : \theta \neq 0.5$، فيكون الإحصاء الكافي T خاضعاً لتوزيع بواسون بمتوسط $n\theta_0 = 5$، وبالتالي قيم الحل

المبدئي (قيم $c_1, c_2, \gamma_1, \gamma_2$) نحصل عليها من تحقق الشرطين (5) و (6):

$$P_{\theta_0}(T \le c_1 - 1) + \gamma_1 P_{\theta_0}(T = c_1) = 0.05$$
$$1 - P_{\theta_0}(T \le c_2) + \gamma_2 P_{\theta_0}(T = c_2) = 0.05$$

نلاحظ من جدول توزيع بواسون بمتوسط $n\theta_0 = 5$ أن:

$$P_{\theta_0}(T \le 1) + \gamma_1 P_{\theta_0}(T = 2) = 0.05 \Rightarrow$$
$$0.040 + 0.084\gamma_1 = 0.05 \Rightarrow \gamma_1 = 0.12$$
$$1 - P_{\theta_0}(T \le 9) + \gamma_2 P_{\theta_0}(T = 9) = 0.032 + \gamma_2(0.036) = 0.05 \Rightarrow$$
$$\gamma_2 = 0.50$$

أي أن الحل المبدئي $\gamma_2 = 0.50$ ، $\gamma_1 = 0.12$ ، $c_2 = 9$ ، $c_1 = 2$ وبالتعويض في (3) و (4) نجد:

$$P_{\theta_0}(T \le 1) + \gamma_1 P_{\theta_0}(T = 2) + 1 - P_{\theta_0}(T \le 8) + \gamma_2 P_{\theta_0}(T = 9) = 0.05 + 0.05 = 0.1$$

وهذا يعني أن الحل المبدئي يحقق الشرط (3). أما عند التعويض في (4) نجد:

$$P_{\theta_0}(T \le 0) + 1 - P_{\theta_0}(T \le 8) + \gamma_1 P_{\theta_0}(T = 1) + \gamma_2 P_{\theta_0}(T = 8) =$$
$$= 0.007 + 0.068 + 0.12(0.034) + 0.50(0.065) = 0.112$$

أي أن الشرط غير محقق وهو أكبر من $\alpha = 0.1$. بإتباع أسلوب المحاولة والخطأ نجد عندما نضع $\alpha_1 = 0.06$ بدلاً من $\alpha/2 = 0.05$ في العلاقة (5)، وبالتالي وضع $\alpha_2 = 0.04$ بدلاً من $\alpha/2$ في العلاقة (6) وإجراء الخطوات المشابهة لحالة الذيلين متساويي الاحتمال $(\alpha/2 = 0.05)$ نجد:

$$c_1 = 2 \quad , \quad c_2 = 9 \quad , \quad \gamma_1 = 0.24 \quad , \quad \gamma_2 = 0.22$$

يتحقق الشرطان (3) و (4). وعلى ذلك يكون الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α (اختبار عشوائي) لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = 0.5$ ضد $H_1 : \theta \ne 0.5$ معطى

بدالة الرفض:

$$\varphi^*(x)=\begin{cases}1 & ; \quad T(x)<2 \text{ or } T(x)>9\\ \gamma_1=0.24 & ; \quad T(x)=2\\ \gamma_2=0.22 & ; \quad T(x)=9\\ 0 & ; \quad 2<T(x)<9\end{cases}$$

3.4 الاختبارات الموضعية الأقوى

LOCATION MOST POWERFUL TESTS

تمثل الانحرافات الصغيرة عن فرضية العدم البسيطة $H_0:\theta=\theta_0$ اهتماماً خاصاً في التطبيقات الإحصائية. في هذه الحالة لدراسة خواص الاختبارات يمكن الاقتصار فقط على تحليل سلوك دالة قوة الاختبار $W(\theta)$ في جوار النقطة θ_0. ومثل هذا المدخل يُمكّن غالباً من بناء الاختبار الموضعي الأقوى حتى في حالة عدم وجود الاختبار الأقوى بانتظام للفرضية $H_0:\theta=\theta_0$.

لنفترض θ معلمة وحيدة البعد (سلمية)، وشروط الانتظام الواردة في مقدمة المبرهنة (1.2.4) محققة. وبالإضافة لذلك، سنفترض أن دالة القوة $W(G_{1\alpha};\theta)$، لأي اختبار $G_{1\alpha}$ لاختبار فرضية العدم $H_0:\theta=\theta_0$، قابلة للنشر وفق متسلسلة تايلور في جوار النقطة $\theta=\theta_0$:

$$W(\theta)=\alpha+(\theta-\theta_0)W'(\theta_0)+\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2!}W''(\theta_0)+\ldots\ldots \; ; \; W(\theta_0)=\alpha \qquad (1.3.4)$$

ليكن المطلوب اختبار فرضية العدم $H:\theta=\theta_0$ ضد الفرضية البديلة وحيدة الجانب من اليمين $H_1^+:\theta>\theta_0$. عندئذٍ للحصول على الاختبار الموضعي الأقوى وحيد الجانب لابد من جعل المقدار:

$$W'(\theta_0)=\int_{G_{1\alpha}}L_1(x;\theta_0)dx$$

أعظمياً عند القيد:

$$W(\theta_0) = \int_{G_{1\alpha}} L(x;\theta_0)dx = \alpha$$

بشكل مشابه لإثبات مبرهنة نيمان وبيرسون [مبرهنة (1.2.2)] يمكن إثبات أن الاختبار الأمثل (الاختبار الموضعي الأقوى) لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية $H_1^+ : \theta > \theta_0$، عند مستوى معنوية α، يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^+ = \left\{x : \frac{L_1(x;\theta_0)}{L(x;\theta_0)} \geq c_\alpha^+\right\} \qquad (2.3.4)$$

ويتحدد الثابت c_α^+ من الشرط $W(\theta_0) = \alpha$. ويمكن إثبات أيضاً أن الاختبار الأمثل لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1^- : \theta < \theta_0$، عند مستوى معنوية α يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^- = \left\{x : \frac{L_1(x;\theta_0)}{L(x;\theta_0)} \leq c_\alpha^-\right\} \qquad (3.3.4)$$

ولبناء الاختبار الموضعي الأقوى لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية ذات الجانبين $H_1 : \theta \neq \theta_0$، عند مستوى معنوية α، لابد من وضع شرط (قيد) إضافي يتمثل في أن البحث يتم ضمن عائلة الاختبارات غير المتحيزة، أي أن $W'(\theta_0) = 0$. عندئذٍ الاختبار الموضعي الأقوى هو عبارة عن الاختبار الذي يجعل $W''(\theta_0)$ أعظمية [أمثال $(\theta - \theta_0)^2$ في العلاقة (1.3.4)]. وكما أثبتنا المبرهنة (1.2.4) يمكن إثبات أن الاختبار الموضعي الأقوى في هذه الحالة يعطى بمنطقة الرفض من الشكل:

$$\begin{aligned}\tilde{G}_{1\alpha} &= \{x : L_2(x;\theta_0) \geq c_1 L_1(x;\theta_0) + cL(x;\theta_0)\} \\ &= \left\{x : \frac{L_2(x;\theta_0)}{L(x;\theta_0)} \geq c_1 \frac{L_1(x;\theta_0)}{L(x;\theta_0)} + c\right\} \qquad (4.3.4)\end{aligned}$$

حيث إن:

$$L_2(x;\theta_0)=\frac{\partial}{\partial\theta}L_1(x;\theta_0)$$

ويتحدد الثابتان c_1, c_2 من الشرطين:

$$W(\theta_0)=\alpha \quad , \quad W'(\theta_0)=0$$

مثـال 1.3.4

إذا كانت $X=(X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\theta,\sigma^2)$ ، فـأوجد الاختبار الموضعي الأقوى بحجم α لاختبار الفرضية $H_0:\theta=\theta_0$ ضد $H_1:\theta\neq\theta_0$.

بما أن:

$$L(x;\theta)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)^2\right]$$

فإن:

$$L_1(x;\theta)=\frac{\partial L(x;\theta)}{\partial\theta}=\frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}-\theta)L(x;\theta)$$

$$L_2(x;\theta)=\frac{\partial L_1(x;\theta)}{\partial\theta}=-\frac{n}{\sigma^2}L(x;\theta)+\frac{n^2}{\sigma^4}(\bar{x}-\theta)^2L(x;\theta)$$

وعلى ذلك:

$$\frac{L_1(x;\theta_0)}{L(x;\theta_0)}=\frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}-\theta_0) \quad , \quad \frac{L_2(x;\theta_0)}{L(x;\theta_0)}=\frac{n^2}{\sigma^4}(\bar{x}-\theta_0)^2-\frac{n}{\sigma^2}$$

وبالتالي فالمتباينة المعرفة لمنطقة الرفض (4.3.4):

$$\frac{L_2(x;\theta_0)}{L(x;\theta_0)}\geq c_1\frac{L_1(x;\theta_0)}{L(x;\theta_0)}+c$$

تكتب على الصورة:

$$\frac{n^2}{\sigma^4}(\bar{x}-\theta_0)^2-\frac{n}{\sigma^2}\geq c_1\frac{n}{\sigma^2}(\bar{x}-\theta_0)+c$$

وإذا رمزنا بـ $T(x)=\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\theta_0)$، فنحصل على المتباينة المكافئة:

$$T^2(x)\geq k_1T(x)+k_2 \quad ; \quad k_1=c_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ k_2=1+\frac{\sigma^2}{n}c$$

ولكي يكون شـرط عدم التحيز للاختبار محققاً، يجب أن تكون منطقة الرفض الموافقـة متناظرة، لأن توزيع الإحصـاء $T(X)$، عند فرضية العدم H_0، هو $N(0,1)$ (متنـاظر بالنسبة للصفر)، وهذه الخاصة محققة فقط عندما $k_1=0$. وفي هذه الحالة تكتب المتباينـة الأخيرة على الشكل:

$$T^2(x)\geq k_2 \ \Rightarrow\ |T(x)|\geq k \quad ; \quad k=\sqrt{k_2}$$

ويتحدد الثابت k من الشرط $W(\theta_0)=\alpha$:

$$W(\theta_0)=\int_{-\infty}^{-k}\varphi(t;\theta_0)dt+\int_{k}^{+\infty}\varphi(t;\theta_0)dt=\alpha\Rightarrow$$
$$2\Phi(-k)=\alpha \ \Rightarrow\ k=t_{\alpha/2}$$

وهذا يعني أن الاختبار الموضعي الأقوى بحجم α (4.3.4) يعطى بمنطقة الرفض:

$$\widetilde{G}_{1\alpha}=\{x:|T(x)|\geq t_{\alpha/2}\}$$

وهي ذات منطقة الرفض التي توصلنا إليها في البند (2.4) وكذلك في المثـال (1.2.4). وهذه النتيجة متوقعة، لأن الاختبار الموضعي غير المتحيز الأقوى وبحجم α يجب أن ينطبـق على الاختبـار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α، وذلك عند اختبـار فرضية العـدم $H_0:\theta=\theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1:\theta\neq\theta_0$، عندما يكون هذا الأخير موجوداً.

لنرَ من جديد الاختبارين وحيدي الجانب المعرفين بـالعلاقتين (2.3.4) و (3.3.4) وذلك بتحليل أكثر تفصيلاً باستخدام مساهمة العينة $U(X;\theta)$ وخواصها [راجع البنـد

.[(6.4-I)

نلاحظ أن:

$$\frac{L_1(X;\theta_0)}{L(X;\theta_0)}=\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(X;\theta_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(X_i;\theta_0)=U(X;\theta_0)$$

ومن خواص مساهمة العينة $U(X;\theta)$ في حالة نماذج نظامية:

$$E_{\theta_0}U(X;\theta_0)=0 \quad , \quad \underset{\theta_0}{\operatorname{var}}U(X;\theta_0)=ni(\theta_0)$$

حيث إن $i(\theta)$ معلــومات فيشر حول المعلمة θ المتوفرة في ملاحظة واحدة X_i [انظــر العلاقة (2.7.4-I)].

حسب مبرهنة النهاية المركزية:

$$\mathcal{L}_0\left(\frac{U(X;\theta_0)}{\sqrt{ni(\theta_0)}}\right)=N(0,1) \qquad (5.3.4)$$

عندما $n\to\infty$. وعلى ذلك، عندما تكون n كبيرة، يمكن استخدام التوزيـــع الطبيعـــي المعياري $N(0,1)$ كتقريب جيد لتوزيع $\left(U(X;\theta_0)/\sqrt{ni(\theta_0)}\right)$. وهذا يعني أنه لتعيـــين الحدين في (2.3.4) و (3.3.4) يمكن استخدام التقريب الطبيعي:

$$c_\alpha^+\approx t_\alpha\sqrt{ni(\theta_0)} \quad , \quad c_\alpha^-\approx -t_\alpha\sqrt{ni(\theta_0)}$$

حيث إن $\Phi(-t_\alpha)=\alpha$.

هكذا، نكون قد توصلنا إلى الحل العام لمسألة بناء الاختبـــار الموضعـــي الأقـــوى للاختبارات وحيدة الجانب من أجل عينات كبيرة الحجم:

$$G_{1\alpha}^+=\left\{x:U(x;\theta)\ge t_\alpha\sqrt{ni(\theta_0)}\right\} \qquad (6.3.4)$$

$$G_{1\alpha}^-=\left\{x:U(x;\theta)\le -t_\alpha\sqrt{ni(\theta_0)}\right\} \qquad (7.3.4)$$

بتطبيق أسلوب اتحاد منطقتي الرفض وحيدتي الجانب الواردة في بداية البند (2.4) يمكن بناء الاختبار ذي الجانبين المتناظر:

$$G_{1\alpha} = \left\{x : \left|U(x;\theta)\right| \geq t_{\alpha/2}\sqrt{ni(\theta_0)}\right\} \quad , \quad \Phi(-t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} \qquad (8.3.4)$$

لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

ومن خاصة تناظر التوزيع المقارب للمتغير العشوائي $\left(U(X;\theta_0)/\sqrt{ni(\theta_0)}\right)$ ينتج أن الاختبار المعرف بالعلاقة (8.3.4) غير متحيز $(W'(G_{1\alpha};\theta_0) = 0)$ ولا يوجد اختبار آخر غير متحيز له قوة أكبر تقاربياً. ومن ثم يعتبر الاختبار (8.3.4) الأمثل تقاربياً ضد البدائل الموضعية.

نلاحظ أن الاختبار التقريبي المعرف بالعلاقة (8.3.4) ينطبق على الاختبار (غير التقريبي) الذي حصلنا عليه في المثال (1.3.4) من أجل النموذج الطبيعي $N(\theta,\sigma^2)$ بمتوسط غير معلوم وذلك بناءً على الإحصاء $T(X) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X} - \theta_0)$، لأنه في هذه الحالة [راجع مثال (2.7.4-I)]:

$$U(X;\theta_0) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}T(X) \quad , \quad i(\theta) = \frac{1}{\sigma^2}$$

مثال 2.3.4

لتكن $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع كوشي $K(\theta)$، ونريد اختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_0$، عند مستوى أهمية α وافتراض n كبيرة.

كما نعلم دالة كثافة نموذج كوشي:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2} \quad ; \quad -\infty < \theta < +\infty \quad , \quad -\infty < x < +\infty$$

ومن ثم:

$$U(X;\theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(X_i;\theta) - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \theta}{1 + (X_i - \theta)^2}$$

$$i(\theta) = E_\theta\left[\frac{\partial \ln f(X_i,\theta)}{\partial\theta}\right]^2 = \frac{1}{2}$$

وبالتالي عندما تكون n كبيرة فإن الاختبار المطلوب يعطى تقريباً بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha} = \left\{x : \left|\frac{U(x;\theta_0)}{\sqrt{n/2}}\right| \geq t_{\alpha/2}\right\}$$

$$= \left\{x : \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \theta_0}{1 + (x_i - \theta_0)^2}\right| \geq t_{\alpha/2}\right\} \quad ; \quad \Phi(-t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

4.4 اختبارات الفرضيات وفترات الثقة

TESTS OF HYPOTHESES AND CONFIDENCE INTERVALS

بمقارنة مسألة اختبار فرضية عدم بسيطة $H_0 : \theta = \theta_0$ حول معلمة θ في نموذج $F = \{F(x;\theta) ; \theta \in \Theta\}; \Theta \subset R$ ومسألة بناء فترة الثقة لهذه المعلمة، نلاحظ وجود علاقة واضحة بينهما.

لنفترض من أجل كل $\theta_0 \in \Theta$ بني اختبار ما $G_{1\alpha} = G_{1\alpha}(\theta_0)$ لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$، ولنرمز بـ $G_{0\alpha}(\theta_0) = \overline{G}_{1\alpha}(\theta_0)$ لمنطقة قبول الفرضية H_0. بذلك نحصل على عائلة الفئات الجزئية (مناطق قبول) من فضاء العينة G:

$$\{G_{0\alpha}(\theta) \; ; \; \theta \in \Theta\} \quad (1.4.4)$$

لنعرف الآن عند كل ملاحظة $x \in G$ الفئة الجزئية $\mathcal{y}(x) \subset \Theta$ على النحو الآتي:

$$\mathcal{y}(x) = \{\theta : x \in G_{0\alpha}(\theta)\} \quad (2.4.4)$$

نحصل بذلك من فضاء المعلمة Θ، على عائلة من الفئات الجزئية:

$$\{\mathcal{S}(x) : x \in G\} \tag{3.4.4}$$

إن الحادثين:

$$\{\theta \in \mathcal{S}(x)\} \quad \text{و} \quad \{x \in G_{0\alpha}(\theta)\}$$

متكافئان؛ لأن وقوع أحدهما يقتضي وقوع الآخر، لذا فإن:

$$P_\theta(\theta \in \mathcal{S}(X)) = P_\theta(X \in G_{0\alpha}(\theta)) \quad ; \quad \theta \in \Theta \tag{4.4.4}$$

لكن:

$$P_\theta(X \in G_{0\alpha}(\theta)) = 1 - \alpha = \gamma$$

إذن:

$$P_\theta(\theta \in \mathcal{S}(X)) = 1 - \alpha \quad ; \quad \theta \in \Theta \tag{5.4.4}$$

وهذا يعني أن $\mathcal{S}(X)$ تعتبر $100(1-\alpha)\% = 100\gamma\%$ فترة ثقة من أجل θ والعكس صحيح، أي إذا كانت $\mathcal{S}(X)$ عبارة عن $100\gamma\%$ فترة ثقة للمعلمة θ:

$$P_\theta(\theta \in \mathcal{S}(X)) = \gamma$$

فإن:

$$P_\theta(X \in G_{0\alpha}(\theta)) = \gamma \Rightarrow P_\theta(X \in G_{1\alpha}(\theta)) = 1 - \gamma = \alpha \quad ; \quad \theta \in \Theta \tag{6.4.4}$$

وهذا يعني أن الفئة:

$$G_{0\alpha}(\theta_0) = \{x : \theta_0 \in \mathcal{S}(x)\}$$

تعين منطقة قبول [$G_{1\alpha}(\theta_0) = \overline{G}_{0\alpha}(\theta_0)$ منطقة رفض] فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ بمستوى معنوية α.

هكذا، مسألتا بناء فترة ثقة لمعلمة θ واختبار فرضية بسيطة $H_0 : \theta = \theta_0$ بالنسبة لـ θ متعاكستان. وهذا يعني إذا علمنا من أجل نموذج إحصائي ما حل أحدهما، فحسب الأسلوب الوارد أعلاه يمكن الحصول على حل الآخر. وبعبارة أخرى بمعرفة $100\gamma\%$ فترة ثقة لـ θ يمكن بسهولة الوصول إلى الاختبار $G_{1\alpha}(\theta_0)$ للفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$، والعكس صحيح. وإذا كان الاختبار أقوى بانتظام (أو غير متحيز أقوى بانتظام) بحجم α فإن $100(1-\alpha)\%$ فترة الثقة التي نحصل عليها تكون الأضيق (الأقصر) والعكس صحيح.

لنوضح ما سبق من خلال الأمثلة الآتية:

مثال 1.4.4

إذا كانت $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta, \sigma^2)$، فأوجد $100\gamma\%$ $(\gamma = 1 - \alpha)$ فترة ثقة للمعلمة θ بناءً على الاختبار الأمثل (غير المتحيز الأقوى بانتظام) للفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_0$، عند مستوى معنوية α.

كما رأينا سابقاً أن الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام وبحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_0$ يعطى بمنطقة الرفض (2.2.4):

$$\widetilde{G}_{1\alpha} = \left\{ x : \frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\overline{x} - \theta_0| \geq t_{\alpha/2} \right\} \quad ; \quad \Phi(-t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

وعلى ذلك فمنطقة القبول:

$$\widetilde{G}_{0\alpha} = \left\{ x : \frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\overline{x} - \theta_0| < t_{\alpha/2} \right\} \quad ; \quad \Phi(-t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

ومن ثم الفئة $g(x)$ تكتب على الصورة:

$$g(x) = \left\{ \theta : \frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\overline{x} - \theta| < t_{\alpha/2} \right\} = \left\{ \theta : \overline{x} - \frac{\sqrt{n}}{\sigma} t_{\alpha/2} < \theta < \overline{x} + \frac{\sqrt{n}}{\sigma} t_{\alpha/2} \right\}$$

وبالتالي، تعتبر الفترة $\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2} \right)$ الأقصر ضمن $100(1-\alpha)\%$ فترات ثقة للمعلمة

غير المعلومة θ في النموذج $N(\theta,\sigma^2)$. وهي نفس النتيجة التي تحصلنا عليها باتباع الطريقة العامة لبناء فترات الثقة [الفقرة (I-1.4.7)].

إذا كانت الفرضية المختبرة $H_0:\theta=\theta_0$ ضد $H_1^+:\theta>\theta_0$، فإن الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α يعطى بمنطقة الرفض (1.2.3):

$$G_{1\alpha}^{*+}=\left\{x:\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\theta_0)\geq t_\alpha\right\}\Rightarrow G_{0\alpha}^{*+}=\left\{x:\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\theta_0)<t_\alpha\right\}\ ;\ \Phi(-t_\alpha)=\alpha$$

وعلى ذلك:

$$\mathcal{y}(x)=\left\{\theta:\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\theta)<t_\alpha\right\}=\left\{\theta:\theta>\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\alpha\right\}\quad;\quad\Phi(-t_\alpha)=\alpha$$

وبالتالي $100(1-\alpha)\%$ فترة الثقة الأقصر وحيدة الجانب (الأدنى) للمعلمة θ هي:

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\alpha\,;\infty\right)$$

وبشكل مشابه، باستخدام منطقة الرفض (3.2.3):

$$G_{1\alpha}^{*-}=\left\{x:\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\theta_0)\leq -t_\alpha\right\}\Rightarrow G_{0\alpha}^{*-}=\left\{x:\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\theta_0)>-t_\alpha\right\}\ ;\ \Phi(-t_\alpha)=\alpha$$

نجد:

$$\mathcal{y}(x)=\left\{\theta:\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{x}-\theta)>-t_\alpha\right\}=\left\{\theta:\theta<\bar{x}+t_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}$$

وبالتالي $100(1-\alpha)\%$ فترة الثقة الأقصر وحيدة الجانب (الأعلى) هي:

$$\left(-\infty\,;\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}t_\alpha\right)$$

مثال 2.4.4

إذا كانت $X=(X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $N(\mu,\theta^2)$، وعلمت أن $100\gamma\%$ فترة ثقة الأقصر للتباين غير المعلوم θ^2 هي:

$$\Delta_\gamma^*(X)=\left(\frac{1}{\chi^2_{\alpha_2;n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\ ,\ \frac{1}{\chi^2_{1-\alpha_1,n}}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right)$$

حيث إن $\alpha_1+\alpha_2=\alpha=1-\gamma$ ويتعين $\chi^2_{\alpha_2,n}$، $\chi^2_{1-\alpha_1,n}$ من المساواة:

$$\left(\frac{\chi^2_{\alpha_2;n}}{\chi^2_{1-\alpha_1;n}}\right)^{n/2}=\exp\left(\frac{\chi^2_{\alpha_2,n}-\chi^2_{1-\alpha_1,n}}{2}\right) \qquad (7.4.4)$$

فأوجد الاختبار الأمثل بحجم α لاختبار الفرضية $H_0:\theta=\theta_0$ ضد $H_1:\theta\neq\theta_0$.

يمكن كتابة $100\gamma\%$ فترة ثقة للمعلمة θ^2 على الشكل:

$$y(x)=\left\{\theta^2:\frac{1}{\chi^2_{\alpha_2;n}}\sum_{1}^{n}(x_i-\mu)^2<\theta^2<\frac{1}{\chi^2_{1-\alpha_1,n}}\sum_{1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

وعلى ذلك:

$$G_{0\alpha}(\theta_0)=\left\{x:\frac{1}{\theta_0^2}\sum_{1}^{n}(x_i-\mu)^2<\chi^2_{\alpha_2,n}\right\}\cup\left\{x:\frac{1}{\theta_0^2}\sum_{1}^{n}(x_i-\mu)^2>\chi^2_{1-\alpha_1,n}\right\}$$

ومن ثم:

$$G_{1\alpha}(\theta_0)=\left\{x:\frac{1}{\theta_0^2}\sum_{1}^{n}(x_i-\mu)^2\le\chi^2_{1-\alpha_1;n}\right\}\cup\left\{x:\frac{1}{\theta_0^2}\sum_{1}^{n}(x_i-\mu)^2\ge\chi^2_{\alpha_2;n}\right\}$$
. . . . . (8.4.4)

ومنطقة الرفض هذه عبارة عن اتحاد منطقتي الرفض الأقوى بانتظام وحيدتي الجانب المعرفتين بالعلاقتين (16.2.4) و (17.2.4) [راجع المثال (2.2.3)].

هل يعتبر الاختبار (8.4.4) غير متحيز؟

لنرمز لدالة كثافة ودالة توزيع $\chi^2_{(n)}$ بـ $f_n(.)$ و $F_n(.)$ على الترتيب. وبما أن:

$$\mathcal{L}_\theta\left(\frac{T(X)}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2\right) = \chi^2_{(n)}$$

فإن:

$$\begin{aligned} W(\theta) &= W(G_{1\alpha};\theta) = P_\theta\left(T(X) \le \theta_0^2\chi^2_{1-\alpha_1;n}\right) + P_\theta\left(T(X) \ge \theta_0^2\chi^2_{\alpha_2;n}\right) \\ &= P_\theta\left(\frac{T(X)}{\theta^2} \le \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^2 \chi^2_{1-\alpha_1;n}\right) + P_\theta\left(\frac{T(X)}{\theta^2} \ge \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^2 \chi^2_{\alpha_2;n}\right) \\ &= F_n\left(y\chi^2_{1-\alpha_1;n}\right) + 1 - F_n\left(y\chi^2_{\alpha_2;n}\right) = \psi(y) \quad , \quad y = \left(\frac{\theta_0}{\theta}\right)^2 \end{aligned}$$

وعلى ذلك:

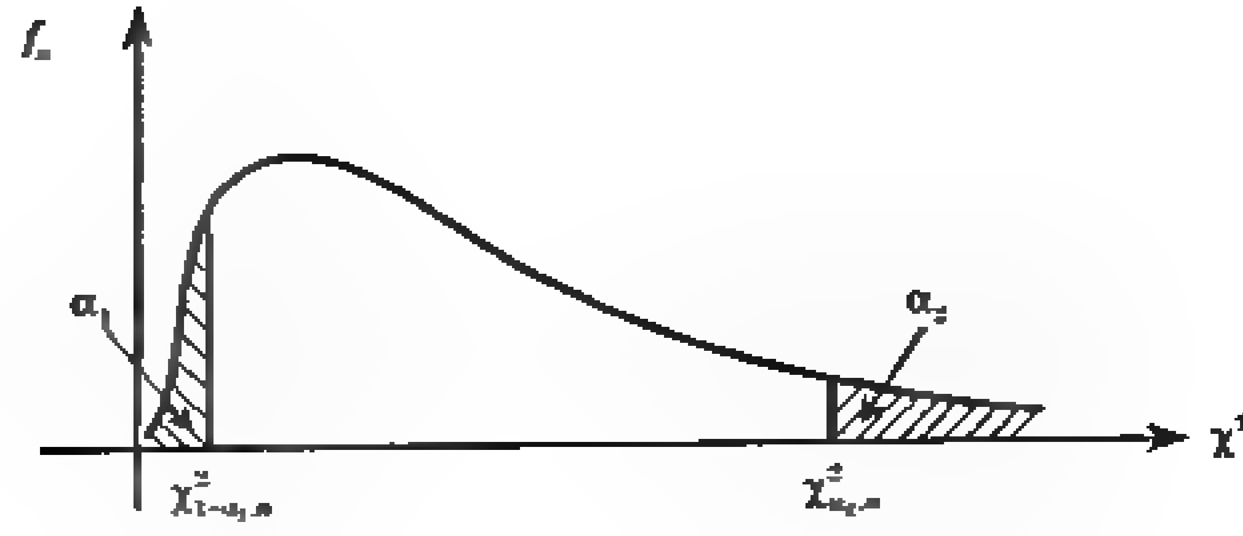
$$\begin{aligned} \psi'(y) &= \chi^2_{1-\alpha_1;n} f_n\left(y\chi^2_{1-\alpha_1;n}\right) - \chi^2_{\alpha_2;n} f_n\left(y\chi^2_{\alpha_2;n}\right) = \\ &= \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\left(\chi^2_{1-\alpha_1;n}\right)^{n/2} e^{-\frac{y}{2}\chi^2_{1-\alpha_1;n}} - \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\left(\chi^2_{\alpha_2;n}\right)^{n/2} e^{-\frac{y}{2}\chi^2_{\alpha_2;n}} \end{aligned}$$

وبناءً على العلاقة (7.4.4) نجد:

$$\begin{aligned} \psi'(y) &= \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\left(\chi^2_{1-\alpha_1;n}\right)^{n/2}\left[e^{-\frac{y}{2}\chi^2_{1-\alpha_1;n}} - \left(\frac{\chi^2_{\alpha_2;n}}{\chi^2_{1-\alpha_1;n}}\right)^{n/2} e^{-\frac{y}{2}\chi^2_{\alpha_2;n}}\right] \\ &= \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\left(\chi^2_{1-\alpha_1;n}\right)^{n/2}\left(e^{-\frac{y}{2}\chi^2_{1-\alpha_1;n}} - e^{\frac{\chi^2_{\alpha_2;n}-\chi^2_{1-\alpha_1;n}}{2} - \frac{y}{2}\chi^2_{\alpha_2;n}}\right) \\ &= \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\left(\chi^2_{1-\alpha_1;n}\right)^{n/2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2_{1-\alpha_1;n}}\left(e^{\frac{1-y}{2}\chi^2_{1-\alpha_1;n}} - e^{\frac{1-y}{2}\chi^2_{\alpha_2;n}}\right) \end{aligned}$$

وبما أن:

$$\chi^2_{1-\alpha_1;n} < \chi^2_{\alpha_2;n}$$



فإن:

$$\psi'(y) = \begin{cases} <0 & ; \quad y<1 \\ =0 & ; \quad y=1 \\ >0 & ; \quad y>1 \end{cases}$$

وهذا يعني أن دالة قوة الاختبار $W(\theta)$ متناقصة على الفترة $(0,\theta_0)$، ومتزايدة على الفترة (θ_0,∞)، بينما $W(\theta_0)=\alpha$، أي أن الاختبار (8.4.4) غير متحيز. وحسب المبرهنة (1.2.4) فإن الاختبار (8.4.4) يعتبر غير المتحيز والأقوى بانتظام في مسألة اختبار الفرضية $H_0:\theta=\theta_0$ ضد الفرضية ذات الجانبين $H_1:\theta\neq\theta_0$. وهذا يتفق مع أن فترة الثقة Δ^*_γ هي الأقصر ضمن كل $100(1-\alpha)\%$ فترات ثقة من أجل التباين غير المعلوم θ^2 في النموذج $N(\mu,\theta^2)$.

يمكن تطبيق الطريقة المبنية على العلاقة بين مسألتي التقدير بفترة واختبار الفرضية في حالات أعم، وذلك عندما يطلب تقدير ليس كل مركبات المتجه θ (في حالة معلمة متعددة الأبعاد)، بل فقط متجه جزئي ما $\theta^{(1)}$ [حيث إن $\theta=\left(\theta^{(1)},\theta^{(2)}\right)$]، ويقال عندئذٍ عن مركبات المتجه $\theta^{(2)}$ بأنها مزعجة أو مغفلة **Muisance parameters**.

فمثلاً، لتكن لدينا عائلة $100\gamma\%$ فترات ثقة $\mathcal{y}(x)$ من أجل $\theta^{(1)}$، أي أن عائلة الفئات الجزئية للفئة المعلمية Θ $\theta^{(1)}=\left\{\theta^{(1)}:\left(\theta^{(1)},\theta^{(2)}\right)\in\Theta\right.$ المحققة للشرط:

$$P_{\theta^{(1)}}\left(\theta^{(1)}\in\mathcal{y}(X)\right)\geq\gamma \quad , \quad \forall\left(\theta^{(1)},\theta^{(2)}\right)\in\Theta$$

ولنعين من أجل متجه جزئي معين $\theta_0^{(1)}$ الفئة الجزئية:

$$G_{0;1-\gamma} = G_{0;1-\gamma}\left(\theta_0^{(1)}\right) \quad ; \quad \alpha = 1-\gamma$$

من فضاء العينة G بناء على القاعدة الواردة أعلاه:

$$G_{0;1-\gamma}\left(\theta_0^{(1)}\right) = \left\{x : \theta_0^{(1)} \in \mathcal{G}_\gamma(x)\right\}$$

عندئذٍ:

$$P_{\left(\theta_0^{(1)},\theta^{(2)}\right)}\left(X \in G_{0;1-\gamma}\right) = P_{\left(\theta_0^{(1)},\theta^{(2)}\right)}\left(\theta_0^{(1)} \in \mathcal{G}_\gamma(x)\right) \geq \gamma$$

أو:

$$P_{\left(\theta_0^{(1)},\theta^{(2)}\right)}\left(X \in \overline{G}_{0;1-\gamma}\right) \leq 1-\gamma = \alpha$$

وبالتالي المنطقة:

$$G_{1\alpha} = \overline{G}_{0;1-\gamma} \quad , \quad \alpha = 1-\gamma$$

تعرف الاختبار بمستوى معنوية α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta^{(1)} = \theta_0^{(1)}$ (فرضية مركبة، لأن المتجه الجزئي $\theta^{(2)}$ غير معين). وبشكل مشابه لما ورد سابقاً يمكن بإجراء مناقشة معاكسة: الانتقال من مسألة اختبار فرضية إلى مسألة التقدير بفترة.

سنوضح كيفية تطبيق هذه الطريقة من خلال بعض الأمثلة لاختبار فرضيات من أجل النموذج الطبيعي العام $N(\theta_1, \theta_2^2)$.

مثال 3.4.4

إذا كانت $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي عام $N(\theta_1, \theta_2^2)$، وعلمت أن $100\gamma\% = 100(1-\alpha)\%$ فترة ثقة للمتوسط θ_1، وكذلك $100\gamma\%$ فترة ثقة للتباين θ_2^2، هما على الترتيب [راجع الفقرة (3.4.7-I)]:

$$\left(\overline{X} - \frac{S(X)}{\sqrt{n-1}} t_{\alpha/2;n-1} < \theta_1 < \overline{X} + \frac{S(X)}{\sqrt{n-1}} t_{\alpha/2;n-1}\right)$$

$$\left(\frac{nS^2(X)}{\chi^2_{\alpha_2;n-1}} < \theta_2^2 < \frac{nS^2(X)}{\chi^2_{1-\alpha_1;n-1}}\right) \tag{9.4.4}$$

حيث يتحدد $\chi^2_{1-\alpha_1;n-1}$ ، $\chi^2_{\alpha_2;n-1}$ من العلاقة (7.4.4). فأوجد الاختبار بحجم α لاختبار:

1. الفرضية $H_0 : \theta_1 = \theta_{10}$ ضد $H_1 : \theta_1 \neq \theta_{10}$.
2. الفرضية $H_0 : \theta_2 = \theta_{20}$ ضد $H_1 : \theta_2 \neq \theta_{20}$.

(1) بما أن:

$$y(x) = \left\{\theta_1 : \sqrt{n-1}\left|\frac{\bar{x}-\theta_1}{s(x)}\right| < t_{\alpha/2;n-1}\right\}$$

فإن:

$$G_{0\alpha}(\theta_{10}) = \left\{x : \sqrt{n-1}\left|\frac{\bar{x}-\theta_{10}}{s(x)}\right| < t_{\alpha/2;n-1}\right\}$$

ومن ثم الاختبار المطلوب يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}(\theta_{10}) = \left\{x : \sqrt{n-1}\left|\frac{\bar{x}-\theta_{10}}{s(x)}\right| \geq t_{\alpha/2;n-1}\right\} \tag{10.4.4}$$

(2) بشكل مشابه، بناءً على معرفة $100\gamma\%$ فترة ثقة للتباين θ_2^2 نجد:

$$G_{0\alpha}(\theta_{20}) = \left\{x : ns^2(x) < \theta_{20}^2\chi^2_{\alpha_2;n-1}\right\} \cup \left\{x : ns^2(x) > \theta_{20}^2\chi^2_{1-\alpha_1;n-1}\right\}$$

ومن ثم:

$$G_{1\alpha}(\theta_{20}) = \left\{x : ns^2(x) \geq \theta_{20}^2\chi^2_{\alpha_2;n-1}\right\} \cup \left\{x : ns^2(x) \leq \theta_{20}^2\chi^2_{1-\alpha_1;n-1}\right\} \tag{11.4.4}$$

الاختبار بحجم α لاختبار $H_0 : \theta_2 = \theta_{20}$ ضد $H_1 : \theta_2 \neq \theta_{20}$.

إن كلاً من الاختبارين (10.4.4) و (11.4.4) يعتبر غير المتحيز الأقوى بانتظام

(الأمثل)، لأن %100γ فترة ثقة الموافقة الأقصر ضمن %100γ فترة الثقة.

مثـــال 4.4.4 (فرضية حول تساوي متوسطي نموذجين طبيعيين)

إذا كانت $X=(X_1,...,X_m)$ و $Y=(Y_1,...,Y_n)$ عينتين عشوائيتين مســــتقلتين، بحيث إن X من توزيع $N(\theta_1^{(1)},\theta_2^2)$ و Y من توزيع $N(\theta_1^{(2)},\theta_2^2)$، وعلمت أن %γ فــترة ثقة الأقصر لــ $\Delta=\theta_1^{(1)}-\theta_1^{(2)}$.

$$\left((\overline{X}-\overline{Y})\pm t_{\alpha/2,m+n-2}\left[\frac{m+n}{mn(m+n-2)}\left(mS^2(X)+nS^2(Y)\right)\right]^{1/2}\right)$$

فأوجد الاختبار بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0:\Delta=\theta_1^{(1)}-\theta_1^{(2)}=0$ ضد الفرضيــة البديلة $H_1:\Delta\neq 0$.

بما أن:

$$\mathcal{y}(x,y)=\left\{\left(\theta_1^{(1)},\theta_1^{(2)}\right):\left|(\overline{x}-\overline{y})-\left(\theta_1^{(1)}-\theta_1^{(2)}\right)\right| < t_{\alpha/2;m+n-2}\left[\frac{m+n}{mn(m+n-2)}\left(ms^2(x)+ns^2(y)\right)\right]^{1/2}\right\}$$

فإن:

$$G_{0\alpha}(\Delta=0)=\left\{(x,y):\left|\overline{x}-\overline{y}\right|<t_{\alpha/2,m+n-2}\sqrt{\frac{(m+n)\left(ms^2(x)+ns^2(y)\right)}{mn(m+n-2)}}\right\}$$

وبالتالي:

$$G_{1\alpha}(\Delta=0)=\left\{(x,y):\left|\overline{x}-\overline{y}\right|\geq t_{\alpha/2;m+n-2}\sqrt{\frac{(m+n)\left(ms^2(x)+ns^2(y)\right)}{mn(m+n-2)}}\right\}$$

$$;\quad 1-\alpha=\gamma$$

الاختبــار الأقوى بانتظام غير المتحيز بحجم α لاختبــار الفرضيـــة $H_0 : \Delta = 0$ ضــد $H_1 : \Delta \neq 0$.

وإذا كانت العينة X مأخوذة من توزيع $N(\theta_1, \sigma_1^2)$ و Y مـــن $N(\theta_2, \sigma_2^2)$، أي أن σ_1^2, σ_2^2 معلومتان فإن $100\gamma\%$ فترة ثقة للفرق $\Delta = \theta_1 - \theta_2$ هي:

$$\left((\overline{X} - \overline{Y}) - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} < \Delta < (\overline{X} - \overline{Y}) + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \right)$$

$$; \quad \Phi(-z_{\alpha/2}) = \alpha \ , \ 1 - \gamma = \alpha$$

فإن:

$$G_{1\alpha}(\Delta = 0) = \left\{ (x, y) : |\overline{x} - \overline{y}| \geq z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \right\}$$

5.4 اختبار فرضية $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ضد $H_1 : \theta < \theta_1 \text{ or } \theta > \theta_2$

إن لمثل هذه الفرضيات لا يوجد -بشكل عام- الاختبار الأقوى بانتظام، بل كما في حالة اختبار فرضية بسيطة $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_0 : \theta \neq \theta_0$ يوجد الاختبار غير المتحــيز الأقوى بانتظام تحدده المبرهنة الآتية التي نقدمها بدون إثبات.

مبــرهنة 1.5.4

إذا كانت $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية من نموذج ينتمي لعائلة النماذج الأسية التي تعتمد على معلمة واحدة، وكانت فرضية العدم $H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ضد الفرضيـــة $H_1 : \theta < \theta_1 \text{ or } \theta > \theta_2$، فإن الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α موجود وهو:

$$\widetilde{G}_{1\alpha} = \{x : 0 < \widetilde{\varphi}(x) \leq 1\} \qquad (1.5.4)$$

حيث إن:

$$\widetilde{\varphi}(x)=\begin{cases}1 & ; \quad T(x)<c_1 \text{ or } T(x)>c_1\\ \gamma_i & ; \quad T(x)=c_i\ ,\ j=1,2\\ 0 & ; \quad c_1<T(x)<c_2\end{cases}$$

و $T(X)=\sum_{i=1}^{n}B(X_i)$. وتتحدد الثوابت $c_1\ ,c_2\ ,\gamma_1\ ,\gamma_2$ من العلاقتين:

$$E_{\theta_j}\widetilde{\varphi}(X)=\alpha \quad ; \quad j=1,2 \tag{2.5.4}$$

إن $\gamma_1=\gamma_2=0$ في حالة نموذج مستمر و $\gamma_1=\gamma_2=1$ في حالة نموذج مقطع والاختبار غير عشوائي.

فمثلاً، إذا كانت $X=(X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta,\sigma^2)$ فإن $T(X)=\sum_{i=1}^{n}X_i$، والعلاقتان (2.5.4) تكتبان على النحو الآتي:

$$E_{\theta_1}\widetilde{\varphi}(X)=P_{\theta_1}\big(T(X)<c_1\big)+P_{\theta_1}\big(T(X)>c_2\big)=\alpha\Rightarrow$$

$$=\Phi\left(\frac{c_2-n\theta_1}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{c_1-n\theta_1}{\sigma\sqrt{n}}\right)=1-\alpha \tag{1}$$

$$E_{\theta_2}\widetilde{\varphi}(X)=P_{\theta_2}\big(T(X)<c_1\big)+P_{\theta_2}\big(T(X)>c_2\big)=\alpha\Rightarrow$$

$$=\Phi\left(\frac{c_2-n\theta_2}{\sigma\sqrt{n}}\right)-\Phi\left(\frac{c_1-n\theta_2}{\sigma\sqrt{n}}\right)=1-\alpha \tag{2}$$

لأن $\mathcal{L}_\theta\big(T(X)\big)=N(n\theta,n\sigma^2)$.

باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري وإتباع طريقة المحاولة والخطأ نعين $c_1\ ,c_2$ المحققين للشرطين (1) و (2).

مثال 1.5.4

إذا كانت $X=(X_1,\dots,X_{16})$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta,1)$، فاختبر الفرضية $H_0:1\le\theta\le2$ ضد $H_1:\theta<1 \text{ or } \theta>2$، عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$.

بما أن النموذج الطبيعي $N(\theta,1)$ ينتمي لعائلة النماذج الأسية، فحسب المبرهنة (1.5.4) الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم $\alpha = 0.05$ موجود ويعطى بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1 = \{x : T(x) < c_1 \ \text{ or } \ T(x) > c_2\}$$

حيث إن $T(X) = \sum_1^n X_i$ و $\mathcal{L}_\theta(T) = N(n\theta, n)$. ويتحدد الثابتان من الشرطين (2.5.4)، حيث يصبحان في المسألة المطروحة:

$$\Phi\left(\frac{c_2 - n\theta_1}{4}\right) - \Phi\left(\frac{c_1 - n\theta_1}{4}\right) = \Phi\left(\frac{c_2 - n\theta_2}{4}\right) - \Phi\left(\frac{c_1 - n\theta_2}{4}\right) = 1 - \alpha$$

أي أن:

$$\Phi\left(\frac{c_2 - 16}{4}\right) - \Phi\left(\frac{c_1 - 16}{4}\right) = \Phi\left(\frac{c_2 - 32}{4}\right) - \Phi\left(\frac{c_1 - 32}{4}\right) = 0.95$$

لا يمكن تحقق ذلك إلا إذا كان:

$$\frac{c_2 - 16}{4} = -\frac{c_1 - 32}{4} \quad , \quad \frac{c_2 - 32}{4} = -\frac{c_1 - 16}{4}$$

أي أن:

$$c_1 + c_2 = 48 \ \Rightarrow \ c_1 = 24 - d \ \ , \ \ c_2 = 24 + d$$

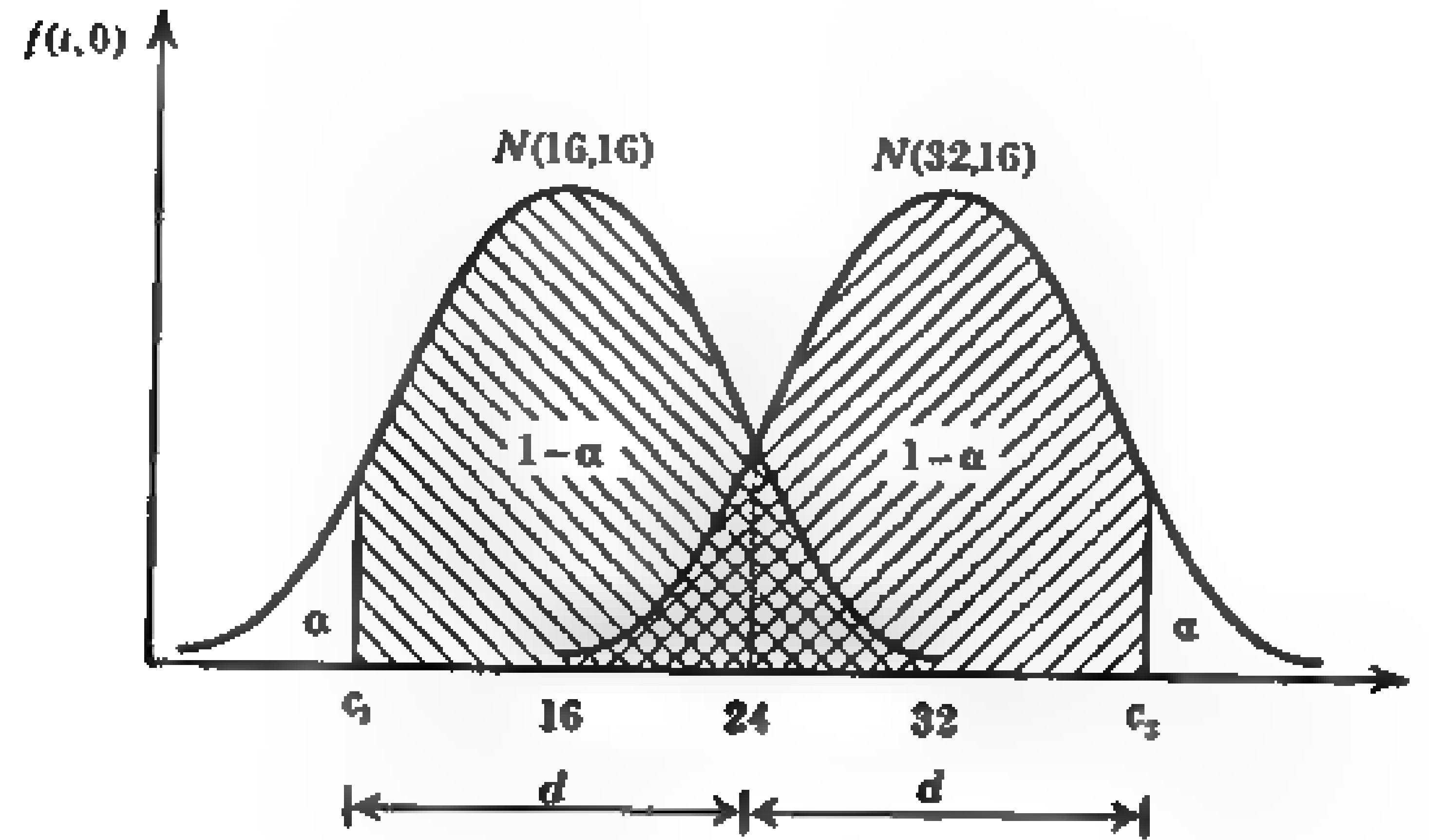
ويتعين d من العلاقة:

$$\Phi\left(\frac{8 + d}{4}\right) - \Phi\left(\frac{8 - d}{4}\right) = 0.95 \qquad (3)$$

ويبدو ما سبق بوضوح على الشكل (1.5.4).

نبحث عن قيمة d المحققة للعلاقة (3) وذلك بإتباع طريقة المحاولة والخطأ فنجد $d = 14.6$ ، ومن ثم $c_1 \approx 9.4$ و $c_2 \approx 38.6$. وبالتالي الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم $\alpha = 0.05$ موافق لمنطقة الرفض:

$$\widetilde{G}_{1\alpha} = \{x : T(x) < 9.4 \text{ or } T(x) > 38.6\}$$



شكل (1.5.4)

ودالة قوة الاختبار:

$$W(\theta) = 1 - P_\theta(c_1 < T(X) < c_2) = 1 - P_\theta(9.4 < T(X) < 38.4)$$

6.4 اختبار فرضية $H_0 : \theta \le \theta_1 \text{ or } \theta \ge \theta_2$ ضد $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$

رأينا في البندين السابقين أن الفرضيات ذات الجانبين الواردة ليس لها اختبار أقوى بانتظام. إن هذا لا يعني أن الاختبارات الأقوى بانتظام موجودة فقط للفرضيات من جانب واحد ولكنها موجودة أيضاً لبعض الفرضيات من جانبين والتي تأخذ الشكل:

$$H_0 : \theta \le \theta_1 \text{ or } \theta \ge \theta_2 \quad , \quad H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2 \;;\; \theta_1 < \theta_2 \qquad (1.6.4)$$

تختبر مثل هذه الفرضيات في التطبيقات الإحصائية في الميادين المختلفة عندما نريد التحقق من توفر مواصفات محددة في إنتاج معين كنسبة عنصر في تركيب دواء أو دقة جهاز من أجهزة القياس. . . الخ. في مثل هذه الحالات تصاغ الفرضية H_0 على أساس أن المعلمة المجهولة θ لا تقع ضمن الحدود المعيارية المطلوبة.

والمبرهنة التالية، التي سنذكرها بدون إثبات، تعطي الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضيات من الشكل (1.6.4) في حالة نماذج تنتمي لعائلة النماذج الأسية.

مبــرهنة 1.6.4

إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع أسي:

$$f(x;\theta) = \exp[A(\theta)B(x) + C(\theta) + D(x)]$$

فإن الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta \le \theta_1 \text{ or } \theta \ge \theta_2$ ضـد الفرضية البديلة $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$ (حيث $\theta_1 < \theta_2$) موجود ويعطى بمنطقة الرفض:

$$G^*_{1\alpha} = \{x : 0 < \varphi^*(x) \le 1\} \tag{2.6.4}$$

حيث إن دالة الرفض (احتمال الرفض):

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad c_1 < T(x) < c_2 \\ \gamma_j & ; \quad T(x) = c_j \,,\, j = 1,2 \\ 0 & ; \quad T(x) < c_1 \text{ or } T(x) > c_2 \end{cases} \tag{3.6.4}$$

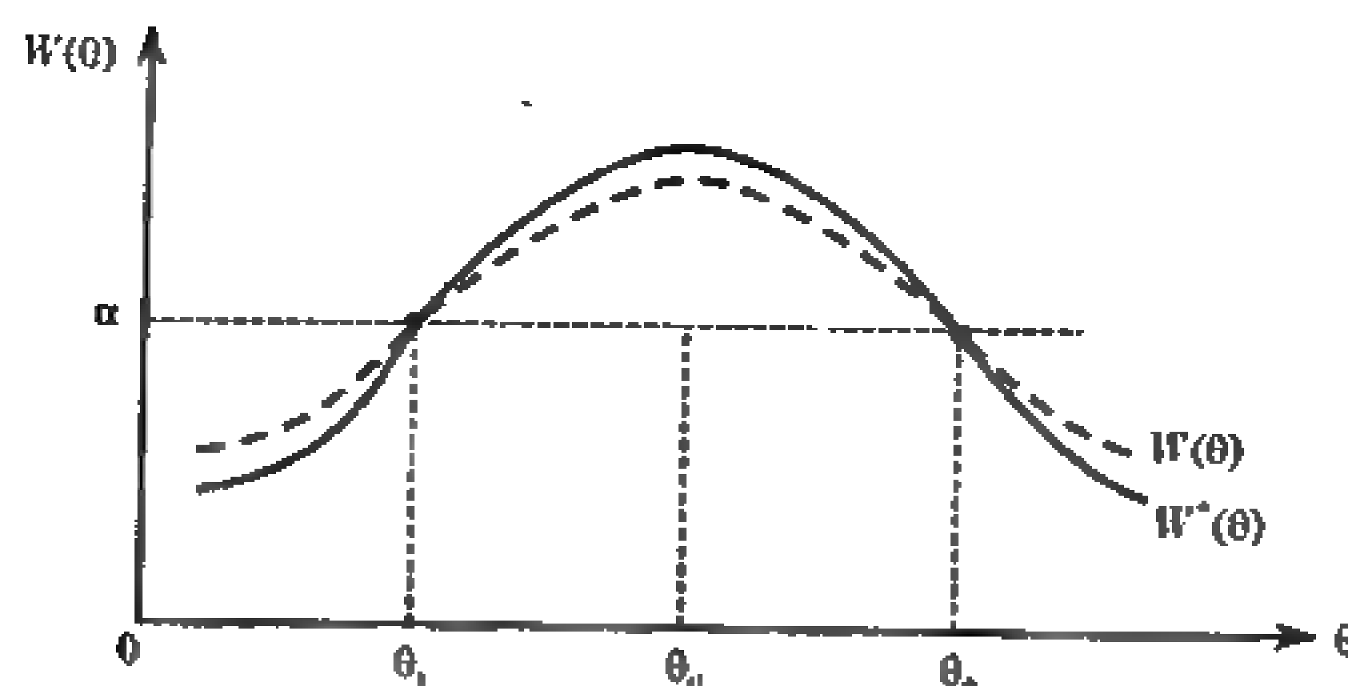
و $T(X) = \sum_{i=1}^{n} B(X_i)$. وتتعين الثوابت $c_1 , c_2 , \gamma_1 , \gamma_2$ من العلاقتين:

$$E_{\theta_j}\varphi^*(X) = \alpha \quad ; \quad j = 1,2 \tag{4.6.4}$$

وأن دالة قوة الاختبــــار (2.6.4)، أي $W^*(\theta) = W(G^*_{1\alpha};\theta) = E_\theta\varphi^*(X)$ أعظمية عند الشرطين (4.6.4) داخل الفترة (θ_1, θ_2) وأصغرية خارجها، كما يبدو ذلك بوضوح على الشكل (1.6.4).

حيث إن $W(\theta)$ دالة قوة اختبار ما بحجم α. ولدالة القوة $W^*(\theta)$ قيمة عظمى عند نقطة ما $\theta_1 < \theta_0 < \theta_2$ وتتناقص تماماً عند الابتعاد عن θ_0 يساراً أو يميناً باستثناء الحالة الـــتي يكون فيها توزيع $T(X)$ متمركزاً في نقطتين، أي عندماتوجد قيمتان t_1 , t_2 لـــ $T(X)$ بحيث:

$$P_\theta(T(X)=t_1)+P_\theta(T(X)=t_2)=1 \quad ; \quad \forall\,\theta\in\Theta$$



شكل (1.6.4)

والمعادلتان (4.6.4) قابلتان للحل دائماً بالنسبة لـ $c_j\,,\gamma_j\,;\,j=1,2$ عندما $0<\alpha<1$.

مثال 1.6.4

إذا كانت $X=(X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta,1)$، فاختبر الفرضية $H_0:\theta\le\theta_1$ or $\theta\ge\theta_2$ ضد $H_1:\theta_1<\theta<\theta_2$، عند مستوى معنوية α.

كما نعلم أن النموذج الطبيعي $N(\theta,1)$، بتباين معلوم ومتوسط مجهول، عضو في عائلة النماذج الأسية و $T(X)=\sum_1^n B(X_i)=\sum_1^n X_i$، ومن ثم حسب المبرهنة (1.6.4) فالاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية H_0 ضد H_1 موجود ويعطى بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1^*=\{x:c_1<T(x)<c_2\}$$

حيث يتحدد الثابتان $c_1\,,c_2$ من العلاقتين:

$$P_{\theta_1}(c_1<T(X)<c_2)=\alpha$$

$$P_{\theta_2}(c_1<T(X)<c_2)=\alpha$$

لأن $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ (التوزيع مستمر).

بما أن:

$$\mathcal{L}_\theta(X_i) = N(\theta,1) \Rightarrow \mathcal{L}_\theta\left(T = \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = N(n\theta, n)$$

أي أن:

$$\mathcal{L}_\theta\left(\frac{T - n\theta}{\sqrt{n}}\right) = N(0,1) \quad , \quad \forall \theta \in \Theta$$

وعلى ذلك:

$$P_{\theta_1}\left(c_1 < T(X) < c_2\right) = P_{\theta_1}\left(\frac{c_1 - n\theta_1}{\sqrt{n}} < \frac{T - n\theta_1}{\sqrt{n}} < \frac{c_2 - n\theta_1}{\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

$$P_{\theta_2}\left(c_1 < T(X) < c_2\right) = P_{\theta_2}\left(\frac{c_1 - n\theta_2}{\sqrt{n}} < \frac{T - n\theta_2}{\sqrt{n}} < \frac{c_2 - n\theta_2}{\sqrt{n}}\right) = \alpha$$

وهذا يعني أن:

$$\Phi\left(\frac{c_2 - n\theta_1}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{c_1 - n\theta_1}{\sqrt{n}}\right) = \alpha \qquad (1)$$

$$\Phi\left(\frac{c_2 - n\theta_2}{\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{c_1 - n\theta_2}{\sqrt{n}}\right) = \alpha \qquad (2)$$

ولا يتحقق هذان الشرطان إلا عندما تكون:

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_2 - n\theta_1}{\sqrt{n}} &= -\left(\frac{c_1 - n\theta_2}{\sqrt{n}}\right) \\ \frac{c_1 - n\theta_1}{\sqrt{n}} &= -\left(\frac{c_2 - n\theta_2}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 + c_2 = n(\theta_1 + \theta_2)$$

لأن التوزيع $N(0,1)$ متناظر بالنسبة للصفر. وبالتالي لتعيين c_1 , c_2 بإتباع طريقة المحاولة والخطأ يمكن الاستفادة من هذه النتيجة، أي نختار قيم c_1 , c_2 بحيث $c_1 + c_2 = n(\theta_1 + \theta_2)$ ويحققان أحد الشرطين (1) أو (2).

فمثلاً، إذا كانت $n = 16, \theta_1 = 0, \theta_2 = 1, \alpha = 0.05$ ، فإن:

$$\Phi\left(\frac{c_2}{4}\right) - \Phi\left(\frac{c_1}{4}\right) = 0.05$$

$$\Phi\left(\frac{c_2 - 16}{4}\right) - \Phi\left(\frac{c_1 - 16}{4}\right) = 0.05$$

$$c_1 + c_2 = 16$$

وبالمحاولة والخطأ نجد:

$$c_1 = 6.32 \quad , \quad c_2 = 9.68$$

$$\Phi\left(\frac{c_2}{4}\right) - \Phi\left(\frac{c_1}{4}\right) = \Phi(2.42) - \Phi(1.58)$$
$$= 0.9922 - 0.9429 = 0.0493 \approx 0.05$$

$$\Phi\left(\frac{c_2 - 16}{4}\right) - \Phi\left(\frac{c_2 - 16}{4}\right) = \Phi\left(\frac{-6.32}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-14.42}{4}\right)$$
$$= \Phi(-1.58) - \Phi(-2.42)$$
$$= \Phi(2.42) - \Phi(1.58) = 0.0493 \approx 0.05$$

وبالتالي الاختبار الأقوى بانتظام بحجم $\alpha = 0.05$ يوافق منطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*} = \left\{x : 6.32 < T(x) = \sum_{1}^{n} x_i < 9.68\right\}$$

تمارين

1. إذا كانت $X = (X_1, \dots, X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta) = 4\theta^2 x e^{-2\theta x} \quad ; \quad x > 0$$

فالمطلوب:

أ. هل يوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_0$؟

ب. هل يوجد الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_0$؟

2. إذا كانت $X = (X_1,..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} \quad ; \quad x > 0 \ , \ \theta > 0$$

ونريد اختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_0$، عند مستوى معنوية α، فأوجد الاختبار الأمثل.

3. في التمرين (2)، إذا كانت $n = 40 , \theta_0 = 4 , \alpha = 0.01$ فاختبر فرضية العدم H_0 ضد الفرضية H_1.

4. إذا كانت $X = (X_1,..., X_{25})$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta,4)$، فاختبر الفرضية $H_0 : \theta = 7$ ضد $H_1 : \theta \neq 7$، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$. وإذا كانت لديك عينة ملاحظة $\underline{x} = (x_1,..., x_{25})$ بحيث $\sum_1^{n} x_i = 200$ هل تقبل الفرضية أم ترفضها بناءً على الاختبار الذي توصلت إليه؟

5. إذا كانت $X = (X_1,..., X_{10})$ عينة عشوائية من توزيع برنولي $B(1,\theta)$، فاختبر الفرضية $H_0 : \theta = 0.3$ ضد $H_1 : \theta \neq 0.3$، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$. وإذا كانت لديك عينة ملاحظة x بحيث $T(x) = \sum_1^{10} x_i = 7$ هل تقبل الفرضية H_0 أم لا بناءً على الاختبار الذي توصلت إليه؟.

6. إذا كانت $X = (X_1,..., X_{16})$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\theta,9)$، فأوجد الاختبار الموضعي الأقوى بحجم $\alpha = 0.01$ لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = 8$ ضد $H_1 : \theta \neq 8$.

7. إذا كانت $X=(X_1,...,X_{100})$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x} \quad ; \quad x>0\ ,\ \theta>0$$

اختبر الفرضية $H_0:\theta=\theta_0$ ضد $H_1:\theta\neq\theta_0$، عند مستوى أهمية α.

8. إذا كانت $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية كبيرة الحجم من توزيع جاما $\Gamma(\theta,\gamma)$، وعلمت أن $\gamma\%$ فترة الثقة الأقصر للمعلمة θ هي:

$$\left(\frac{\overline{X}}{\gamma}(1-z_{\alpha/2})\Big/\sqrt{n\gamma}\ ,\ \frac{\overline{X}}{\gamma}(1+z_{\alpha/2})\Big/\sqrt{n\gamma}\right) \quad ; \quad \Phi(-z_{\alpha/2})=\frac{\alpha}{2}$$

فأوجد الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0:\theta=\theta_0$ ضد $H_1:\theta\neq\theta_0$.

9. إذا كانت $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع بواسون $\Pi(\theta)$، فاختبر الفرضية $H_0:\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$ ضد الفرضية $H_1:\theta<\theta_1 \text{ or } \theta>\theta_2$، عند مستوى معنوية α، وبفرض أن $n=20,\alpha=0.05,\theta_1=2,\theta_2=5$ عين الثوابت c_1، c_2، γ_1، γ_2.

10. إذا كانت $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $\Gamma(1,1/\theta)$، فاختبر الفرضية $H_0:\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$ ضد الفرضية $H_1:\theta<\theta_1 \text{ or } \theta>\theta_2$، عند مستوى معنوية α، وبفرض $n=30,\alpha=0.01,\theta_1=1,\theta_2=2$ عين الثابتين c_1، c_2.

11. إذا كان $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta)=\theta x^{\theta-1} \quad ; \quad 0<x<1$$

اختبر فرضية العدم H_0 ضد الفرضية البديلة H_1، عند مستوى معنوية α في الحالتين الآتيتين:

أ. $H_0:\theta_1\leq\theta\leq\theta_2 \quad , \quad H_1:\theta<\theta_1 \text{ or } \theta>\theta_2$

ب. $H_0:\theta\leq\theta_1 \text{ or } \theta\geq\theta_2 \quad , \quad H_1:\theta_1<\theta<\theta_2$

الفصل الخامس:

اختبار نسبة المعقولية العامة

1.5 مقدمة

رأينا في الفصلين السابقين أن الاختبار الأمثل (الأقوى بانتظام أو غير المتحيز الأقوى بانتظام) غير موجود دائماً، ووجوده مرتبط بتوفر شروط محددة، منها النموذج الإحصائي يعتمد على معلمة وحيدة البعد (معلمة واحدة) و $\Lambda(X)$ دالة مضطردة في إحصاء ما T، وعندئذٍ بتطبيق طرق معينة نحصل عليه. لكن في حالات كثيرة تكون تلك الشروط غير متوفرة، كأن يكون النموذج الإحصائي المقترح يعتمد على عدة معالم وتكون الفرضيات مركبة حول بعض هذه المعالم والباقي عبارة عن معالم مزعجة، أو يعتمد على معلمة واحدة لكن ليس له إحصاء نسبة معقولية مضطرد في إحصاء ما T. في مثل تلك الحالات لا يمكن تطبيق الطرق الواردة سابقاً لبناء الاختبارات المثلى. بالإضافة إلى ذلك رأينا في حالات عدة حيث يوجد الاختبار الأمثل إلا أن بناءه ليس سهلاً. وعلى ذلك وكلما كانت الفرضيات أكثر تعقيداً تكون الحاجة ماسة لبعض الطرق والأساليب الأخرى العامة (تطبيقها يعتمد على شروط عامة) لبناء الاختبارات، وإحدى أهم هذه الطرق هو ما يدعى بـ "طريقة إحصاء نسبة المعقولية العامة" أو اختصاراً "طريقة نسبة المعقولية" التي تتمتع ببعض الخواص المقاربة المرغوبة في حالة عينات كبيرة الحجم.

2.5 طريقة اختبار نسبة المعقولية العامة

METHOD OF GENERALIZED LIKELIHOOD RATIO TEST

تعتبر طريقة نسبة المعقولية العامة إحدى أهم وأعم الطرق لبناء الاختبارات من أجل الفرضيات المركبة. ويتمثل جوهر هذه الطريقة بما يلي:

لتكن $X=(X_1,\ldots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $f(x;\theta)$ الذي يعتمد على r معلمة $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_r)$، ونريد اختبار فرضية العدم $H_0:\theta\in\Theta_0\subset\Theta$ ضد الفرضية البديلة $H_1:\theta\in\Theta_1\subset\Theta$، حيث إن $\Theta_0\cap\Theta_1=\varnothing$، وفي حالات عدة تأخذ $\Theta_1=\Theta\setminus\Theta_0$.

تعريف 1.2.5: إحصاء نسبة المعقولية العامة

Generalized Likelihood Ratio Statistic

كما نعلم دالة المعقولية:

$$L_n(X;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(X_i;\theta)$$

لتكن $\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}L_n(X;\theta)$ القيمة العظمى لدالة المعقولية L_n (اعتبارها دالة في θ فقط) عندما تتغير θ في الفضاء الجزئي Θ_0، بينما $\sup\limits_{\theta\in\Theta}L_n(X,\theta)$ القيمة العظمى لدالة المعقولية L_n عندما تتغير θ في كامل الفضاء المعلمي Θ.

تدعى الدالة:

$$\Lambda_n=\Lambda_n(X;\Theta_0)=\frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0}L_n(X;\theta)}{\sup\limits_{\theta\in\Theta}L_n(X;\theta)} \qquad (1.2.5)$$

بإحصاء نسبة المعقولية العامة.

نلاحظ من هذا التعريف الآتي:

1. Λ_n دالة في المتغيرات العشوائية $X_1,...,X_n$ وبالتالي فهي متغير عشوائي. وكون الدالة Λ_n لا تعتمد على أي معلمة مجهولة فهي إحصاء.

2. إحصاء نسبة المعقولية العامة $\Lambda_n \geq 0$ (غير سالب)، لأن:

$$L_n(X;\theta) > 0 \quad , \quad \forall \theta \in \Theta$$

3. إحصاء نسبة المعقولية العامة $\Lambda_n \leq 1$ (لا يتجاوز الواحد)، لأن:

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} L_n(X;\theta) \leq \sup_{\theta \in \Theta} L_n(X;\theta)$$

ومن ثم، حسب (2) و (3)، فإن $0 \leq \Lambda_n \leq 1$.

4. إن إحصاء نسبة المعقولية العامة Λ_n عبارة عن تعميم لإحصاء نسبة المعقولية البسيطة $\Lambda(X)$ في اختبار نيمان وبيرسون (حالة فرضيتين بسيطتين) على حالة فرضيات مركبة.

إذا كانت القيمة العظمى $\sup_{\theta \in \Theta_0} L_n(X;\theta)$ تساوي أو قريبة من القيمة العظمى $\sup_{\theta \in \Theta} L_n(X;\theta)$ فإن $\Lambda_n \cong 1$. وهذا يعني أن تقدير المعقولية العظمى $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_r)$ ينتمي لـ Θ_0 أو قريب منها. وبالتالي فإن معطيات العينة العشوائية $X = (X_1,...,X_n)$ منسجمة مع فرضية العدم H_0، أي تشكل دعماً لهذه الفرضية ودليلاً إيجابياً على صحتها. بينما إذا كانت Λ_n قريبة من الصفر، أي تقدير المعقولية العظمى لا ينتمي لـ Θ_0 بل على مسافة كبيرة منها، فتكون معطيات العينة العشوائية $X = (X_1,...,X_n)$ غير متوافقة مع فرضية العدم H_0، وبالتالي تشكل دليلاً على عدم صحتها. وعلى ذلك فإن منطقة رفض الفرضية H_0 تتكون من القيم الصغيرة (القريبة من الصفر) لإحصاء نسبة المعقولية العامة Λ_n. وإذا رمزنا بـ $\lambda_n = \lambda_n(x;\theta_0) = \Lambda_n(x;\theta_0)$، فإن اختبار نسبة المعقولية العامة يعطى بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1 = \{x : \lambda(x;\theta_0) \leq c\} \tag{2.2.5}$$

ويتعين الثابت c، بحيث يكون حجم الاختبار G_1 يساوي مستوى المعنوية المتخذ α، من العلاقة:

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(X \in G_1) = \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta\left(\Lambda_n(X;\theta_0) \le c\right) = \alpha \qquad (3.2.5)$$

ونرمز لتلك القيمة بـ c_α. وهذا يتطلب معرفة توزيع إحصاء نسبة المعقولية العامة Λ_n، عند صحة الفرضية H_0. وغالباً هذا التوزيع غير معلوم (ليس إحدى التوزيعات الشهيرة)، ولكن يمكن اشتقاقه بسهولة بمعرفة إحصاء $T(X) = \varphi(\Lambda_n)$، كدالة مضطردة في Λ_n، توزيعه معلوم عند صحة الفرضية H_0. وعندئذٍ، لا نحتاج لمعرفة توزيع Λ_n إذا تمت صياغة منطقة الرفض G_1 بدلالة الإحصاء $T(X)$ على النحو الآتي:

$$G_1 = \{x : \varphi(0) \le T(x) \le \varphi(c)\} \quad ; \quad \text{دالة غير متناقصة في } \Lambda_n \ \varphi(\Lambda_n)$$

$$G_1 = \{x : \varphi(c) \le T(x) \le \varphi(0)\} \quad ; \quad \text{دالة غير متزايدة في } \Lambda_n \ \varphi(\Lambda_n) \qquad (4.2.5)$$

ومن ثم يتم تعيين الثابت $d = \varphi(c)$ بناءً على توزيع الإحصاء $T(X)$ من العلاقة:

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(X \in G_1) = \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta\left(\varphi(0) \le T(X) \le \varphi(c)\right) = \alpha$$

(5.2.5) أو من العلاقة:

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(X \in G_1) = \sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta\left(\varphi(c) \le T(X) \le \varphi(0)\right) = \alpha$$

مثال 1.2.5

لتكن $X = (X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\theta,\sigma^2)$، ونرغب في إيجاد اختبار نسبة المعقولية العامة لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_a : \theta \ne \theta_0$، عند مستوى معنوية α.

في هذه المسألة:

$$\Theta = \{(\theta,\sigma^2) : -\infty < \theta < \infty\} \quad , \quad \Theta_0 = \{(\theta_0,\sigma^2)\}$$

ودالة المعقولية:

$$L_n(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta}{\sigma}\right)^2\right]$$

ومن ثم:

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} L_n(x;\theta)=L_n(x;\theta_0)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta_0}{\sigma}\right)^2\right]$$

$$\sup_{\theta\in\Theta} L_n(x;\theta)=L_n(x;\hat{\theta}(x)=\bar{x})=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sigma}\right)^2\right]$$

حيث إن $\hat{\theta}(x)=\bar{x}$ تقدير المعقولية العظمى للمعلمة θ.

وعلى ذلك نسبة المعقولية العامة:

$$\lambda_n=\frac{L_n(x;\theta_0)}{L_n(x;\bar{x})}=\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i-\theta_0)^2-(x_i-\bar{x})^2\right]\right\}$$

$$=\exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\theta_0)^2\right]$$

وبالتالي يعطى اختبار نسبة المعقولية العامة بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}=\left\{x:\lambda_n(x;\theta_0)=\exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\theta_0)^2\right]\le c_\alpha\right\} \qquad (1)$$

ويتحدد الثابت $c=c_\alpha$ من العلاقة:

$$P_{\theta_0}(X\in G_{1\alpha})=\int_{G_{1\alpha}} L_n(x;\theta_0)dx=\int_0^{c_\alpha} g(\lambda_n|\theta_0)d\lambda_n=\alpha \quad ; \quad dx=\prod_{1}^{n} dx_i$$

حيث إن $g(\lambda_n|\theta_0)$ دالة كثافة توزيع إحصاء نسبة المعقولية العامة Λ_n، عند صحة الفرضية H_0. وبما أن توزيع Λ_n غير معلوم فنبحث عن إحصاء ما كدالة مضطردة في Λ_n توزيعه معلوم أو يمكن اشتقاقه بسهولة، عند صحة فرضية العدم H_0.

إذا رمزنا بـ $t = T(x) = \left(\frac{\bar{x}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$، فـإن $\lambda_n = e^{-\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow t^2 = -2\ln\lambda_n$، أي أن $T^2(X) = -2\ln\Lambda_n(X)$، وهو دالة متناقصة في Λ_n. وبما أن:

$$\mathcal{L}_{\theta_0}\left(T = \frac{\bar{X}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = N(0,1) \Rightarrow \mathcal{L}_{\theta_0}\left(T^2 = \left(\frac{\bar{X}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\right) = \chi^2_{(1)}$$

أي أن توزيع T^2، عند صحة الفرضية H_0، هو χ^2 بدرجة حرية واحدة. وعلى ذلك، فإن منطقة الرفض (1) بدلالة الإحصاء T هي:

$$G_{1\alpha} = \{x : t^2 = T^2(x) \geq d_\alpha\}$$

حيث إن d_α تحقق العلاقة:

$$P_{\theta_0}\left(T^2(X) \geq d_\alpha\right) = \int_{d_\alpha}^{\infty} h(y|\theta_0)dy = \alpha$$

و $h(y|\theta_0)$ دالة كثافة توزيع $\chi^2_{(1)}$. ومن جدول توزيع $\chi^2_{(1)}$، وعند مستوى معنويـة α، نجد $d_\alpha = \chi^2_{\alpha;1}$. وبالتالي تصبح منطقة الرفض:

$$G_{1\alpha} = \left\{x : t^2 = \frac{n(\bar{x}-\theta_0)^2}{\sigma^2} \geq \chi^2_{\alpha;1}\right\}$$

ويمكن بناء الاختبار بطريقة أخرى على النحو الآتي:

بما أن $T^2(x) = -2\ln\lambda_n$ فالمتباينة $\lambda_n \leq c$ مكافئة للمتباينة:

$$t^2 = T^2(x) = -2\ln\lambda_n \geq -2\ln c = d$$

ومن ثم يمكن كتابة منطقة الرفض (1) على الصورة:

$$G_1 = \{x : |t| \geq d\}$$

لكن توزيع T هو $N(0,1)$، إذن يمكن تعيين d من العلاقة:

$$P_{\theta_0}\left(|T(X)| \le d\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{d} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt = 2\Phi(d) - 1 = 1 - \alpha \quad \Rightarrow \quad \Phi(-d) = \frac{\alpha}{2}$$

ومن جدول توزيع $N(0,1)$، وعند احتمال يساوي $\alpha/2$، نجـد $d = t_{\alpha/2}$. وبالتـالي، اختبار نسبة المعقولية بحجم α لاختبـار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_0 \ne \theta_0$ يعطـى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha} = \left\{ x : \left| \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right| \ge t_{\alpha/2} \right\} \quad ; \quad \Phi(-t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

وهو نفس الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام الذي حصلنا عليه سابقاً والمعطى بالعلاقـة (2.2.4). هكذا، طريقة نسبة المعقولية العامة أعطت اختباراً أمثل.

فمثلاً، إذا كانت العينة المشـاهدة $x = (4,2,4,5,6,3,5,8,8)$ والتـبـاين $\sigma^2 = 4$ و $\alpha = 0.05$ ونريد اختبار الفرضية $H_0 : \theta = 6$ ضد $H_1 : \theta \ne 6$، فنتبع الخطوات الآتية:

1. نحسب قيمة إحصاء الاختبار $T(X)$ عند العينة المشاهدة x:

$$t = T(x) = \frac{\bar{x} - \theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5-6}{2/3} = -\frac{3}{2} = -1.5$$

2. من جدول توزيع $N(0,1)$، وعند احتمال $\alpha/2 = 0.025$، نجد:

$$t_{0.025} = 1.96 \quad ; \quad \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

3. بما أن $|T(x)| = |-1.5| = 1.5 < 1.96$، فنقبل الفرضية $H_0 : \theta = 6$، وبشـكل مشابه إذا اعتمدنا إحصاء الاختبار $T^2(X)$:

$$t^2 = T^2(x) = 2.25$$

ومـن جـدول توزيـع $\chi^2_{(1)}$ وعنـد مسـتوى معنويـة $\alpha = 0.05$، نجـد $\chi^2_{\alpha;1} = \chi^2_{0.05;1} = 3.84$، أي أن $t^2 < 3.84$، وبالتـالي نقبـل فرضيـة العـدم $H_0 : \theta = 6$.

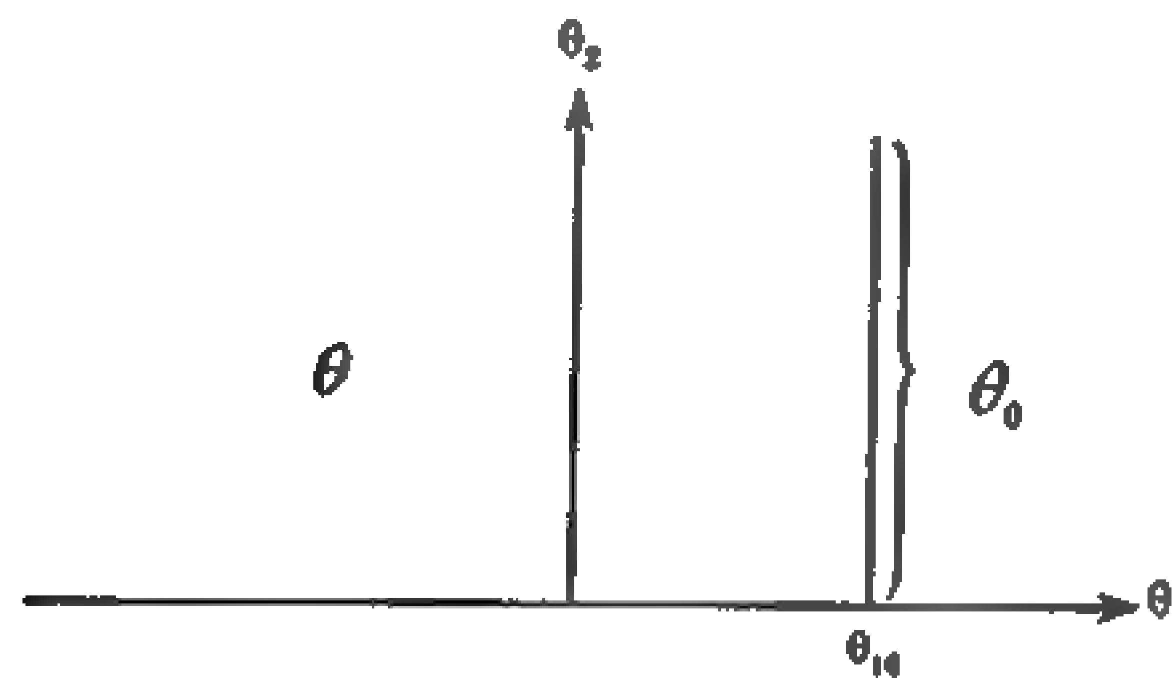
مثـــال 2.2.5

لتكن $X=(X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta_1,\theta_2^2)$، ونريد اختبار فرضية العــــدم $H_0:\theta_1=\theta_{10}$ ضد $H_1:\theta_1\neq\theta_{10}$ بـــإتباع طريقة نسبة المعقولية العامة، عنـــد مستوى معنوية α.

نلاحظ أن H_0 و H_1 فرضيتان مركبتان، وأن:

$$\Theta=\{\theta=(\theta_1,\theta_2)\quad;\quad -\infty<\theta_1<+\infty\ ,\ \theta_2>0\}$$
$$\Theta_0=\{\theta=(\theta_1,\theta_2)\quad;\quad \theta_1=\theta_{10}\ ,\ \theta_2>0\}$$

ويبدو ذلك بوضوح على الشكل (1.2.5)



شكل (1.2.5)

وكما نعلم أن دالة المعقولية:

$$L_n(x;\theta)=\left(\frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta_1}{\theta_2}\right)^2\right]$$

ومن ثم:

$$\sup_{\theta\in\Theta}L_n(x;\theta)=L_n\left(x,\hat{\theta}(x)=(\bar{x},s)\right)=\left(\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\right)^n\exp\left[-\frac{1}{2s^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]$$
$$=(2\pi s^2e)^{-n/2}\quad;\quad s^2=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} L_n(x;\theta) = L_n\big(x;(\theta_{10},s_0)\big) = (2\pi s_0^2 e)^{-n/2}$$

حيث إن $s_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_{10})^2$ تقدير المعقولية العظمى للتباين غير المعلوم θ_2^2، عند صحة فرضية العدم H_0 و $\hat{\theta}_n(x) = (\bar{x}, s)$ تقدير المعقولية العظمى للمعلمة ثنائية البعد $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ [راجع المثال (4.2.6-I)]. وبما أن:

$$\begin{aligned} s_0^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_{10})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big[(x_i-\bar{x})+(\bar{x}-\theta_{10})\big]^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 + (\bar{x}-\theta_{10})^2 = s^2 + (\bar{x}-\theta_{10})^2 \end{aligned}$$

فإن إحصاء نسبة المعقولية العامة:

$$\Lambda_n(X) = \left(S_0^2/S^2\right)^{-n/2} = \left[1+T^2/(n-1)\right]^{-n/2} \quad ; \quad T = T(X) = \frac{(\bar{X}-\theta_{10})}{S/\sqrt{n-1}}$$

$$S_0^2 = S_0^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta_{10})^2 \quad , \quad S^2 = S^2(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

هكذا، يوجد بين قيم Λ_n و T^2 تقابل واحد لواحد (تناظر أحادي) و Λ_n دالة غير متزايدة في T^2، وبالتالي فالمتباينة $\Lambda_n \le c$ مكافئة للمتباينة $|T| \ge d$. بالإضافة إلى ذلك فإن $\mathcal{L}\big(T(X)|H_0\big) = S(n-1)$ [راجع المبرهنة (6.9.3-I)]. أي أن توزيع الإحصاء $T(X)$، عند صحة الفرضية H_0، يخضع لتوزيع ستيودنت بـ $(n-1)$ درجة حرية، وهذا التوزيع لا يعتمد على المعلمة المزعجة θ_2. وبناءً على ذلك فمنطقة رفض فرضية العدم $H_0 : \theta_1 = \theta_{10}$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta_1 \ne \theta_{10}$ هي من الشكل:

$$G_1 = \left\{x : \left|t = \frac{x-\theta_{10}}{S/n-1}\right| \ge d\right\}$$

ويتعين الثابت d، عند مستوى المعنوية α، من العلاقة:

$$P_{\theta_{10}}\big(|T(X)| \ge d\big) = \alpha$$

وباستخدام جدول توزيع ستيودنت بـ $(n-1)$ درجة حرية، وعند احتمال $\alpha/2$، نجد $d = t_{\alpha/2;n-1}$، فيصبح اختبار نسبة المعقولية العامة:

$$G_{1\alpha} = \left\{ x : \left| \frac{\bar{x} - \theta_{10}}{s/n-1} \right| \geq t_{\alpha/2;n-1} \right\}$$

وهذا الاختبار هو نفس الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α المعطى بمنطقة الرفض (10.4.4). هكذا، طريقة إحصاء نسبة المعقولية العامة أعطت الاختبار الأمثل لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_{10}$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_{10}$. وهذا لا يعني أن طريقة نسبة المعقولية العامة تعطي اختبارات مثلى دائماً. وهذا واضح في المثال الآتي.

مثـــال 3.2.5

لتكن $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta_1, \theta_2^2)$، ونريد اختبار فرضية العدم $H_0 : \theta_2^2 = \theta_{20}^2$ ضد الفـــرضية البديلة $H_1 : \theta_2^2 \neq \theta_{20}^2$، عند مستوى معنويـــة α، وذلك بتطبيق طريقة إحصاء نسبة المعقولية العامة.

نلاحظ أن:

$$\Theta = \{\theta = (\theta_1, \theta_2^2) \quad ; \quad -\infty < \theta_1 < +\infty \ , \ \theta_2^2 > 0\}$$
$$\Theta_0 = \{\theta = (\theta_1, \theta_2^2) \quad ; \quad -\infty < \theta_1 < +\infty \ , \ \theta_2^2 = \theta_{20}^2\}$$

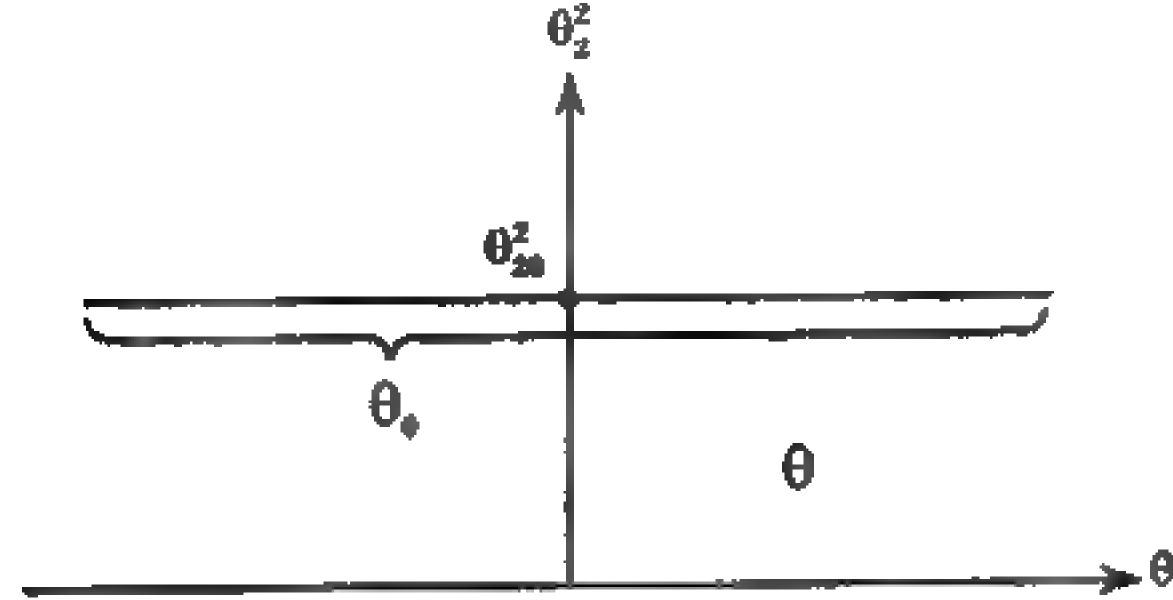
وكما نعلم أن دالة المعقولية:

$$L_n(x;\theta) = \left(\frac{1}{\theta_2 \sqrt{2\pi}} \right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \theta_1}{\theta_2} \right)^2 \right]$$

ومن ثم:

$$\sup_{\theta \in \Theta} L_n(x;\theta) = L_n\left(x, \theta = (\theta_1, \theta_{20}^2)\right) = \left(\frac{1}{2\pi\theta_{20}^2} \right)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \theta_1}{\theta_{20}} \right)^2 \right]$$

$$\sup_{\theta\in\Theta} L_n(x;\theta) = L_n\left(x;\theta=(\theta_1=\bar{x},\hat{\theta}_2^2=s^2)\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2\pi s^2}\right)^{n/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right)^2\right]=\left(\frac{1}{2\pi s^2}\right)^{n/2}e^{-\frac{n}{2}}$$



شكل (2.2.5)

حيث إن $\hat{\theta}(X)=\left(\bar{X},S^2\right)$ مقدّر المعقولية العظمى لـ $\hat{\theta}=(\theta_1,\theta_2^2)$. وعلى ذلك نسبة المعقولية العامة:

$$\lambda_n(x;\theta_0)=\left(\frac{s^2}{\theta_{20}^2}\right)^{n/2}e^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\sum_1^n\left(\frac{x_i-\theta_1}{\theta_{20}}\right)^2}=\left(\frac{y}{n}\right)^{n/2}e^{-\frac{1}{2}(y-n)}\quad;\quad y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\theta_1}{\theta_{20}^2}\right)^2$$

والمتباينة $\lambda_n \le c$ المعرفة لاختبار نسبة المعقولية تكافئ المتباينة:

$$y^{n/2}e^{-y/2}\le cn^{n/2}e^{-n/2}=d$$

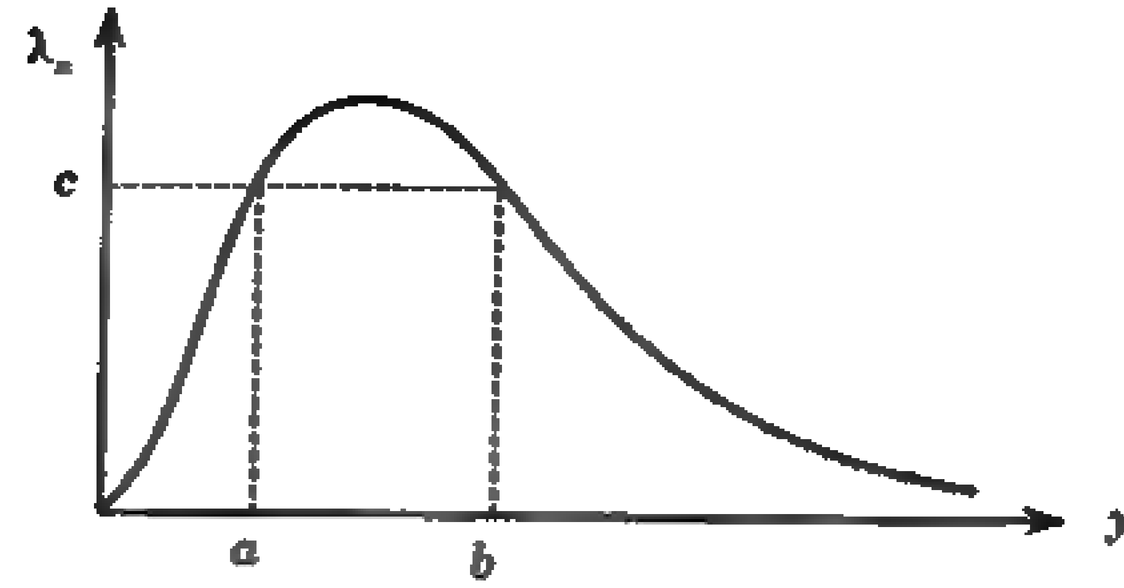
وكما نعلم أن توزيع Y، عند صحة فرضية العدم H_0، هو توزيع χ^2 بـ $(n-1)$ درجة حرية [راجع المبرهنة (5.9.3-I)]. وإذا مثلنا العلاقة بين y و λ_n بيانياً نحصل على الشكل (3.2.5).

أي أن منطقة رفض اختبار نسبة المعقولية العامة:

$$G_1=\{x:\lambda_n(x;\theta_0)\le c\}$$

يمكن كتابتها على الصورة:

$$G_1 = \{x : y \le a \text{ or } b \le y < \infty\}$$



شكل (3.2.5)

ويتعين الثابتان a , b من العلاقتين:

$$\int_0^a f(y|H_0)dy = \alpha_1 \quad , \quad \int_b^\infty f(y|H_0)dy = \alpha_2 \quad ; \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

أي أن:

$$a = \chi^2_{1-\alpha_1;n-1} \quad , \quad b = \chi^2_{\alpha_2;n-1}$$

ويصبح اختبار نسبة المعقولية العامة بحجم α معطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha} = \{x : y \le \chi^2_{1-\alpha_1;n-1} \text{ or } y \ge \chi^2_{\alpha_2;n-1}\}$$

ونلاحظ أن اختبار نسبة المعقولية العامة $G_{1\alpha}$ ليس بالضرورة الأمثل (غير المتحيز الأقوى بانتظام)، وهذا يتوقف على اختيار القيمتين α_1 , α_2 $(\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha)$ كما رأينا في المثال (3.2.4).

مثال 4.2.5

إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta) = 2e^{-2(x-\theta)} \quad ; \quad x \ge \theta$$

أوجد اختبار نسبة المعقولية العامة لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضـــد $H_1 : \theta \neq \theta_0$، عند مستوى معنوية α.

علما أن:

$$\theta = \{\theta : \theta \leq x\} \quad , \quad \theta_0 = \{\theta = \theta_0\}$$

ودالة المعقولية:

$$L_n(x;\theta) = 2^n \exp\left(2n\theta - 2\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

فإن:

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} L_n(x;\theta) = L_n(x;\theta_0) = \exp\left(2n\theta_0 - 2\sum_{1}^{n} x_i\right)$$
$$\sup_{\theta\in\Theta} L_n(x;\theta) = L_n\left(x; x_{(1)} = \min(x)\right) = \exp\left(2nx_{(1)} - 2\sum_{1}^{n} x_i\right)$$

حيث إن $\hat{\theta}_n(X) = X_{(1)}$ مقدّر المعقولية العظمى للمعلمة θ. وعلى ذلك نسبة المعقولية:

$$\lambda_n(x;\theta_0) = \frac{L_n(x;\theta_0)}{L_n(x;x_{(1)})} = \exp\left[2n(\theta_0 - x_{(1)})\right]$$

والمتباينة المعرفة لاختبار نسبة المعقولية العامة:

$$\lambda_n = e^{2n(\theta_0 - x_{(1)})} \leq c$$

مكافئة للمتباينة:

$$-2\ln\lambda_n = -4n\left(\theta_0 - (x_{(1)})\right) \geq -2\ln c \;\Rightarrow\; x_{(1)} \geq \frac{(4n\theta_0 - 2\ln c)}{4n} = d$$

ومن ثم اختبار نسبة المعقولية العامة يعطى بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1 = \{x : x_{(1)} \geq d\}$$

وكما نعلم أن دالة الكثافة الاحتمالية للإحصاء $X_{(1)}$، عند صحة فرضية العدم H_0،

هي:

$$\lambda\left(x_{(1)};\theta_0\right)=2ne^{-2n\left(x_{(1)}-\theta_0\right)} \quad ; \quad x_{(1)} \geq \theta_0$$

[انظر العلاقة (4.10.3-I)]. وبالتالي يتعين الثابت d من العلاقة:

$$\int_d^{\infty} 2ne^{-2n\left(x_{(1)}-\theta_0\right)} dx_{(1)}=\alpha$$

ومنها نجد:

$$e^{-2n(d-\theta_0)}=\alpha \;\Rightarrow\; d=\theta_0-\frac{1}{2n}\ln\alpha$$

ومن ثم اختبار نسبة المعقولية العامة بحجم α يكون:

$$G_{1\alpha}=\left\{x: x_{(1)} \geq \theta_0-\frac{1}{2n}\ln\alpha\right\}$$

مثـــال 5.2.5

لتكن $X=(X_1,\ldots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x} \quad ; \quad x>0 \;,\; \theta=\{\theta:\theta>0\}$$

اختبر الفرضية $H_0:\theta\leq\theta_0$ ضد $H_1:\theta>\theta_0$، عند مستوى معنوية $0<\alpha<1$.

بما أن:

$$f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x} \quad ; \quad \theta>0 \;,\; x>0$$

فإن دالة المعقولية:

$$L(x;\theta)=\theta^n e^{-n\theta\bar{x}}$$

وعلى ذلك:

$$\sup_{\theta\in\Theta} L(x;\theta) = \sup_{\theta>0} L(x;\theta) = \left(n/\sum x_i\right)^n e^{-n}$$

حيث إن $\hat{\theta} = \left(n/\sum x_i\right) = 1/\bar{x}$ تقدير المعقولية العظمى للمعلمة θ.

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} L(x;\theta) = \sup_{\theta\le\theta_0} L(x;\theta) = \begin{cases} \left(n/\sum x_i\right)^n e^{-n} & ; \quad \left(n/\sum x_i\right) \le \theta_0 \\ \theta_0^n \exp\left(-\theta_0 \sum x_i\right) & ; \quad \left(n/\sum x_i\right) > \theta_0 \end{cases}$$

ومن ثم:

$$\lambda_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad \left(n/\sum x_i\right) \le \theta_0 \\ \dfrac{\theta_0^n \exp\left(-\theta_0 \sum x_i\right)}{\left(n/\sum x_i\right)^n e^{-n}} & ; \quad \left(n/\sum x_i\right) > \theta_0 \end{cases} \qquad (1)$$

إذا كانت $0 < c < 1$، فإن اختبار نسبة المعقولية العامة يعطى بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1 = \{x : \lambda_n(x) \le c\}$$

أي نرفض H_0 عندما $\left(n/\sum x_i\right) > \theta_0$. وعندئذٍ:

$$\lambda_n(x) = \left(\theta_0 \sum x_i / n\right)^n \exp\left(-\theta_0 \sum x_i + n\right) \le c \qquad (2)$$

أو نرفض H_0 عندما:

$$\lambda_n(x) = (\theta_0\bar{x})^n e^{-n(\theta_0\bar{x}-1)} \le c \quad , \quad \theta_0\bar{x} < 1$$

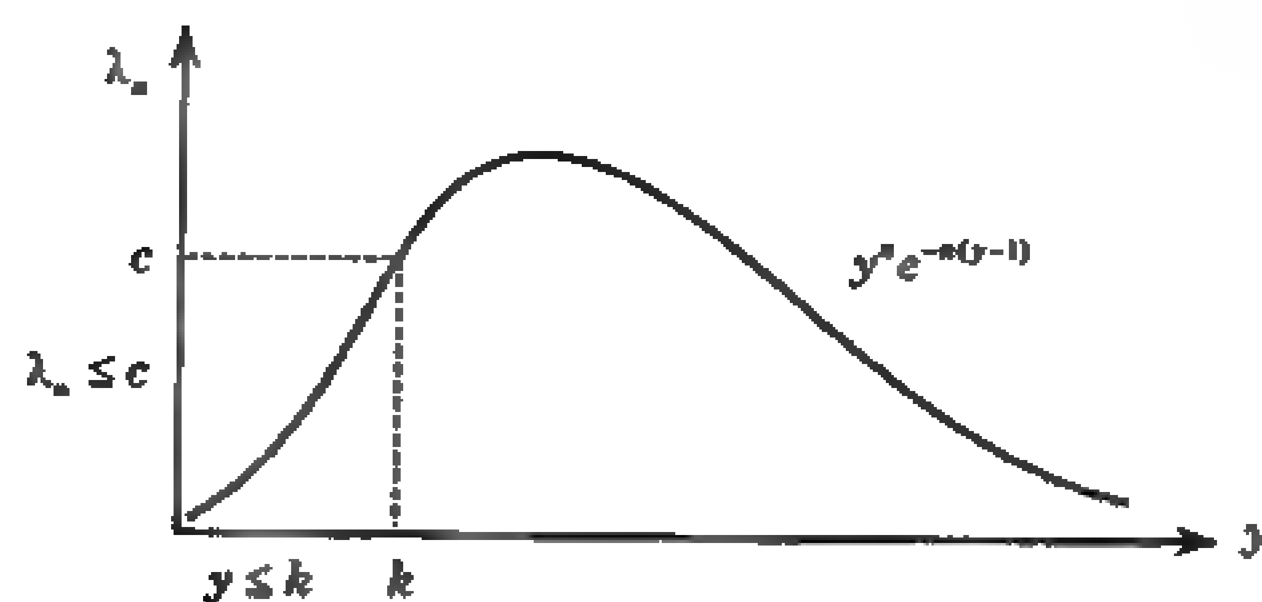
بوضع $y = \theta_0\bar{x}$ نجد:

$$\lambda_n(x) = y^n e^{-n(y-1)}$$

وهي دالة غير متناقصة في y وتبلغ قيمتها العظمى عند $y = 1$. ومن ثم عندما $\lambda_n < 1$ فإن المتباينة:

$$y^n e^{-n(y-1)} \le c$$

مكافئة للمتباينة $y \leq k$ ، حيث إن $0 < k < 1$ عدد ثابت. يبدو ذلك بوضـــوح علـــى الشكل (4.2.5).



شكل (4.2.5)

وبالتالي، فإن اختبار نسبة المعقولية العامة يعطي بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1 = \{x : y = \theta_0 \bar{x} \leq k\} \quad ; \quad 0 < k < 1$$

بما أن:

$$\mathcal{L}_\theta(X_i) = \Gamma\left(1, \frac{1}{\theta}\right) \Rightarrow \mathcal{L}_\theta\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \Gamma\left(n, \frac{1}{\theta}\right) \Rightarrow$$
$$\mathcal{L}_\theta\left(U = 2\theta\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \Gamma(n,2)$$

أي أن $U = 2\theta\sum_{1}^{n} X_i$ يخضع لتوزيع χ^2 بـــ $2n$ درجة حرية [راجـــع المبرهنـــة (I-4.3.2)]. وبالتالي يتعين الثابت k من حل المعادلة:

$$\alpha = P_\theta(\theta_0 \overline{X} \leq k) = P_{\theta_0}\left(U = 2\theta_0\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 2nk\right) = \int_0^{2nk} \frac{1}{2^n \Gamma(n)} u^{n-1} e^{-u/2} du$$

ومن جدول توزيع χ^2 بـــ $2n$ درجة حرية ومستوى معنوية α نجد القيمة الحرجة الموافقة:

$$2nk = \chi^2_{1-\alpha;2n} \Rightarrow k = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha;n}$$

ويصبح اختبار نسبة المعقولية العامة بحجم α موافق لمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha} = \left\{ x : \bar{x} \leq \frac{1}{2n\theta_0} \chi^2_{1-\alpha,n} \right\}$$

في الأمثلة السابقة وجدنا بسهولة التوزيع الحقيقي للإحصاء Λ_n من خلال معرفة توزيع دالة مضطردة فيه، عند صحة الفرضية H_0، التي مكنتنا من بناء اختبار نسبة المعقولية العامة. وتوفر مثل تلك الدالة يعتبر صفة مميزة للنماذج الأسية التي تعتمد على معلمة واحدة. ومن أجل نماذج أخرى ليس بالإمكان دائماً إيجاد التوزيع الحقيقي لإحصاء نسبة المعقولية العامة، لذا، من أجل عينات عشوائية منتهية فطريقة نسبة المعقولية لا تتيح دائماً بناء الاختبارات، لكن من أجل عينات عشوائية كبيرة الحجم، عند شروط عامة، يمكن معرفة التوزيع المقارب للإحصاء $T(X) = -2\ln\Lambda_n$، الذي يمكن استعماله لبناء منطقة الرفض التقريبية لاختبار نسبة المعقولية العامة. هكذا، في غالبية الحالات يمكن بناء الاختبار المقارب لاختبار نسبة المعقولية العامة، المؤسس على منطقة رفض من الشكل:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{x : -2\ln\lambda_n(x;\theta_0) \geq d\} \quad ; \quad d = -2\ln c \\ &= \{x : t = T(x) \geq d\} \end{aligned}$$

وهذا موضوع بحثنا في البند التالي.

3.5 اختبار نسبة المعقولية العامة في حالة عينات كبيرة

GENERALIZED LIKELIHOOD TEST FOR LARGE SAMPLES

سنفترض فيما يلي أن شروط الانتظام [راجع البند (6.4-I)] محققة من أجل النموذج الإحصائي $f(x;\theta)$، التي تضمن الوحدانية والطبيعية بالتقارب لمقدّر المعقولية العظمى للمعلمة $\theta = (\theta_1,...,\theta_r)$ ونرمز له بـ:

$$\hat{\theta}_n(X) = \left(\hat{\theta}_{1n}(X),...,\hat{\theta}_{rn}(X)\right)$$

حيث إن $X=(X_1,\ldots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع دالة كثافته (دالة احتماله) $f(x;\theta)$ و $\hat{\theta}_{in}(X);i=1,2,\ldots,r$ مقدّر المعقولية العظمى للمعلمة وحيدة البعد θ_i [انظر العلاقة (4.2.6-I)].

لنرَ أولاً حالة فرضية العدم بسيطة $H_0:\theta_0=(\theta_{10},\ldots,\theta_{r0})$ ضد فرضية بديلة مركبة H_1.

مبرهنة 1.3.5

إذا كانت $X=(X_1,\ldots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $f(x;\theta)$، ويطلب اختبار فرضية العدم البسيطة $H_0:\theta=\theta_0$ ضد فرضية بديلة مركبة H_1، حيث إن θ_0 نقطة داخلية من فضاء المعلمة θ، فمن أجل عينات كبيرة الحجم $(n\to\infty)$ تعطى منطقة الرفض التقريبية لاختبار نسبة المعقولية العامة على الصورة:

$$G_{1\alpha}=\{x:-2\ln\lambda_n(x;\theta_0)\geq\chi^2_{\alpha;r}\}\quad;\quad\lambda_n(x;\theta_0)=\Lambda_n(x;\theta_0)\tag{1.3.5}$$

وهذا يعني عندما $n\to\infty$:

$$P_{\theta_0}(X\in G_{1\alpha})=P_{\theta_0}\left(-2\ln\Lambda_n(X;\theta_0)\geq\chi^2_{\alpha;r}\right)\to\alpha$$

أي أن:

$$\mathcal{L}_{\theta_0}(-2\ln\Lambda_n)\to\chi^2_{(r)}$$

وتتحدد درجات الحرية r بعدد المعالم التي تحددها فرضية العدم H_0.

الإثبات

سنبين عند تحقق شروط المبرهنة أن:

$$\mathcal{L}_{\theta_0}\left(-2\ln\Lambda_n(X;\theta_0)\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\chi^2_{(r)}\tag{2.3.5}$$

ومنه ينتج صحة الاختبار (1.3.5).

إذا كانت فرضية العدم H_0 صحيحة، حسب خاصة الاتساق لمقـــدِّر المعقوليـــة العظمى، عندما تكون n كبيرة، فإن النقطة $\hat{\theta}_n(x)$ قريبة من النقطة θ_0، لذا يمكن كتابـــة مشور تيلور للدالة $\ln L_n(\theta_0) = \ln L_n(X;\theta_0)$ بالنسبة للنقطة $\hat{\theta}_n$ على النحو الآتي:

$$\ln L_n(\theta_0) = \ln L_n(\hat{\theta}_n) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} \frac{\partial^2 \ln L_n(\theta^*)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\left(\hat{\theta}_{in} - \theta_{i0}\right)\left(\hat{\theta}_{jn} - \theta_{j0}\right)$$

حيث إن $\left|\theta^* - \theta_0\right| < \left|\hat{\theta}_n - \theta_0\right|$. وعلى ذلك فإن:

$$\begin{aligned} Q_n^* = -2\ln \Lambda_n(X;\theta_0) &= -2\ln\left[\sup_{\theta\in\Theta_0} L_n(X;\theta) \Big/ \sup_{\theta\in\Theta} L_n(X;\theta)\right] \\ &= -2\ln\left[L_n(X;\theta_0)/L_n(X;\hat{\theta}_n)\right] \\ &= 2\left[\ln L_n(X;\hat{\theta}_n) - \ln L_n(X;\theta_0)\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{r} -\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L_n(\theta^*)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{in} - \theta_{i0}\right)\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{jn} - \theta_{j0}\right) \quad (3.3.5) \end{aligned}$$

بمـــا أن θ^* تقدير متسق لـــ θ_0 (لأن $\left|\theta^* - \theta_0\right| < \left|\hat{\theta}_n - \theta_0\right|$، حسب الفـــرض، و $\hat{\theta}_n(X)$ مقدِّر متسق لـــ θ_0، عند صحة H_0). والمشتقات الثانيـــة لدالـــة المعقوليـــة $L(X;\theta)$، حسب الفرض [تحقق شروط الانتظام في النموذج الإحصـــــائي $f(x;\theta)$]، مستمرة بالنسبة لـــ θ، فإنه حسب المبرهنة (2.14.3-I):

$$\frac{\partial^2 \ln L_n(\theta^*)}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \xrightarrow{P_{\theta_0}} \frac{\partial^2 \ln L_n(\theta_0)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}$$

وبناءً على قانون الأعداد الكبيرة، عندما $n \to \infty$، فالمقدار:

$$\frac{1}{n}\frac{\partial^2 \ln L_n(\theta_0)}{\partial\theta_i \partial\theta_j} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \ln f(X_k;\theta_0)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}$$

يتقارب بالاحتمال (وفق التوزيع P_{θ_0}) من المتوسط:

$$E_{\theta_0}\left(\frac{\partial^2 \ln f(X_1;\theta_0)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right) \Rightarrow g_{ij} = -E_{\theta_0}\left(\frac{\partial^2 \ln f(X_1;\theta_0)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right)$$

[راجع البند (I-7.4)].

هكذا، مصفوفة القيم النهائية (الحدية) لمعاملات الصيغة التربيعية في (3.3.5) تنطبق على مصفوفة المعلومات $I(\theta_0)$ [أنظر العلاقة (I-6.7.4)]. وبناءً على العلاقة (I-18.2.6):

$$\forall \theta \in \Theta : \mathcal{L}_\theta\left(\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n(X)-\theta\right)\right) \to N\left(O, I^{-1}(\theta)\right) \quad ; \quad |I| \neq 0$$

عندما $n \to \infty$. ومن ذلك يتنج أن توزيع المتجه العشوائي $\eta_n = \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n(X)-\theta_0\right)$، عندما $n \to \infty$ هو:

$$\mathcal{L}_{\theta_0}\left(\eta_n = \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n(X)-\theta_0\right)\right) \to N\left(O, I^{-1}(\theta_0)\right)$$

وهذا يعني أن الجزء الأيمن من العلاقة (3.3.5) عبارة عن صيغة تربيعية $Q_n^* = \eta_n' I(\theta^*)\eta_n$ في متغيرات عشوائية طبيعية، عندما $n \to \infty$، حيث إن η_n' منقول المصفوفة η_n. وبالتالي Q_n^* له نفس التوزيع المقارب للصيغة التربيعية $Q_n = \eta_n' I(\theta_0)\eta_n$، وحسب المبرهنة (I-4.9.3):

$$\mathcal{L}(Q_n) = \chi^2_{(r)}$$

أي أن التوزيع المقارب $Q_n^* = -2\ln \Lambda_n(X;\theta_0)$ هو توزيع χ^2 بـ r درجة حرية، ومنها صحة العلاقة (1.3.5).

ملاحظة 1:

يتطابق التوزيعان المقاربان للإحصاءين $Q_n^* = -2\ln \Lambda_n$ و $Q_n^{(1)} = \eta_n' I^{-1}(\hat{\theta}_n)\eta_n$ عند صحة فرضية العدم H_0، لذا اختبار نسبة المعقولية العامة بحجم α مكافئ تقاربياً للاختبار:

$$G_{1\alpha}^{(1)} = \left\{Q_n^{(1)} \geq \chi^2_{\alpha;r}\right\} \qquad (4.3.5)$$

وإذا استبدلنا $I(\hat{\theta}_n)$ بـ $I(\theta_0)$، فنحصل على اختبار آخر مكافئ تقاربياً لاختبار نسبة المعقولية العامة ($\hat{\theta}_n(X)$ مقدر متسق لـ θ_0) هو:

$$G_{1\alpha} = \{Q_n \geq \chi^2_{\alpha;r}\} \quad ; \quad Q_n = \eta'_n I^{-1}(\theta_0)\eta_n \tag{5.3.5}$$

ملاحظة 2:

بما أن مقدِّر المعقولية العظمى طبيعي بالتقارب $\mathcal{L}_\theta\left(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n(X)-\theta)\right) \to N(0,1/i(\theta))$ [أنظر العلاقة (20.2.6-I)] و $\mathcal{L}_\theta\left(U_n(\theta)/\sqrt{ni(\theta)}\right) \to N(0,1/i(\theta))$ حيث إن:

$$U_n(\theta) = \frac{\partial \ln L(X;\theta)}{\partial\theta}$$

و $i(\theta)$ معلومات فيشر التي تقدمها ملاحظة واحدة حول المعلمة وحيدة البعد θ، فإن التوزيعين المقاربين لـ $\eta_n = \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n(X)-\theta\right)$ و $U_n(\theta_0)/\sqrt{ni(\theta_0)}$ متطابقان. وفي حالة معلمة متعددة الأبعاد تبقى هذه النتيجة صحيحة إذا استبدلنا المقدار $U_n(\theta_0)/\sqrt{ni(\theta_0)}$ بالمقدار $\left[I^{-1}(\theta_0)U_n(\theta_0)\right]/\sqrt{n}$، حيث أن:

$$\boldsymbol{U}_n(\theta) = \left(U_{1n}(\theta),\ldots,U_{rn}(\theta)\right) \quad , \quad U_{in}(\theta) = \frac{\partial \ln L_n(\theta)}{\partial\theta_i} \quad ; \quad i = 1,\ldots,r$$

من ذلك ومن الملاحظة (1) نجد أن الإحصاءين:

$$Q_n^{(1)} = \eta'_n I^{-1}(\hat{\theta}_n)\eta_n \quad , \quad Q_n^{(2)} = (1/n)U'_n(\theta_0)I^{-1}(\theta_0)U_n(\theta_0)$$

لهما نفس التوزيع المقارب $(\chi^2_{(r)})$، عند صحة الفرضية H_0. وبالتالي، اختبار نسبة المعقولية العامة بحجم α مكافئ تقاربياً للاختبار:

$$G_{1\alpha}^{(2)} = \{Q_n^{(2)} \geq \chi^2_{\alpha;r}\} \tag{6.3.5}$$

وتكمن أهمية الاختبار (6.3.5) أنه لا يعتمد على تقدير المعقولية العظمى، وبالتالي يكون استخدامه مفيداً في تلك الحالات التي لا يمكن الحصول فيها على شكل واضح

لمقدّر المعقولية العظمى.

هكذا، في مسألة اختبار فرضيـة بسـيطة $H_0 : \theta = \theta_0$ ضـد فرضيـة مركبـة $H_1 : \theta_0 \in \Theta \setminus \{\theta_0\}$ إن الاختبارات (1.3.5)، (4.3.5)، (5.3.5) و (6.3.5) متكافئة تقاربياً، وهذا يعني أن مستوى المعنوية لكل منها ينتهي إلى α، عندما $n \to \infty$.

مثـال 1.3.5

إذا كانت لدينا معطيات المثال (4.2.5) وحجم العينة n كبيراً، فـأوجد منطقـة الرفض التقريبية لاختبار نسبة المعقولية العامة بحجم α.

رأينا في المثال (4.2.5) أن اختبار نسبة المعقولية بحجم α لاختبـار $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_0$ يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha} = \left\{ x : x_{(1)} \geq \theta_0 - \frac{1}{2n} \ln \alpha \right\} \tag{1}$$

ونسبة المعقولية:

$$\lambda_n(x; \theta_0) = e^{2n(\theta_0 - x_{(1)})}$$

أي أن:

$$-2 \ln \lambda_n = -4n(\theta_0 - x_{(1)})$$

ومن ثم منطقة الرفض التقريبية لاختبار نسبة المعقولية العامة بحجم α هي:

$$\begin{aligned} G_{1\alpha} &= \left\{ x : -2 \ln \lambda_n(x; \theta_0) \geq \chi^2_{\alpha;1} \right\} \\ &= \left\{ x : x_{(1)} \geq \theta_0 + \frac{1}{4n} \chi^2_{\alpha;1} \right\} \end{aligned} \tag{2}$$

نلاحظ بمقارنة منطقتي الرفض (1) و (2) أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\theta_0 - \frac{1}{2n}\ln\alpha\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\theta_0 + \frac{1}{4n}\chi^2_{\alpha;1}\right) = \theta_0$$

وبالتالي عندما تكون n كبيرة فإن $\theta_0 - \frac{1}{2n}\ln\alpha \approx \theta_0 + \frac{1}{4n}\chi^2_{\alpha;1}$. فمثلاً، عندما $\alpha = 0.05$ و $n = 30$ نجد:

$$\theta_0 - \frac{1}{2n}\ln\alpha = \theta_0 + \frac{3}{60} = \theta_0 + 0.050$$

$$\theta_0 + \frac{1}{4n}\chi^2_{\alpha;1} = \theta_0 + \frac{3.84}{120} = \theta_0 + 0.032$$

والفرق 0.018. وعندما $n = 50$ نجد:

$$\theta_0 - \frac{1}{2n}\ln\alpha = \theta_0 + \frac{3}{100} = \theta_0 + 0.03$$

$$\theta_0 + \frac{1}{4n}\chi^2_{\alpha;1} = \theta_0 + \frac{3.84}{200} = \theta_0 + 0.02$$

والفرق 0.01.

مثال 2.3.5

إذا كانت $X = (X_1, \ldots, X_n)$ عينة عشوائية كبيرة الحجم من توزيع بواسون $\Pi(\theta)$، فاختبر فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_0$، عند مستوى معنوية (دلالة) α.

كما نعلم أن مقدّر المعقولية العظمى لـ θ هو $\hat{\theta}(X) = \overline{X}$، ومنه:

$$\lambda_n(x;\theta_0) = \frac{L(x;\theta_0)}{L(x;\overline{x})} = \left(\frac{\theta_0}{\overline{x}}\right)^{n\overline{x}} e^{n(\overline{x}-\theta_0)}$$

ومن ثم:

$$-2\ln\lambda_n(x;\theta_0) = -2\ln\left[\left(\frac{\theta_0}{\overline{x}}\right)^{n\overline{x}} e^{n(\overline{x}-\theta_0)}\right] = -2n\overline{x}\ln\frac{\theta_0}{\overline{x}} - 2n(\overline{x} - \theta_0)$$

وبالتالي منطقة الرفض التقريبية لاختبار نسبة المعقولية العامة هي:

$$G_{1\alpha}=\left\{x:-2n\bar{x}\ln\frac{\theta_0}{\bar{x}}-2n(\bar{x}-\theta_0)\geq\chi^2_{\alpha;1}\right\}$$

مثـال 3.3.5:

إذا كانت $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية كبيرة الحجم من توزيـــــع $N(\theta,9)$، فأوجد منطقة الرفض التقريبية لاختبار الفرضية $H_0:\theta=\theta_0$ ضد $H_1:\theta\neq\theta_0$، عنـــد مستوى معنوية α.

كما نعلم:

$$L(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\theta}{3}\right)^2}=\left(\frac{1}{18\pi}\right)^{n/2}e^{-\frac{1}{18}\sum_1^n(x_i-\theta)^2}$$

وعلى ذلك:

$$\sup_{\theta\in\Theta_0}L(x;\theta)=\left(\frac{1}{18\pi}\right)^{n/2}e^{-\frac{1}{18}\sum(x_i-\theta_0)^2}$$

$$\sup_{\theta\in\Theta}L(x;\theta)=\frac{1}{18\pi}e^{-\frac{1}{18}\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

$$\lambda_n(x;\theta_0)=\exp\left\{\frac{1}{18}\left[\sum(x_i-\bar{x})^2-\sum(x_i-\theta_0)^2\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{18}\left[n(2\theta_0-1)\bar{x}-n\theta_0^2\right]\right\}$$

$$-2\ln\lambda_n=-\frac{1}{9}\left[n(2\theta_0-1)\bar{x}-n\theta_0^2\right]$$

وبالتالي منطقة الرفض التقريبية:

$$G_{1\alpha}=\left\{x:(2\theta_0-1)\bar{x}\leq-\frac{9}{n}\chi^2_{\alpha;1}+\theta_0^2\right\}$$

1.3.5 اختبار نسبة المعقولية العامة من أجل توزيع متعدد الحدود

تصادفنا في الحياة العملية تجارب مركبة مؤلفة من تكرارات مستقلة لتجربة مفروضة. وكل تكرار (محاولة) ينتهي إلى إحدى النتائج المانعة بالتبادل $A_1, A_2, \dots, A_k$ (فئات، أصناف أو خلايا)، أي أن المتغير العشوائي الملاحظ ع الذي يصف نتيجة المحاولة أو التكرار يفترض القيم $j = 1,2,\dots,k$ ($j =$ ع إذا كانت نهاية التكرار أو المحاولة هي النتيجة A_j) ونرمز بـ $p_j ; j = 1,\dots,k$ لاحتمال ظهور النتيجة A_j في التكرار، وبالتالي $p = (p_1,\dots,p_k)$ متجه الاحتمالات لهذه النتائج $\left(\sum_1^k p_i = 1\right)$، وإذا كان عدد التكرارات المستقلة هو n، وكان v_j عدد مرات ظهور A_j (ضمن الـ n تكرار)، فإن $v = (v_1,\dots,v_k)$ متجه التكرارات الموافق للنتائج $A_1,\dots,A_k$ $\left(\sum_1^k v_j = n\right)$ عبارة عن متغير عشوائي يخضع لتوزيع متعدد الحدود $M(n,p)$ ؛ أي أن دالة احتماله:

$$f(v_1 = h_1,\dots,v_k = h_k; p) = \frac{n}{\prod_1^k (h_j!)} \prod_1^k p_j^{h_j}$$

حيث إن $\sum_{j=1}^k h_j = n$ ، $h = (h_1,\dots,h_k)$ القيمة الملاحظة لـ v ، أي أن $h_j ; j = 1,2,\dots,k$ التكرار الملاحظ لـ A_j .

لنفترض أن الاحتمالات $p_1,\dots,p_k$ غير معلومة، ونريد اختبار فرضية العدم البسيطة $H_0 : p = p_0 = (p_{10},\dots,p_{k0})$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : p \neq p_0$ ، باستخدام طريقة نسبة المعقولية العامة، عندما تكون n كبيرة. عادة يتم الاعتماد على الإحصاء:

$$X_n^2(v) = \sum_{i=1}^k \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_1^k \frac{v_i^2}{np_i} - n \qquad (7.3.5)$$

أو أي إحصاء آخر توزيعه المقارب متطابق مع التوزيع المقارب لـ $X_n^2(v)$ ، عند صحة فرضية العدم H_0 . لذا نحتاج لمعرفة التوزيع المقارب لـ $X_n^2(v)$ ، عند صحة فرضية

العدم H_0 . وهذا ما تعطيه المبرهنة الآتية:

مبـرهنة 2.3.5

إذا كانت $0 < p_{j0} < 1 ; j = 1,...,k$ ، فإن:

$$\mathcal{L}_{P_0}\left(X_n^2(v)\right) \to \chi^2_{(k-1)}$$

عـندما $n \to \infty$.

الإثبـات

باستخدام تعريف التوقع في حالة توزيع متقطع والصيغة:

$$(a_1 + ... + a_k)^n = \sum_{h_1+...+h_k=n} \frac{n!}{h_1!....h_k!} a_1^{h_1}...a_k^{h_k}$$

(هنا المجموع يتم على كل القيم الصحيحة غير الســالبة $(h_1,....,h_k)$ المحققــة للشــرط $h_1 + ... + h_k = n$)، نحصل على الدالة المميزة للمتجه $v = (v_1,...,v_k)$ ، عنـــد صحــة فرضية العدم H_0 ، وهي:

$$\begin{aligned}
E_{P_0} e^{it'v} &= \sum_{v_1+...+v_k=n} e^{it'v} \frac{n!}{v_1!...v_k!} p_{10}^{v_1}... p_{k0}^{v_k} \\
&= \sum_{v_1+...+v_k=n} \frac{n!}{v_1!...v_k!} p_{10}^{v_1} e^{it_1v_1}... p_{k0}^{v_k} e^{it_kv_k} \\
&= \sum_{v_1+...+v_k=n} \frac{n!}{v_1!...v_k!} \left(p_{10}e^{it_1}\right)^{v_1}... \left(p_{10}e^{it_k}\right)^{v_k} \\
&= \left(p_{10}e^{it_1}... p_{k0}e^{it_k}\right)^n \quad ; \quad t = (t_1,...,t_n)
\end{aligned}$$

وإذا رمزنا بـ $v_j^* = \frac{v_j - np_{j0}}{\sqrt{n}} ; j = 1,...,k$ و $v^* = (v_1^*,...,v_k^*)$ نجد:

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(t) = E_{P_0} e^{it'v^*} &= E_{P_0} e^{it'v/\sqrt{n}} e^{-i\sqrt{n}t'P_0} \\
&= e^{-i\sqrt{n}t'P_0} E_{P_0} e^{it'v/\sqrt{n}} \\
&= e^{-i\sqrt{n}t'P_0} \left(p_{10} e^{it_1/\sqrt{n}} + \ldots + p_{k0} e^{it_k/\sqrt{n}} \right)^n \\
&= e^{-i\sqrt{n}t'P_0} \left[1 + \sum_{j=1}^{k} p_{j0} \left(e^{it_j/\sqrt{n}} - 1 \right) \right]^n
\end{aligned}
$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين:

$$
\ln \varphi_n(t) = -i\sqrt{n}t'p_0 + n \ln \left[1 + \sum_{j=1}^{k} p_{j0} \left(e^{it_j/\sqrt{n}} - 1 \right) \right]
$$

وبتطبيق العلاقة:

$$
\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + O(\varepsilon^2) \quad ; \quad \varepsilon \to 0
$$

حيث إن:

$$
\varepsilon = \sum_{j=1}^{k} p_{j0} \left(e^{it_j/\sqrt{n}} - 1 \right)
$$

نجد، عندما $n \to \infty$ و $|t| \le c < \infty$، فإن:

$$
\begin{aligned}
\ln \varphi_n(t) = -i\sqrt{n}t'p_0 + n \sum_{j=1}^{k} p_{j0} \left(e^{it_j/\sqrt{n}} - 1 \right) - \\
- \frac{n}{2} \left[\sum_{j=1}^{k} p_{j0} \left(e^{it_j/\sqrt{n}} - 1 \right) \right]^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \\
= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} p_{j0} t_j^2 + \left(\sum_{j=1}^{k} p_{j0} t_j \right)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\
= -\frac{1}{2} t'\Sigma t + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \quad ; \quad \Sigma = \|\sigma_{ij}\|_1^k
\end{aligned}
$$

إذا رمزنا بـــ $\eta_j ; j = 1,\ldots,k$ لنتيجة التكرار بالنسبة لـــ A_j، بحيث $\eta_j = 1$، إذا

كانت نتيجة التكرار A_r و $\eta_r = 0$ خلاف ذلك فإن:

$$\Sigma = \|\sigma_{ij}\|_1^k \quad , \quad \operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j) = \sigma_{ij} = \begin{cases} p_{i0}(1-p_{i0}) & ; \quad i = j \\ -p_{i0}p_{k0} & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

وعلى ذلك أن نهاية الدالة المميزة للمتجه υ^* هي:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \exp[-(1/2)t'\Sigma t]$$

وهذه النهاية ما هي إلا الدالة المميزة للتوزيع الطبيعي $N(O,\Sigma)$، [أنظر العلاقة (I-18.3.2)]. وبالتالي:

$$\mathcal{L}_{P_n}(\upsilon^*) \to N(O,\Sigma)$$

عندما $n \to \infty$.

لكن مصفوفة العزوم من المرتبة الثانية (مصفوفة التغايرات المشتركة) Σ شاذة ($|\Sigma| = 0$)، لأن قيم المعالم $p_1,\ldots,p_k$ مقيدة بالشرط $\sum_1^k p_i = 1$، وبالتالي يجب التخلص من هذا القيد، فمثلاً نحذف $p_k = 1 - p_1 - \ldots - p_{k-1}$. وعندئذٍ تصبح المصفوفة من المرتبة $(k-1)$:

$$\Sigma(k-1) = \|\sigma_{ij}\|_1^{k-1}$$

غير شاذة، أي محددها $|\Sigma(k-1)| \neq 0$. وبالتالي توزيع المتجه الجزئي $\upsilon^*(k-1) = (\upsilon_1^*,\ldots,\upsilon_{k-1}^*)$، عندما $n \to \infty$، هو التوزيع الطبيعي $N(O,\Sigma(k-1))$، أي أن:

$$\mathcal{L}_{P_n}(\upsilon^*(k-1)) \to N(O,\Sigma(k-1))$$

وحسب المبرهنة (I-4.9.3) وملاحظة $E_{P_n}(\upsilon_i^*) = 0 ; i = 1,\ldots,k-1$ نجد:

$$\mathcal{L}_{P_n}\left(Q_n = \upsilon^{*'}(k-1)\Sigma^{-1}(k-1)\upsilon^*(k-1)\right) \to \chi^2_{(k-1)} \qquad (8.3.5)$$

لكن من العلاقة (7.3.5) نجد أن:

$$X_n^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_{j0}} \left(\frac{v_i - np_{j0}}{\sqrt{n}} \right)^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_{j0}} (v_j^*)^2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{p_{j0}} (v_j^*)^2 + \frac{1}{p_{k0}} \left(v_1^* + ... + v_{k-1}^* \right)$$
$$= v^{*'}(k-1) A v^*(k-1)$$

حيث إن:

$$A = \| a_{ij} \|_1^{k-1} \quad , \quad a_{ij} = \begin{cases} 1/p_{i0} + 1/p_{k0} & ; \ i = j \\ 1/p_{k0} & ; \ i \neq j \end{cases} \qquad (9.3.5)$$

ويمكن بسهولة إثبات أن:

$$A\Sigma(k-1) = \Sigma(k-1)A = E(k-1) \ \Rightarrow \ A = \Sigma^{-1}(k-1)$$

أي أن:

$$X_n^2 = v^{*'}(k-1)\Sigma^{-1}(k-1)v^*(k-1)$$

وبالتالي، حسب العلاقة المثبتة (8.3.5)، فإن:

$$\mathcal{L}_{p_0}(X_n^2) \to \chi^2_{(k-1)}$$

عندما $n \to \infty$. وهو المطلوب.

ملاحظة 3:

يمكن في التطبيقات الإحصائية استخدام توزيع $\chi^2_{(k-1)}$ كتقريب جيد لتوزيع الإحصاء X_n^2 عند صحة فرضية العدم H_0، وذلك عندما يكون عدد التكرارات المستقلة $n \geq 50$ و $v_j \geq 5 \, ; j = 1,...,k$. وعندئذٍ يؤخذ الحد الحرج مساوياً لـ $t_\alpha = \chi^2_{\alpha,k-1}$.

لنعد الآن إلى اختبار الفرضية $H_0 : p = p_0 \, , \, p = (p_1,...,p_k)$ ضد $H_1 : p \neq p_0$.

هنا المعلمة $\theta = (\theta_1,...,\theta_k)$ تلعب دور المتجه p، وبالتخلص من القيد المفـــــروض على $p_j\ ; j=1,...,k$ وذلك بحذف $p_k = 1 - p_1 - ... - p_{k-1}$ ، فإن $\theta = (p_1,...,p_{k-1})$.

إن مقدِّرات المعقولية العظمى للمعالم $p_j\ ; j=1,...,k$ عبارة عن التكرارات النسبية للنتائج الموافقة، أي أن $\hat{p}_j = \frac{v_j}{n}; j=1,...,k$ ، لذا في الحالة المعطاة إحصاء نسبة المعقوليـــة يكون:

$$\Lambda_n(X;p_0) = \frac{L(X;\theta_0)}{L(X;\hat{p})} = \prod_{j=1}^{k} p_{j0}^{v_j} \Big/ \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{v_j}{n}\right)^{v_j} =$$

$$= \prod_{j=1}^{k} \left(\frac{np_{j0}}{v_j}\right)^{v_j} \quad ; \quad \hat{p}_0 = (\hat{p}_{10},...,\hat{p}_{k0})$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين والضرب بـــ -2 نجد:

$$\ln \Lambda_n(X;\hat{p}) = \sum_{j=1}^{k} v_j \ln \frac{np_{j0}}{v_j} \Rightarrow$$

$$-2 \ln \Lambda_n(X;\hat{p}) = 2\sum_{j=1}^{k} v_j \ln \frac{v_j}{np_{j0}} \qquad (10.3.5)$$

حيث إن $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية (n ملاحظة مستقلة للمتغير ξ).

لنحسب مصفوفة المعلومات:

في الحالة المفروضة، من المفيد كتابة الاحتمالات:

$$f(x;\theta) = P_\theta(\xi = x) = p_x \quad , \quad x = 1,2,...,k$$

على الصورة:

$$f(x;\theta) = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\delta_{jx}} = \prod_{j=1}^{k-1} p_j^{\delta_{jx}} (1 - p_1 - ... - p_{k-1})^{\delta_{kx}}$$

حيث إن δ_{ij} رمز كرونيكر ($\delta_{ij} = 1$ عندما $i = j$ و $\delta_{ij} = 0$ عندما $i \neq j$). وعلـــى

ذلك فإن:

$$-\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial p_i \partial p_j} = \begin{cases} \delta_{ix}/p_i^2 + \delta_{kx}/p_k^2 & ; \quad i = j \\ \delta_{kx}/p_k^2 & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

وبما أن:

$$E_\theta(\delta_{j\xi}) = P_\theta(\xi = j) = p_j \quad ; \quad j = 1, \dots, k$$

فإن:

$$g_{ij} = -E_{\theta_0}\left(\frac{\partial^2 \ln f(X_1;\theta_0)}{\partial p_i \partial p_j}\right) = \begin{cases} 1/p_{i0} + 1/p_{k0} & ; \quad i = j \\ 1/p_{k0} & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

أي أن $I(\theta_0) = \|g_{ij}\|_1^k$، وهي نفس المصفوفة A المعرفة بالعلاقة (9.3.5)، ومن ثم $I^{-1}(\theta_0) = \Sigma(k-1)$. نلاحظ أيضاً أن المتجه:

$$\eta_n = \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) = v^*(k-1)$$

لأن:

$$v_j^* = \frac{v_j - np_j^0}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\left(\frac{v_j}{n} - p_{j0}\right) = \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{n1} - \theta_{10}\right)$$

وبالتالي الصيغة التربيعية:

$$Q_n = \eta_n' I(\theta_0)\eta_n = v^{*'}(k-1)Av^*(k-1)$$

متطابقة مع الإحصاء $X_n^2(\theta_0)$ في (7.3.5).

وفي الحالة المفروضة الصيغة التربيعية $Q_n^{(1)} = \eta_n' I(\hat{\theta}_n)\eta_n$ يمكن كتابتها على الصورة:

$$Q_n^{(1)} = n\left[\sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{n}{\upsilon_j}+\frac{n}{\upsilon_k}\right)\left(\frac{\upsilon_j}{n}-p_{j0}\right)^2+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k-1}\frac{n}{\upsilon_k}\left(\frac{\upsilon_i}{n}-p_{i0}\right)\left(\frac{\upsilon_j}{n}-p_{j0}\right)^2\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(\upsilon_j-np_{j0}\right)^2}{\upsilon_j}$$

وأخيراً:

$$U_{jn}(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \ln f(X_i;\theta)}{\partial p_j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\delta_{jX_i}}{p_j}-\frac{\delta_{kX_i}}{p_k}\right)=\frac{\upsilon_j}{p_j}-\frac{\upsilon_k}{p_k}$$

ومن ثم الصيغة التربيعية $Q_n^{(2)}$ في العلاقة (6.3.5) تكتب:

$$Q_n^{(2)}=\sum_{j=1}^{k}\frac{(\upsilon_j-np_j^0)^2}{np_j^0}$$

وهذا ينطبق على الإحصاء X_n^2. هكذا، في المسألة المدروسة يمكن بنساء الاختبار المقارب لاختبار نسبة المعقولية لاختبار فرضية العدم $H_0: p=p_0$ ضد $H_1: p\neq p_0$ باستخدام أي من الإحصاءات:

$$-2\ln\Lambda_n(X;p_0)=2\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j\ln\frac{\upsilon_j}{np_{j0}}$$

$$Q_n^{(1)}=\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(\upsilon_j-np_{j0}\right)^2}{\upsilon_j}\quad,\quad Q_n=Q_n^{(2)}=X_n^2=\sum_{j=1}^{k}\frac{\left(\upsilon_j-np_{j0}\right)^2}{np_{j0}}$$

إذا كانت الفرضية H_0 صحيحة، فإن التوزيع المقارب $(n\to\infty)$ لهذه الإحصاءات واحد وهو $\chi^2_{(k-1)}$، لذا، عند مستوى معنوية α فالحد الحرج يؤخذ مساوياً لـ $\chi^2_{\alpha;k-1}$. ويدعى الإحصاء X_n^2 بإحصاء بيرسون، نسبة للعالم الإنجليزي كارل بيرسون، الذي اشتقه قبل ظهور النظرية العامة لاختبار الفرضيات، لذا يدعى الاختبار المبني عليه بـ "كاي مربع بيرسون" للإشارة إلى توزيعه المقارب، أو اختصاراً اختبار χ^2.

2.3.5 الخواص المقاربة لاختبار نسبة المعقولية في حالة فرضية العدم بسيطة

سنتطرق في هذه الفقرة إلى الخواص المقاربة للاختبار (1.3.5) وكذلك إلى الاختبارين المكافئين له (4.3.5) و (6.3.5)، عند البدائل $\theta \neq \theta_0$، وسنبين أن اختبار نسبة المعقولية متسق، أي دالة القوة $W_n(\theta) = W_n(G_{1\alpha};\theta)$ تحقق العلاقة:

$$\lim_{n\to\infty} W_n(\theta) = 1 \quad , \quad \forall\, \theta \neq \theta_0$$

وللتبسيط سنرى حالة معلمة واحدة $(r = 1)$.

ليكن $\theta_1 \neq \theta_0$ بديلاً ما معيناً، الذي يعتبر نقطة داخلية من فضاء المعلمة θ، ولنكتب الإحصاء $\Lambda_n(\theta_0) = \Lambda_n(X;\theta_0)$ على الصورة:

$$\Lambda_n(\theta_0) = \frac{L_n(\theta_0)}{L_n(\hat{\theta}_n)} = \frac{L_n(\theta_1)}{L_n(\hat{\theta}_n)} \cdot \frac{L_n(\theta_0)}{L_n(\theta_1)} = \Lambda_n(\theta_1) h_n(\theta_0,\theta_1)$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين والضرب بـ -2 نجد:

$$\begin{aligned} -2\ln\Lambda_n(\theta_0) &= -2\ln\Lambda_n(\theta_1) - 2\ln h_n(\theta_0,\theta_1) \\ &= -2\ln\Lambda_n(\theta_1) + nK_n(\theta_0,\theta_1) \qquad (11.3.5) \end{aligned}$$

حيث إن:

$$\begin{aligned} K_n(\theta_0,\theta_1) &= -\frac{2}{n}\ln h_n(\theta_0,\theta_1) = \frac{2}{n}\left[\ln L_n(\theta_1) - \ln L_n(\theta_0)\right] \\ &= 2\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(X_i;\theta_1) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(X_i;\theta_0)\right] \end{aligned}$$

ولنعرف الدالة $H(\theta)$ على النحو الآتي:

$$H(\theta) = E_{\theta_1}\left(\ln f(X_1;\theta)\right)$$

عندئذٍ، بناءً على قانون الأعداد الكبيرة، إذا كانت القيمة الحقيقية لـ θ هي θ_1، فإنه عندما $n \to \infty$:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(X_i,\theta_l)\xrightarrow{P_{\theta_1}}H(\theta_l) \quad ; \quad l=0,1$$

سنجد لاحقاً أن:

$$H^{(j)}=E_{\theta_1}\left(\frac{\partial^j \ln f(X_1;\theta)}{\partial\theta^j}\right) \quad ; \quad j=1,2$$

وعلى ذلك [أنظر العلاقتين (3.6.4-I) و (4.7.4-I)]:

$$H'(\theta_1)=0 \quad , \quad H''(\theta_1)=-i(\theta_1)<0$$

وهذا يعني أن الدالة $H(\theta)$ لها نهاية عظمى عند النقطة θ_1، ومن ثم المتغير العشوائي $K_n(\theta_0,\theta_1)$ يتقارب بالاحتمال من العدد الموجب $2[H(\theta_1)-H(\theta_0)]$. وحسب المبرهنة (1.3.5):

$$\mathcal{L}_{\theta_1}(-2\ln\Lambda_n(\theta_1))\to\chi^2_{(1)}$$

وبالتالي، ينتج من العلاقة (11.3.5) أنه عند بديل معين θ_1 فالمتغير العشوائي $-2\ln\Lambda_n(\theta_0)$ احتمالياً يتزايد بلا حدود، عندما $n\to\infty$. وهذا يعني أن:

$$W_n(\theta_1)=P_{\theta_1}\left(-2\ln\Lambda_n(\theta_0)\ge\chi^2_{\alpha;1}\right)\to 1$$

عندما $n\to\infty$.

هكذا، من أجل اختبار نسبة المعقولية إن متتالية دوال القوة:

$$W_n(\theta) \quad ; \quad n=1,2,\ldots \;,\; \theta\in\Theta$$

تتقارب من الدالة:

$$\zeta(\theta)=\begin{cases}\alpha & ; \quad \theta=\theta_0\\ 1 & ; \quad \theta\neq\theta_0\end{cases}$$

وهذا يعني أن اختبار نسبة المعقولية غير متحيز تقاربياً. وإذا كان البديل θ_1 معيناً وحجم العينة $n \to \infty$، فإن قوة اختبار نسبة المعقولية ينتهي إلى الواحد. نخلص مما سبق للقول بأنه عندما تكون n كبيرة فإن منطقة الرفض المعرفة في العلاقة (1.3.5) تعين اختباراً أقوى بانتظام وغير متحيز تقاربياً. لكن إذا تغير البديل $\left(\theta_1 = \theta_1^{(n)}\right)$ بتغير n واقترب من فرضية العدم ($\theta_1^{(n)} \to \theta_0$ عندما $n \to \infty$)، فإن قوة الاختبار $W_n\left(\theta_1^{(n)}\right)$، بشكل عام، ليس بالضرورة تنتهي إلى الواحد. إن طبيعة السلوك التقاربي لقوة الاختبار، عند مثل تلك البدائل القريبة، تعتمد على سرعة تقارب البديل من الفرضية المختبرة، ولحسابه يجب إيجاد التوزيع المقارب للإحصاء $-2\ln\Lambda_n(X;\theta_0)$، ليس فقط عند الفرضية H_0 [كما رأينا في المبرهنة (1.3.5)]، بل أيضاً عند البدائل. وهذا ما تعطيه المبرهنة التالية:

مبرهنة 3.3.5

ليكن البديل القريب $\theta_1^{(n)}$ من الشكل $\theta_1^{(n)} = \theta_0 + \beta/\sqrt{n}$ حيث $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ متجهاً غير صفري معيناً. إذا كانت شروط الانتظام محققة و $n \to \infty$، فإن:

$$\mathcal{L}_{\theta_1^{(n)}}\left(-2\ln\Lambda_n(X;\theta_0)\right) \to \chi^2_{(r;\lambda^2)} \qquad (12.3.5)$$

أي أن التوزيع المقارب لـ $-2\ln\Lambda_n(X;\theta_0)$ هو توزيع χ^2 اللامركزي بدرجة حرية $r = \dim\theta$ ومعلمة لا مركزية λ^2 تحسب من العلاقة:

$$\lambda^2 = \beta' I(\theta_0)\beta \qquad (13.3.5)$$

سنورد فيما يلي إثبات المبرهنة في حالة معلمة واحدة، ويمكن تعميمه بسهولة على حالة عدة معالم.

الإثبات

$$\begin{aligned}-2\ln\Lambda_n(\theta_0) &= 2\left[\ln L_n(\hat\theta_n) - \ln L_n(\theta_0)\right]\\ &= 2\left[\ln L_n(\hat\theta_n) - \ln L_n(\theta_1^{(n)})\right] + 2\left[\ln L_n(\theta_1^{(n)}) - L_n(\theta_0)\right] \qquad (14.3.4)\end{aligned}$$

لنفترض البديل $\theta_1^{(n)}$ صحيحاً، أي أن $\theta_1^{(n)}$ النقطة المعلمية الحقيقية. عندئذٍ، من إثبات المبرهنة (1.3.5) نجد أن الحد الأول من الطرف الأيمن في العلاقة (14.3.5)، عندما $n \to \infty$، له نفس توزيع المتغير العشوائي $\zeta^2 = i(\theta_0)\eta^2$، حيث $i(\theta_0)$ معلومات فيشر التي تقدمها ملاحظة واحدة حول θ_0 و $\mathcal{L}_{\theta_0}(\eta) = N\left(0, i^{-1}(\theta_0)\right)$، وبالتالي $\mathcal{L}(\zeta) = N(0,1)$، وحسب صيغة تيلور فالحد الثاني في العلاقة (14.3.5) يساوي:

$$2\sqrt{n}\left(\theta_1^{(n)} - \theta_0\right)\frac{1}{\sqrt{n}}U\left(\theta_1^{(n)}\right) - n\left(\theta_1^{(n)} - \theta_0\right)^2 \frac{1}{n}U_n'(\theta^*) \qquad (15.3.5)$$

حيث $\left|\theta^* - \theta_0\right| < \left|\theta_1^{(n)} - \theta_0\right|$. وبناءً على قانون الأعداد الكبيرة، عندما تكون n كبيرة، فالمتغير العشوائي $\frac{1}{n}U_n'(\theta^*)$ يمكن استبداله بالثابت $i(\theta_0)$، بينما المتغير العشوائي $\frac{1}{\sqrt{n}}U_n\left(\theta_1^{(n)}\right)$ حسب مبرهنة النهاية المركزية، له التوزيع المقارب $N\left(0, i(\theta_0)\right)$. لذا، الطرف الأيمن من العلاقة (14.3.5) متزايد بلا حدود عندما $\sqrt{n}\left(\theta_1^{(n)} - \theta_0\right) \to \infty$ بينما يتقارب من الصفر عندما $\sqrt{n}\left(\theta_1^{(n)} - \theta_0\right) \to 0$، وينتهي إلى $2\beta\sqrt{i(\theta_0)}\zeta + \beta^2 i(\theta_0)$ عندما $\sqrt{n}\left(\theta_1^{(n)} - \theta_0\right) \to \beta$. وعلى ذلك:

$$\mathcal{L}_{\theta_1^{(n)}}\left(-2\ln\Lambda_n(X;\theta_0)\right) \to \mathcal{L}\left(\left(\xi + \beta\sqrt{i(\theta_0)}\right)^2\right) = \chi^2_{1,\lambda^2} \quad ; \quad \lambda^2 = \beta^2 i(\theta_0)$$

وهو المطلوب إثباته في حالة $(r=1)$.

هكذا، من أجل البدائل القريبة من الشكل $\theta_1^{(n)} = \theta_0 + \beta/\sqrt{n}$ قوة اختبار نسبة المعقولية، عندما $n \to \infty$:

$$W_n\left(\theta_1^{(n)}\right) \to 1 - F_r\left(\chi^2_{\alpha;r};\lambda^2\right) \qquad (16.3.5)$$

حيث إن $F_r(t;\lambda^2)$ دالة توزيع $\chi^2_{(r;\lambda^2)}$، ومن أجل البدائل الأكثر قرباً (حالة $\lambda^2 \to 0$ أو $\sqrt{n}\left(\theta_1^{(n)} - \theta_0\right) \to 0$) فقوة اختبار نسبة المعقولية تنتهي إلى مستوى المعنوية α، أي أن مثل تلك البدائل، حسب اختبار نسبة المعقولية، تقاربياً لا تختلف عن فرضية

العدم، أي لا يدركها اختبار نسبة المعقولية. لكن من أجل البدائل الأبعد (حالة $\lambda^2 \to \infty$ أو $\sqrt{n}(\theta_1^{(n)} - \theta_0) \to \infty$) فاختبار نسبة المعقولية يدركها باحتمال ينتهي إلى 1، عندما $n \to \infty$، إذا كانت صحيحة، لأنه من أجل تلك البدائل قوة الاختبار تنتهي إلى 1. وهذه النتائج تبقى صحيحة من أجل الاختبارين (4.3.5) و (6.3.5).

مثال 4.3.5 (نموذج متعدد الحدود)

من أجل البدائل الموضعية:

$$p_1^{(n)} = p_{j0} + \beta_j/\sqrt{n} \quad ; \quad j = 1,\dots,k \quad , \quad \sum_{j=1}^{k}\beta_j = 0$$

فإن المعلمة اللامركزية:

$$\lambda^2 = \sum_{j=1}^{k-1}\beta_j^2\left(\frac{1}{p_{j0}} + \frac{1}{p_{k0}}\right) + \frac{1}{p_{k0}}\sum_{i,j=1}^{k-1}\beta_i\beta_j$$
$$= \sum_{j=1}^{k-1}\frac{\beta_j^2}{p_{j0}} + \frac{1}{p_{k0}}\left(\sum_{j=1}^{k-1}\beta_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{k}\frac{\beta_j^2}{p_{j0}}$$

وبالتالي:

$$\mathcal{L}\left(-2\ln\Lambda_n(X;\theta_0)\right) \to \chi^2_{(k-1,\lambda^2)}$$

وقوة أي اختبار من الاختبارات (1.3.5) ، (4.3.5) ، (5.3.5) و (6.3.5) عند مثل ذلك البديل هو:

$$1 - F_{k-1}\left(\chi^2_{\alpha,k-1} \; ; \; \sum_{j=1}^{k}\frac{\beta_j^2}{p_{j0}}\right)$$

عندما $n \to \infty$.

3.3.5 الخواص المقاربة لاختبار نسبة المعقولية في حالة فرضية العدم مركبة

تطرقنا في الفقرة السابقة للخواص المقاربة لمسألة اختبار فرضية بسيطة باتباع طريقة نسبة المعقولية. وتبقى تلك الخواص المقاربة العامة لاختبار نسبة المعقولية صحيحة في حالة فرضية العدم مركبة. سنقدم فيما يلي الصياغات الموافقة لتلك الخواص.

ليكن المطلوب اختبار فرضية العدم المركبة $H_0 : \theta \in \theta_0 \subset \theta$، أي أن الفئة الجزئية $\theta_0 \subset \theta$ تشتمل على أكثر من نقطة، ضد الفرضية البديلة المركبة $H_1 : \theta \in \theta_1 \subset \theta$. ولنفترض أن θ_0 فضاء جزئي إقليدي عدد أبعاده أقل من عدد أبعاد فضاء المعلمة θ (θ يمكن أن تساوي الفضاء الإقليدي R^r أو جزءاً منه)، ولنرمز بـ $s = \dim \theta_0$ بحيث أن $S < r = \dim \theta$. عندئذٍ، يمكن التعبير عن قيمة المعلمة $\theta \in \theta_0$ بشكل دالة في معلمة جديدة $\delta = (\delta_1,...,\delta_s)$ تفترض فئة من القيم Δ، أي أن θ_0 لها تمثيل معلمي بدلالة δ:

$$\theta_0 = \{\theta = (\theta_1,...,\theta_r) : \theta = h(\delta) , \delta = (\delta_1,...,\delta_S) \in \Delta\} \qquad (17.3.5)$$

وسنفترض في الحالة العامة أن الدوال $h(\delta) = (h_1(\delta),...,h_r(\delta))$ تحقق الشروط الآتية: مستمرة وقابلة للاشتقاق ثلاث مرات بالنسبة لـ δ ومرتبة مصفوفة المشتقات $\|\partial h_i(\delta)/\partial h_j(\delta)\|$ تساوي s.

الطريقة الأخرى المكافئة لإعطاء فرضية العدم H_0 تتمثل بما يلي: نرمز بـ $\theta^{(2)}$ لجملة المركبات للمتجه θ، التي تعتبر دوالاً تقابلية (تناظر أحادي) في δ. ونفترض للتبسيط أن $\theta^{(2)} = (\theta_{r-s+1},...,\theta_r)$. عندئذٍ يمكن التعبير عن δ بدلالة $\theta^{(2)}$ ونكتب $\delta = \delta(\theta^{(2)})$. والآن إذا استخدمنا الدوال:

$$H_j(\theta) = \theta_j - h_j(\delta(\theta^{(2)})) \quad ; \quad j = 1,...,r-s$$

فإن فرضية العدم H_0 تكتب:

$$H_0 : H_j(\theta) = 0 \quad ; \quad j = 1,...,r-s \qquad (18.3.5)$$

هكذا، الفرضية H_0 تعطى أيضاً بدلالة دالة حقيقية معرفة على θ.

لنتطرق للحالة التي تصادفنا غالباً في التطبيقات الإحصائية، وهي الحالة التي تعطى فيها θ_0 كفئة جزئية أسطوانية. فمثلاً:

$$\theta_0 = \{\theta : \theta = (\theta_{10},\ldots,\theta_{r-s,0},\theta_{r-s+1},\ldots,\theta_r)\} \qquad (19.3.5)$$

حيث $\theta_{i0}\,;\, i = 1,\ldots,r-s$ قيم معينة للمركبات $\theta_1,\ldots,\theta_{r-s}$. وهذا شكل خاص للفرضية في (17.3.5) و (18.3.5) الموافق لـ:

$$\delta = (\theta_{r-s+1},\ldots,\theta_r) \quad , \quad h_j(\delta) = \theta_{j0} \quad ; \quad j = 1,\ldots,r-s$$

$$h_j(\delta) = \theta_j \quad ; \quad j = r-s+1,\ldots,r$$

إذا كانت θ_0 من الشكل (19.3.5)، فإن الفرضية $H_0 : \theta \in \theta_0$ تدعى بالخطية. وهذا يعني أن الفرضية الخطية هي عبارة عن فرضية حددت قيم جزء $\theta^{(1)}$ من مركبات المعلمة θ [في الحالة المعطاة $\theta^{(1)} = (\theta_1,\ldots,\theta_{r-s})$]، وبقية المركبات $\theta^{(2)}$ [في الحالة المعطاة $\theta^{(2)} = (\theta_{r-s+1},\ldots,\theta_r)$] معالم مزعجة.

لتكن الفرضية المختبرة معطاة بالصيغة (19.3.5). عندئذٍ، دالة المعقولية عبارة عن دالة في معلمة جديدة δ:

$$L_n(x;\theta) = L_n(x;h(\delta))$$

وعند تحقق شروط الانتظام، فإن مقدّر المعقولية العظمى $\hat{\delta}_n$ للمعلمة δ يتمتع بالخواص المقاربة المعيارية. وهذا يسمح بإجراء بحث التقارب لإحصاء نسبة المعقولية $\Lambda_n(X;\theta_0)$ المعرف بالعلاقة (1.2.5)، بشكل مشابه لما ورد في بداية البند (3.5). وفي هذه الحالة الإحصاء $\Lambda_n(X;\theta_0)$ يكتب:

$$\Lambda_n(X;\theta_0) = \frac{L_n\left(X;h(\hat{\delta}_n)\right)}{L_n\left(X;\hat{\theta}_n\right)}$$

وعندما $n \to \infty$ نحصل على النتائج الآتية:

.1 (20.3.5) $$\mathcal{L}\left(-2\ln\Lambda_n(X;\theta_0)\middle|H_0\right) \to \chi^2_{(r-s)}$$

.2 اختبار نسبة المعقولية يعطى بمنطقة الرفض:

(21.3.5) $$G_{1\alpha} = \left\{x : -2\ln\lambda_n(x;\theta_0) \ge \chi^2_{\alpha,r-s}\right\}$$

وهو متسق.

.3 في حالة فرضية خطية (19.3.5)، هذا الاختبار له قوة تقاربية $\gamma ; \alpha < \gamma < 1$، من أجل البدائل الموضعية من شكل:

$$\theta_{i1}^{(n)} = \theta_{i0} + \beta_i / \sqrt{n} \quad ; \quad i = 1,\ldots,r-s$$

تساوي:

(22.3.5) $$1 - F_{r-s}\left(\chi^2_{\alpha;r-s} ; \lambda^2\right)$$

حيث إن:

$$\lambda^2 = \lambda^2(\theta^*) = \beta'\left(I^{-1}(r-s)\right)^{-1}\beta \quad , \quad \theta^* = (\theta_{10},\ldots,\theta_{r-s,0},\theta_{r-s+1},\ldots,\theta_r)$$

$\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_{r-s})$، و $I^{-1}(r-s)$ الصغير الأساسي من المرتبة $(r-s)$ للمصفوفة $I^{-1}(\theta^*)$.

نشير إلى أن كل النتائج التي حصلنا عليها سابقاً والموافقة لحالة فرضية بسيطة H_0، يمكن الحصول عليها بوضع $s = 0$.

مثـــال 5.3.5

إذا كانت $X = (X_1,\ldots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta_1,\theta_2^2)$، اختبر فرضيـــة العدم المركبة $H_0 : \theta_2 = \theta_{20}$ $(-\infty < \theta_1 < +\infty)$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta_2 \neq \theta_{21}$، عنـــد

مستوى معنوية α.

بما أن:

$$\Theta_0 = \{\theta = (\theta_1, \theta_2)\ ;\ -\infty < \theta_1 < +\infty, \theta_2 = \theta_{20}\}$$
$$\Theta = \{\theta = (\theta_1, \theta_2)\ ;\ -\infty < \theta_1 < +\infty, \theta_2 > 0\}$$

ودالة الكثافة:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \theta_1}{\theta_2}\right)^2}$$

فإن:

$$L_n(x;\theta) = \left(2\pi\theta_2^2\right)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n\left(\frac{x_i-\theta_1}{\theta_2}\right)^2}$$

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} L_n(x;\theta) = \left(2\pi\theta_{20}^2\right)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n\left(\frac{x_i-\theta_1}{\theta_{20}}\right)^2}$$

$$\sup_{\theta\in\Theta} L_n(x;\theta) = \left(2\pi s^2\right)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

لأن مقدّر المعقولية لـــ (θ_1, θ_2) هو $(\overline{X}, S)$. وعلى ذلك:

$$\lambda_n(x;\theta_0) = \sup_{\theta\in\Theta_0} L_n(x;\theta) \Big/ \sup_{\theta\in\Theta} L_n(x;\theta)$$
$$= \left(s^2/\theta_{20}^2\right)^{n/2} \exp\left[-(n/2)\left(s^2/\theta_{20}^2 - 1\right)\right]$$

ومن ثم:

$$-2\ln\lambda_n(x;\theta_0) = n\left(s^2/\theta_{20}^2 - 1\right) - n\ln\left[1 + \left(s^2/\theta_{20}^2 - 1\right)\right]$$

بما أن تباين العينة S^2 مقدّر متسق للتباين النظري (تباين المجتمع). لذا عند صحة فرضية العدم H_0 و n كبيرة، فإن النسبة s^2/θ_{20}^2 قريبة من الواحد. وحسب الخاصة

$\ln(1+\varepsilon)=\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{2}+O(\varepsilon)$ عندما ε صغيرة، فإن:

$$-2\ln\lambda_n(x;\theta_0)\approx(n/2)\left(s^2/\theta_{20}^2-1\right)^2 \tag{23.3.5}$$

وفي الحالة المدروسة $r=2\,,s=1$، إذن اختبار نسبة المعقولية يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}=\left\{x:(n/2)\left(s^2/\theta_{20}^2-1\right)^2\geq\chi_{\alpha;1}^2\right\} \tag{24.3.5}$$

ويمكن بسهولة في الحالة المعطاة إثبات صحة العلاقة (20.3.5) بناءً على العلاقـــة (23.3.5) على النحو الآتي:

كما نعلم [مبرهنة (5.9.3-I)]:

$$\mathcal{L}\left(nS^2/\theta_{20}^2\right)=\chi_{(n-1)}^2$$

وإذا كانت η متغيراً عشوائياً يخضع لتوزيع χ^2 بـــ $(n-1)$ درجة حرية فيمكـــن كتابته على الصورة:

$$\eta=\eta_1+\dots+\eta_{n-1}\quad;\quad\mathcal{L}(\eta_i)=\chi_{(1)}^2\;,\;i=1,\dots,n-1$$

وحسب مبرهنة النهاية المركزية، عندما $n\to\infty$ نجد:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\eta-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}}\right)\to N(0,1)$$

حيث إن $\operatorname{var}\eta=2(n-1)$ و $E\eta=(n-1)$

هكذا، عندما $n\to\infty$:

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}\left[\frac{nS^2}{\theta_{20}^2}-(n-1)\right]\middle|H_0\right)\to N(0,1)$$

وهذه النتيجة الأخيرة صحيحة من أجل الإحصاء:

$$\left(1/\sqrt{2n}\right)\left(nS^2/\theta_{20}^2 - n\right) = \sqrt{n/2}\left(S^2/\theta_{20}^2 - 1\right)$$

أي أن:

$$\mathcal{L}\left(\sqrt{n/2}\left(S^2/\theta_{20}^2 - 1\right) \middle| H_0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} N(0,1)$$

وبالتالي:

$$\mathcal{L}\left(n/2\left(S^2/\theta_{20}^2 - 1\right)^2 \middle| H_0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi^2_{(1)}$$

ومن ثم، عندما تكون n كبيرة، فالتوزيع التقريبي للإحصاء $-2\ln\Lambda_n(X)$ هو $\chi^2_{(1)}$.

لنرَ الآن البديل الموضعي:

$$\theta_{21}^{(n)} = \theta_{20} + \beta/\sqrt{n} \quad ; \quad \beta \neq 0$$

ولنحسب قوة الاختبار (24.3.5) التقاربية عند هذا البديل الموضعي.

إن مصفوفة المعلومات $I(\theta)$ للنموذج $N(\theta_1, \theta_2^2)$ محسوبة [راجـــع المثـــال (I-4.7.4)] وهي:

$$I(\theta) = \begin{vmatrix} 1/\theta_2^2 & 0 \\ 0 & 2/\theta_2^2 \end{vmatrix}$$

ومنها:

$$I^{-1}(\theta) = \begin{vmatrix} \theta_2^2 & 0 \\ 0 & \theta_2^2/2 \end{vmatrix}$$

والصغير الأساسي لهذه المصفوفة، عند صحة الفرضية H_0، هو $\theta_{20}^2/2$، لـــذا المعلمـــة اللامركزية λ^2 في العلاقة (22.3.5) من أجل الحالة المدروسة تساوي $2\beta^2/\theta_{20}^2$. ومـــن ثم القوة التقاربية تساوي:

$$1 - F_1\left(\chi^2_{\alpha;1}\, ; 2\beta^2/\theta_{20}^2\right)$$

تمارين

1. لتكن $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $N(\theta,16)$. أوجد اختبار نسبة المعقولية العامة لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = 50$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq 50$ ، عند مستوى معنوية معطاة $\alpha = 0.05$. وإذا كانت لدينا العينة المشاهدة $(25,45,40,60,70,55)$ ، فهل تقبل الفرضية H_0 أم ترفضها؟

2. إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x} \quad ; \quad x > 0$$

فهل يوجد اختبار غير متحيز أقوى بانتظام لاختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد $H_1 : \theta \neq \theta_0$ عند مستوى معنوية α ، إن وجد فما هو؟

3. إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x,\theta) = \theta e^{-\theta x} \quad ; \quad x > 0$$

فاختبر فرضية العدم $H_0 : \theta \geq \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta < \theta_0$ ، عند مستوى معنوية α باتباع طريقة نسبة المعقولية.

4. إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية كبيرة الحجم من توزيع:

$$f(x,\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \quad ; \quad x = 0.1$$

فأوجد منطقة الرفض التقريبية بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

5. إذا كانت $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية كبيرة من توزيع:

$$f(x,\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta} \quad ; \quad x>0$$

فأوجد منطقة الرفض التقريبية بحجم α لاختبار $H_0:\theta=\theta_0$ ضد $H_1:\theta\neq\theta_0$.

6. إذا كانت $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع بواسون $\Pi(\theta)$، فاختبر الفرضية $H_0:\theta=\theta_0$ ضد $H_1:\theta>\theta_0$، عند مستوى معنوية α. احسب قوة الاختبار الذي توصلت إليه، وبين أنه غير متحيز وأثبت عندما تكون n كبيرة أن حد منطقة الرفض $c=c_\alpha$ يمكن أخذه مساوياً لـ:

$$\theta_0+t_\alpha\sqrt{\theta_0 n} \quad , \quad \Phi(-t_\alpha)=\alpha$$

7. لتكن X ملاحظة واحدة من توزيع:

$$f(x,\theta)=(1+\theta)x^\theta \quad ; \quad 0<x<1 \ , \ \theta>-1$$

والمطلوب:

أ. أوجد الاختبار الأقوى بحجم α لاختبار الفرضية $H_0:\theta=0$ ضد البديل $H_1:\theta=1$.

ب. هل يوجد الاختبار الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار الفرضية $H_0:\theta\leq 0$ ضد الفرضية البديلة $H_1:\theta>0$، إن وجد فما هو؟

ج. أوجد اختبار نسبة المعقولية العامة بحجم α لاختبار $H_0:\theta=0$ ضد الفرضية $H_1:\theta\neq 0$.

8. إذا كانت $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية كبيرة الحجم من توزيع $N(\theta_1,\theta_2^2)$، فأوجد منطقة الرفض التقريبية لاختبار الفرضية

$H_0 : \theta = (\theta_1, \theta_2^2) - \theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}^2)$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_0$، عند مستوى معنوية α.

9. إذا كانت $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية كبيرة الحجم من توزيع $N(\theta, 16)$، فأوجد منطقة الاختبار التقريبية بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = 150$ ضد $H_1 : \theta > 150$، وإذا كانت لديك عينة مشاهدة ووجدت $n = 100, \bar{x} = 160$ فهل تقبل الفرضية H_0 أم ترفضها عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$؟

10. إذا كانت $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} \quad ; \quad x > 0$$

أ. أوجد الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta \leq \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta > \theta_0$ عند مستوى معنوية α.

ب. اختبر الفرضية $H_0 : \theta < \theta_0 \text{ or } \theta > \theta_1$ ضد الفرضية $H_1 : \theta_0 < \theta < \theta_1$، عند مستوى معنوية α.

ج. أوجد الاختبار غير المتحيز الأقوى بانتظام بحجم α لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_0$.

د. بافتراض حجم العينة n كبيراً، فاختبر الفرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \neq \theta_0$، عند مستوى معنوية α.

هـ. اختبر فرضية العدم $H_0 : \theta \geq \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta < \theta_0$ باتباع طريقة نسبة المعقولية، عند مستوى معنوية α.

الفصل السادس:

الاختبار بين فرضيتين بسيطتين باستخدام التحليل التتابعي

1.6 مقدمة

عند بحثنا لمسألة اختيار واحدة من فرضيتين بسيطتين حول معلمة توزيع طبيعي I في المثال (1.2.2) رأينا وجود ارتباط [انظر العلاقة (12.2.2)] بين عدد الملاحظات n (حجم العينة) وحجمي الخطأ β, α، وهذا العدد من الملاحظات يمكن تعيينه مسبقاً (قبل إجراء التجربة) ولا يتعلق بنتائج التكرارات. لكن بالإضافة إلى اختبارات الفرضيات المبنية على عينات ذات حجوم محددة بشكل مسبق، هنالك اختبارات شهيرة تدعى بـ "الاختبارات التتابعية Sequential Test"، يتحدد فيها حجم العينة من خلال التجربة معتمدة على نتائج التكرارات، أي أن العدد الضروري من التكرارات يتعين من خلال عملية الملاحظة وفقاً لقاعدة معينة تحددها الطريقة التتابعية التي نأخذ بموجبها مقادير العينة. وبالتالي، يعتبر هذا العدد (حجم العينة) متغيراً عشوائياً. عُرضت القواعد التتابعية وللمرة الأولى من قبل العالم "فالد" (عام 1947م)، وتشكل دراسة هذه القواعد موضوع فرع هام من الإحصاء الرياضي يدعى بالتحليل التتابعي (Sequential Analysis). سنتطرق في هذا الفصل لبعض خصائص التحليل التتابعي من خلال مثال بسيط للاختبار بين فرضيتين بسيطتين حول معلمة توزيع متغير عشوائي ملاحظ ξ.

2.6 اختبار فالد VALD'S TEST

لتكن x_i القيمة الملاحظة لمتغير عشوائي ξ في التكرار رقم $i = 1,...,n$. لنرمز بــ:

$$L_{jn} = L(x_1,...,x_n;\theta_j) = \prod_{i=1}^{n} f_j(x_i)$$

لدالة المعقولية $L(x;\theta)$ من أجل التكرارات الــ n الأولى، عند صحة الفرضية $H_j : \theta = \theta_j$ ، $j = 0,1$، و $f_j(x)$ لكثافة (أو دالة الاحتمال) توزيع ξ عند الفرضية H_j.

رأينا في الفصل الثاني عند اختبار فرضية $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد بديل $H_1 : \theta = \theta_1$، من أجل حجم n ثابت للعينة $X = (X_1,...,X_n)$، أن الاختبار الأفضل، أي الاختبار الذي يجعل الخطأ من النوع الثاني أصغر ما يمكن وذلك من أجل قيمة مثبتة ومتفق عليها سلفاً α لاحتمال الوقوع في الخطأ من النوع الأول، هو الاختبار الذي تحدده مبرهنة نيمان وبيرسون. وهذا الاختبار مرتبط بإحصاء نسبة المعقولية L_{0n}/L_{1n}، بحيث نرفض (نقبل) الفرضية H_0 إذا كانت L_{0n}/L_{1n} أصغر أو تساوي (أكبر من) مقدار ثابت c. لكن إذا كان حجم العينة n عشوائياً ومرتبطاً بنتائج الملاحظة، فيمكن تعيين هذا الحجم في المتوسط بعدد الملاحظات اللازمة حتى اتخاذ القرار النهائي (قبول أو رفض الفرضية H_0).

إن اختبار نسبة الاحتمال التتابعي Sequential Probability Ratio Test (SPRT) (اختبار فالد) يتلخص فيما يلي:

يستخدم هذا الاختبار نسبة المعقولية:

$$\lambda_n = \lambda_n(x) = \frac{L_{0n}(x;\theta_0)}{L_{1n}(x;\theta_1)} = \frac{L_{0n}}{L_{1n}}$$

وعددين موجبين A_0, A_1 بحيث $0 < A_0 < 1 < A_1$. وتستمر الملاحظات (التكرارات) طالما أن المتباينة المزدوجة:

$$A_0 < \lambda_n = \lambda_n(x) < A_1 \qquad (1.2.6)$$

محققة. ويتم التوقف عند أول ملاحظة لا تتحقق فيها هذه المتباينة (لحظة التوقف). إذا تبين أن $\lambda_n \le A_0$ تُرفض فرضية العدم H_0، بينما تُقبل الفرضية H_0 عندما $\lambda_n \ge A_1$. إذن الطريقة التتابعية هي أن نستمر في سحب عناصر العينة (نستمر في تكرار التجربة المفروضة) حتى تقع النسبة λ_n وللمرة الأولى خارج الفترة (A_0, A_1) وعندها تتوقف عملية السحب (التكرار) وتنتهي التجربة. وإذا رأينا عند التكرار رقم n أن $\lambda_n \le A_0$ نرفض الفرضية H_0 ونقبلها إذا كانت $\lambda_n \ge A_1$، وتنتهي التجربة بالطبع عند اتخاذ القرار النهائي (قرار الرفض أو القبول). هذا الاختبار يوصف عادة باحتمالي الخطأ من النوع الأول والثاني $\alpha = P(H_1|H_0)$ و $\beta = P(H_0|H_1)$ ومتوسط عدد الملاحظات v حتى لحظة التوقف $E_j(v) = E(v|H_j)\,,\ j = 0,1$. إذا كان احتمالا الخطأ $\alpha\,,\beta$ محددين سلفاً، فإن أي اختبار يوافق هذين الخطأين يدعى بالاختبار ذا القوة (α,β)، ويعتبر عنصراً من أسرة الاختبارات ذات القوة (α,β)، والذي يتطلب عدداً أقل من الملاحظات هو الأفضل. والاختبار الذي يجعل كلاً من $E_0(v)$ و $E_1(v)$ أصغرياً يدعى بالأمثل. واختبار فالد يحقق هذه الصفة، أي أمثل. وخاصة هذا الاختبار يتطلب في المتوسط عدد من الملاحظات أقل مما يتطلبه اختبار نيمان وبيرسون باحتمالي الخطأ $\alpha\,,\beta$ المحددين مسبقاً، وهذا ما سنبينه فيما بعد. سنتطرق لاحقاً لهذه الخواص وغيرها لاختبار فالد.

3.6 عدد التكرارات حتى لحظة التوقف في اختبار فالد

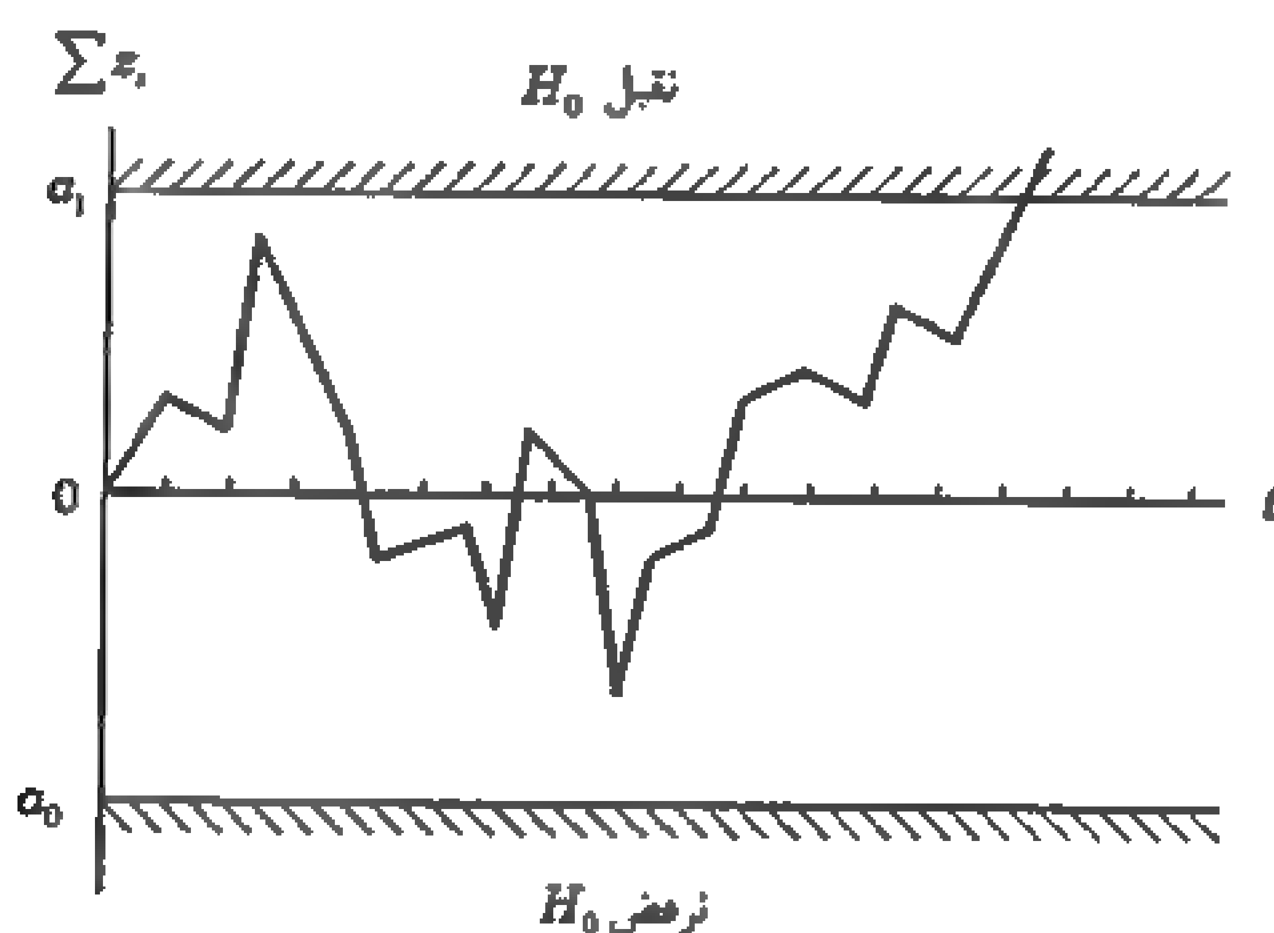
لتكن الدالتان $f_j(x) > 0\,,\ j = 0,1$ من أجل جميع القيم الممكنة للمتغير العشوائي ξ وغير متطابقتين (وإلا لكانت الفرضيتان H_0 و H_1 غير متمايزتين). هذا يعني أن المتغير العشوائي $Z = \ln\left(f_0(\xi)/f_1(\xi)\right)$ معين. سنفترض أن:

$$E_\theta Z \ne 0\,, V_\theta Z = \sigma^2(\theta) > 0 \quad ; \quad \theta = \theta_0, \theta_1$$

موجودان. ونــرمز أيضاً بـــ $Z_i = \ln(f_0(X_i)/f_1(X_i));\ i = 1,2,\ldots$ ، حيث $X_1, X_2, \ldots$ متتالية الملاحظات المستقلة على ع. عندها $Z_1, Z_2, \ldots$ ملاحظات مستقلة علـــى Z. وإذا كانت $z_1, z_2, \ldots;\ z_i = \ln(f_0(x_i)/f_1(x_i))$ الملاحظات المحققة لهـــذه المقـــادير، فـــإجراء الاختبار ينتهي بقبول الفرضية H_0 أو رفضها، عند الملاحظات الـــ n الأولى، الـــتي لا تتحقق من أجلها المتباينة المزدوجة:

$$a_0 = \ln A_0 < z_1 + z_2 + \ldots + z_n < \ln A_1 = a_1 \quad ; \quad a_0 < 0\ ,\ a_1 > 0 \qquad (1.3.6)$$

يمكن إعطاء الاختبـــار التفسير الهندسي التالي: لندرس ذرة متحـــركة عشـــوائياً في المستوي. تقع في لحظة البدء عند نقطة الأصل، وترتيبها (فاصلتها الثانية) في كل لحظة زمنيـــة صحيحة $t = 1,2,\ldots$ يأخذ تزايد z_t. عندها ترتيب موقع الذرة في اللحظة $t = n$ يصبـــح مساوياً لـــ $z_1 + z_2 + \ldots + z_n$، وتستمر الحركة العشوائية طالما لم يخرج مسار الذرة عـــن حدود المنطقة المحددة بالمستقيمين الأفقيين $\sum z_i = a_0$ و $\sum z_i = a_1$، وتتوقـــف هـــذه الحركة عند أول تجاوز لمسارها تلك المنطقة، ويبدو ذلك بوضوح على الشكل (1.3.6).



شكل (1.3.6)

إن خـــروج المسار عن الحـــد الأدنى (الأعلى) للمنطقة المذكورة، يؤدي إلى قبـــول

الفرضية H_1 (H_0). والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو: هل هناك ما يمنع استمرار الحركة العشوائية هذه مدة لا نهائية (في هذه الحالة لا تنتهي عملية اختبار الفرضية)؟ والجواب على هذا السؤال تقدمه المبرهنة التالية.

مبرهنة 1.3.6

ينتهي اختبار فالد باحتمال يساوي الواحد خلال عدد منتهٍ من التكرارات (الملاحظات)، أي أن:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta(v>n)=0 \quad ; \quad \theta=\theta_0,\theta_1$$

ليكن r عدداً صحيحاً موجباً معيناً، ولنعرف المتغيرات العشوائية التالية:

$$\eta_1=Z_1+Z_2+....+Z_r\,,\ \eta_2=Z_{r+1}+Z_{r+2}+...+Z_{2r}\,,......,$$
$$\eta_i=Z_{(i-1)r+1}+Z_{(i-1)r+2}+....+Z_{ir}\ ,.....$$

نلاحظ أن المتغيرات العشوائية $\eta_1,\eta_2,...$ مستقلة ولكل منها نفس التوزيع، وأن $\sum_1^n Z_i=\sum_{j=1}^k \eta_j$ حيث $n=kr$، هذا بالإضافة إلى أن الحادث $\{v>kr=n\}$ مكافئ للحادث:

$$a_0<Z_1+Z_2+....+Z_i<a_1 \quad , \quad i\le kr$$

المحتوى في الحادث $a_0<\eta_1+\eta_2+....+\eta_j<a_1\ ,\ j\le k$، الذي بدوره محتوى في الحادث $|\eta_j|<b=a_1-a_0\ ;\ j\le k$. بما أن المتغيرات العشوائية η_j مستقلة ولها نفس التوزيع، فإن:

$$P_\theta(v>kr)\le p^k(\theta)=p_\theta^k \tag{2.3.6}$$

لأن:

$$P_\theta\left(\eta_1^2<b^2,\eta_2^2<b^2,...,\eta_k^2<b^2\right)=\prod_{j=1}^k P_\theta\left(\eta_j^2<b^2\right)=p_\theta^k$$

$$P_\theta(v > kr) \le \prod_{j=1}^{k} P_\theta\left(\eta_j^2 < b^2\right)$$

$$p_\theta = P_\theta\left(\left|\eta_j\right| < b\right) = P_\theta\left(\eta_j^2 < b^2\right) \quad ; \quad j = 1,2,\ldots,k$$

لكن:

$$E_\theta\eta_1^2 \ge V_\theta\eta_1 = V_\theta(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_r) = \sum_{i=1}^{r} V_\theta Z_i = r\sigma^2(\theta) > b^2$$

إذا اخترنا $r > \max\left(b^2/\sigma^2(\theta_0), b^2/\sigma^2(\theta_1)\right)$. واعتماداً على كـــون $P\left(\eta_1^2 \ge E\eta_1^2\right)$ لا يمكن أن يكون صفراً، نجد:

$$P_\theta\left(\eta_1^2 \ge b^2\right) \ge P_\theta\left(\eta_1^2 \ge E\eta_1^2\right) > 0$$

أي أن:

$$p_\theta = P\left(\eta_1^2 < b^2\right) < 1$$

وبأخذ نهاية الطرفين في المتباينة (2.3.6) عندما $k \to \infty$ نجد:

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta(v > n) = \lim_{k\to\infty} P_\theta(v > kr) = \lim_{k\to\infty} p_\theta^k = 0$$

وهو المطلوب.

هكذا، في اختبار فـــالد عدد التكرارات v حتى لحظة التوقف يفترض عدداً منتـــهياً باحتمال يساوي الواحد. بل أكثر من ذلك، أن كل عزوم v منتهية، وهذا مـــا تؤكـــده المبرهنة التالية.

مبـــرهنة 2.3.6

إن كل عزوم المتغير العشوائي v منتهية.

إن الدالة المولدة للعزوم لتوزيع المتغير العشوائي v:

$$\varphi(t) = E_\theta e^{tv} = \sum_{k\ge1} e^{tk} P_\theta(v = k)$$

وشروط وجود هذه الدالة هو تقارب المتسلسلة $\sum_{k\geq 1} e^{tk} P_0(v=k)$. لذا، ندرس هذا التقارب أولاً.

من أجل $t \geq 0$ يمكن أن نكتب:

$$\varphi(t) = \sum_{k\geq 1} e^{tk} P_0(v=k) \leq \sum_{k\geq 0} e^{t(k+1)r} P_0\big(kr < v \leq (k+1)r\big) \leq$$

$$\leq e^{tr} \sum_{k\geq 0} e^{tkr} P_0(v > kr) \leq e^{tr} \sum_{k\geq 0} e^{tkr} p^k$$

لأن $P_0(v > kr) \leq p^k \,;\, p = \max\big(P(\theta_0), P(\theta_1)\big)$ [انظر العلاقة (2.3.6)]. وباختيار r يمكن ضمان تحقق المتباينة $p<1$. إن المتسلسلة الهندسية $\sum_{k\geq 0} e^{tkr} p^k$ متقاربة ومجموعها يساوي $\frac{1}{1-pe^{tr}}$ عندما $e^{tr} p < 1$. إذن:

$$\varphi(t) = \sum_{k\geq 1} e^{tk} P_0(v=k) \leq \frac{e^{tr}}{1-e^{tr} p}$$

وبالتالي المتسلسلة $\varphi(t)$ متقاربة عندما $pe^{tr} < 1$. وبشكل مشابه من أجل $t \leq 0$:

$$\varphi(t) = \sum_{k\geq 1} e^{tk} P_0(v=k) \leq \sum_{k\geq 0} e^{tkr} P_0(kr < v \leq (k+1)r) \leq \sum_{k\geq 0} e^{tkr} P_0(v > kr) \leq$$

$$\leq \sum_{k\geq 0} e^{tkr} p^k \leq \frac{1}{1-e^{tr} p}$$

هكذا، من أجل أي قيمة لـ t بحيث $e^{tr} p < 1$، أي أن $t < (1/r)\ln(1/p)$، فالتوقع الرياضي $E_0 e^{tv}$ موجود، أي الدالة المولدة للعزوم $\varphi(t)$ موجودة. إذن، فالمشتقات $\varphi^{(k)}(0)\,;\, k \geq 1$ موجودة، وبذلك العزوم $E_0(v^k) = \varphi^{(k)}(0)$ موجودة.

وينتج من هذه المبرهنة، من أجل اختبار فالد، أن كِلا التوقعين $E_0(v)$ و $E_1(v)$ منتهٍ. وحساب هذين المقدارين عند معرفة الخطأين (α, β) وارد في البند (5.6).

4.6 حساب الحدين A_0 و A_1 في اختبار فالد

لنبين الآن علاقة الحدين $A_0 , A_1 ; 0 < A_0 < A_1 < 1$ (أو الحدين α_0 < α_1) في العلاقة (1.2.6) باحتمالي الخطأ α , β.

مبـرهنة 1.4.6

يحقق الثابتان A_0 و A_1، في اختبار فالد ذي القوة (α,β)، المتباينتين:

$$A_0 \geq A_0' = \frac{\alpha}{1-\beta} \quad , \quad A_1 \leq A_1' = \frac{1-\alpha}{\beta} \tag{1.4.6}$$

أي أن:

$$\frac{\alpha}{1-\beta} \leq A_0 < A_1 \leq \frac{1-\alpha}{\beta}$$

وعندئذٍ إذا استبدلنا A_0 و A_1 بـــ A_0' و A_1' على الترتيب، فقوة الاختبار الذي نحصل عليه تصبح مساوية لـــ (α',β')، حيث:

$$\alpha' \leq \frac{\alpha}{1-\beta} \quad , \quad \beta' \leq \frac{\beta}{1-\alpha} \quad , \quad \alpha' + \beta' \leq \alpha + \beta \tag{2.4.6}$$

لنعرف الفئتين G_{0n} و G_{1n} على النحو الآتي:

$$G_{0n} = \left\{ (x_1,\dots,x_n) : A_0 < \frac{L_{0k}}{L_{1k}} < A_1 \;\; , \; k = 1,\dots,n-1 \, , \frac{L_{0n}}{L_{1n}} \leq A_0 \right\}$$

$$G_{1n} = \left\{ (x_1,\dots,x_n) : A_0 < \frac{L_{0k}}{L_{1k}} < A_1 \;\; , \; k = 1,\dots,n-1 \, , \frac{L_{0n}}{L_{1n}} \geq A_1 \right\}$$

أي أن الفئة G_{0n} (G_{1n}) تتألف من نقاط العينة $(x_1,\dots,x_n)$ التي تنتهي الطريقة التتابعيـــة عند الملاحظة $v = n$ برفض الفرضية H_0 (H_1).

وحسب المبرهنة (1.3.6):

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_\theta(v=n) = \sum_{n=1}^{\infty} P_\theta(G_{0n} \cup G_{1n}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_\theta(G_{0n}) + \sum_{n=1}^{\infty} P_\theta(G_{1n}) = 1$$

$$; \quad \theta = \theta_0 , \theta_1$$

ولنفترض الآن أن المتغير العشوائي الملاحظ ξ منقطع و $f(x)$ دالة احتمالـــه، أي أن $L(x_1,...,x_n;\theta_0)=L_{0n}$ يمثل احتمال الحصول على $x_1,...,x_n$ في الملاحظات الـــــ n الأولى باعتبـــار القيمة الحقيقية للمعلمة θ هي θ_0 (فرضية العدم H_0 صحيحة). ويمثـــل $L(x_1,...,x_n;\theta_1)=L_{1n}$ احتمال الحصول على $x_1,...,x_n$ في الملاحظات الـــــ n الأولى باعتبار القيمة الحقيقية لـــ θ هي θ_1 (الفرضية H_1 صحيحة). لنفرض أن نقطة العينـــة $(x_1,...,x_n)$ هي بحيث تنتهي الطريقة التتابعية عند الملاحظة $v=n$ وأنها تنتمي إلى G_{0n} فعندئذٍ تكون $\lambda_n=\frac{L_{0n}}{L_{1n}}\le A_0$ من أجل هذه النقطة. أي أن احتمال ملاحظة قيم هـــذه العينة، عند الفرضية H_0 أصغر بـــ A_0 مرة على الأقل من احتمال ملاحظة هذه القيـــم عند الفرضية H_1. وبما أن هذا يبقى صحيحاً من أجل أي نقطة عينة من المجموعة G_{0n}، فإن احتمال أن تنتمي نقطة العينة $x=(x_1,...,x_n)$ إلى المجموعة G_{0n} أصغر بـــ A_0 مرة على الأقل، عند صحة الفرضية H_0، من احتمال انتمائها إلى G_{0n} عند صحة الفرضيـــة H_1. أي أن احتمال رفض H_0 هو على الأقل أصغر بـــ A_0 مرة، عند الفرضيـــة H_0، مما هو عليه عند الفرضية H_1. ولكن احتمال رفض H_0 علماً بأنها صحيحة هـــو α، أي أن $P(H_1|H_0)=\alpha$، واحتمال رفض H_0 (قبول H_1) مع العلم بأن H_1 صحيحة هـــو $1-\beta$، أي أن $P(H_1|H_1)=1-P(H_0|H_1)=1-\beta$.

إذن:

$$\alpha=P(H_1|H_0)=\sum_{n=1}^{\infty}P_{\theta_0}(G_{0n})\le A_0\sum_{n=1}^{\infty}P_{\theta_1}(G_{0n})=$$
$$A_0P(H_1|H_1)=A_0\big(1-P(H_0|H_1)\big)=A_0(1-\beta)$$

أي أن:

$$A_0\ge\frac{\alpha}{1-\beta}$$

لأن المتباينة $L_{0n}\le A_0L_{1n}$ محققة عند نقاط الفئة G_{0n}.

وبمناقشة مشابهة بالنسبة للفئة G_{1n}، نجد:

$$\beta = P(H_0|H_1) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\theta_1}(G_{1n}) \le \frac{1}{A_1}\sum_{n=1}^{\infty} P_{\theta_0}(G_{1n}) =$$

$$= \frac{1}{A_1}P(H_0|H_0) = \frac{1}{A_1}\left(1 - P(H_1|H_0)\right) = \frac{1}{A_1}(1-\alpha) \Rightarrow A_1 \le \frac{1-\alpha}{\beta}$$

لأن المتباينة $\frac{L_{0n}}{L_{1n}} \ge A_1$ محققة عند نقاط الفئة G_{1n}. وبذلك تكون المتباينتان في (1.4.6) صحيحتين.

لنرَ الآن اختبار فالد بالحدين A'_0 , A'_1 المعرفين بالعلاقة (1.4.6)، وليكن α' , β' احتمالي الخطأ الموافقين لهما على الترتيب. بناءً على الجزء الأول للمبرهنة (1.4.6):

$$A_0 \ge A'_0 = \frac{\alpha}{1-\beta} \quad , \quad A_1 \le A'_1 = \frac{1-\alpha}{\beta}$$

واستخدام A'_0 , A'_1 في الاختبار التتابعي بدلاً من A_0 , A_1 نجد:

$$\frac{\alpha}{1-\beta} = A'_0 \ge \frac{\alpha'}{1-\beta'} \quad , \quad \frac{1-\alpha}{\beta} = A'_1 \le \frac{1-\alpha'}{\beta'}$$

وعليه:

$$\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha'\beta \le \alpha - \alpha\beta' \\ \beta' - \alpha\beta' \le \beta - \beta\alpha' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha' + \beta' \le \alpha + \beta$$

كما أن:

$$\frac{\alpha'}{1-\beta'} \le \frac{\alpha}{1-\beta} \Rightarrow \alpha' \le \frac{\alpha}{1-\beta}$$

$$\frac{1-\alpha'}{\beta'} \ge \frac{1-\alpha}{\beta} \Rightarrow \frac{\beta'}{1-\alpha'} \le \frac{\beta}{1-\alpha} \Rightarrow \beta' \le \frac{\beta}{1-\alpha}$$

وذلك لأن $1-\beta' < 1$, $1-\alpha' < 1$.

تستخدم المبرهنة (1.4.6) في التطبيق على النحو الآتي: إذا كان المطلوب بناء اختبار فالد باحتمالي الخطأ α , β، نفترض أن الحدين في العلاقة (1.2.6)، أي A_0 , A_1، مساويان على الترتيب A'_0 , A'_1 المعرفين بالعلاقتين في (1.4.6). في هذه الحالة المتباينة الأخيرة في (2.4.6)، أي $\alpha' + \beta' \leq \alpha + \beta$، تكفل أن يكون مجموع الخطأين الحقيقيين α' , β' لذلك الاختبار لا يزيد عن مجموع الخطأين المحددين α , β، أي $\alpha + \beta$. وعادة α , β لا يزيد كل منهما عن 0.1، لذا نستخلص من المتباينتين الأولى والثانية من اليسار في (2.4.6) أن الفرق بين الأخطاء الحقيقية والمحددة في هذه الحالات ليس ذا أهمية. هكذا، يمكن إثبات أن مثل هذا الاختبار بالحدين A'_0 , A'_1 في اختبار فالد يؤدي إلى اختبار أقوى.

ونشير في هذا المجال إلى خاصة هامة للاختبار التتابعي بالمقارنة مع الاختبارات العادية. في الاختبار العادي من أجل تعيين منطقة الرفض الموافقة لمستوى أهمية α، محددة مسبقاً، وحساب احتمال الخطأ من النوع الثاني (أو القوة) يلزمنا معرفة توزيع إحصاء الاختبار عند فرضية العدم H_0 والفرضية البديلة H_1. بينما عند بناء اختبار فالد لا تبرز ضرورة البحث عن توزيع. فعلاً، إن الحدين A'_0 , A'_1 يتعلقان فقط بالخطأين المحددين α , β، وبالنسبة L_{0n}/L_{1n}. ويمكن حسابهما بناءً على معطيات المسألة دون الحاجة للبحث عن أي توزيع، وتبرز الضرورة فقط لامتلاك معلومات حول التوزيعات، عند استعمال اختبار فالد، في حالة الحاجة لإيجاد توزيع عدد الملاحظات n حتى اتخاذ القرار.

يمكن تلخيص إجراء اختبار فالد لاختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta = \theta_1$ على النحو الآتي:

1. نحدد α , β.
2. نحسب A_0 , A_1، حيث إن:

$$A_0 \approx A_0' = \frac{\alpha}{1-\beta} \quad , \quad A_1 \approx A_1' = \frac{1-\alpha}{\beta}$$

3. نأخذ الملاحظة الأولى x_1 على المتغير العشوائي قيد الدراسة ξ ونحسب:

$$\lambda_1 = \frac{L_{01}}{L_{11}} = \frac{f_0(x_1)}{f_1(x_1)}$$

4. إذا كانت $\lambda_1 \leq A_0$ نرفض فرضية العدم H_0 (نقبل H_1)، أما إذا كانت $\lambda_1 \geq A_1$ نقبل الفرضية H_0.

5. إذا كانت $A_0 < \lambda_1 < A_1$ ، فنأخذ الملاحظة الثانية x_2 على المتغير العشوائي ξ، ونحسب:

$$\lambda_2 = \frac{L_{02}}{L_{12}} = \frac{f_0(x_1)f_0(x_2)}{f_1(x_1)f_1(x_2)}$$

6. نعيد الخطوة 4 باستخدام λ_2 بدلاً من λ_1.

7. نستمر بأخذ الملاحظات على ξ حتى اتخاذ قرار بقبول أو رفض H_0:

$$\lambda_n \quad ; \quad n = 1,2,...$$

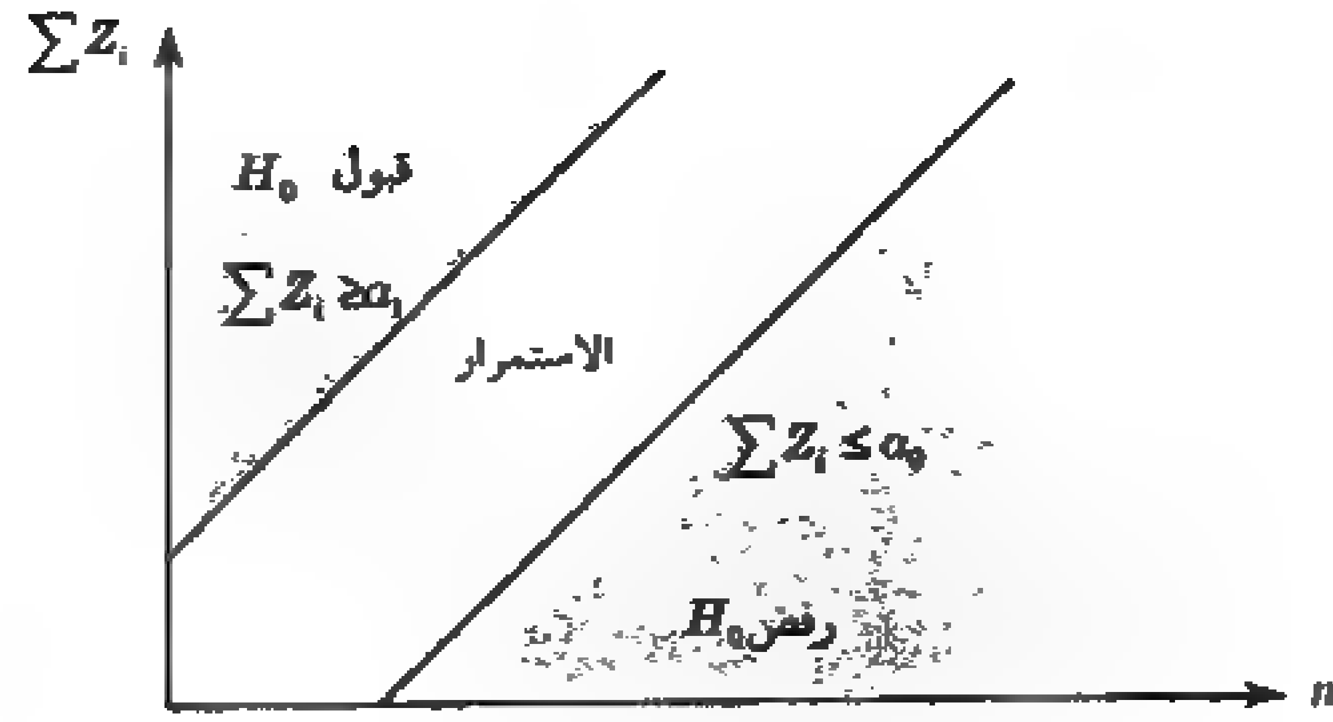
يبسط في حالات عدة تطبيق اختبار فالد إذا تعاملنا مع $\ln \lambda_n$ بدلاً من λ_n ومن ثم مع $a_0 = \ln A_0 \, , a_1 = \ln A_1$ بدلاً من $A_0 \, , A_1$ على الترتيب، وعندئذٍ يكون الاختبار هو:

نرفض H_0 إذا كان $\sum z_i \leq a_0$

نقبل H_0 إذا كان $\sum z_i \geq a_1$

نستمر إذا كان $a_0 < \sum z_i < a_1$

ويمكن تمثيل ذلك بيانياً كما هو مبين على الشكل (1.4.6).



شكل (1.4.6)

تجدر الإشارة هنا إلى أنه في اختبار فالد يمكن التحكم في اختيار قيمة كل من α, β، بينما لا يمكننا ذلك في اختبار نيمان وبيرسون ويمكننا المقارنة بين الاختبارين على النحو الآتي:

اختبار نيمان وبيرسون	اختبار فالد
حجم العينة n ثابت (معين مسبقاً)	حجم العينة n متغير عشوائي
α ثابتة (محددة مسبقاً)	α ثابتة (محددة مسبقاً)
β متغيرة	β ثابتة (محددة مسبقاً)
c تتحدد بدلالة α	A_0, A_1 تتحددان بدلالة α, β

مثال 1.4.6

إذا كانت $(x_1, x_2, \ldots)$ ملاحظات متتالية على متغير عشوائي ξ خاضع للتوزيع $\mathcal{L}(\xi) \in B(1, \theta)$، وكانت $\alpha = 0.05, \beta = 0.05$ فاختبر الفرضية $H_0 : \theta = 0.25$ مقابل الفرضية $H_1 : \theta = 0.75$ باستخدام اختبار فالد (اختبار نسبة الاحتمال التتابعي).

$$A_0 \approx \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{0.05}{1-0.05} = \frac{1}{19} \Rightarrow a_0 = \ln A_0 \approx -2.94$$

$$A_1 \approx \frac{1-\alpha}{\beta} = \frac{1-0.05}{0.05} = 19 \Rightarrow a_1 = \ln A_1 \approx 2.94$$

$$z_i = \ln\frac{f_0(x_i)}{f_1(x_i)} = \ln\frac{(1/4)^{x_i}(3/4)^{1-x_i}}{(3/4)^{x_i}(1/4)^{1-x_i}} = \ln\left(\frac{1}{3}\right)^{x_i}(3)^{1-x_i} = \ln 3 - 2x_i \ln 3$$

وبالتالي فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = n\ln 3 - 2\ln 3\sum_{i=1}^{n} x_i = 1.1n - 2.2\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ويكون اختبار فالد هو:

بعد الملاحظة رقم n (x_n) إذا كان:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \le -2.94 \;\Rightarrow\; 1.1n - 2.2\sum_{i=1}^{n} x_i \le -2.94 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} x_i \ge 0.5n + 1.34$$

نرفض فرضية العدم $H_0 : \theta = 0.25$. بينما نقبل H_0 إذا كان:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \ge 2.94 \;\Rightarrow\; 1.1n - 2.2\sum_{i=1}^{n} x_i \ge 2.94 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} x_i \le 0.5n - 1.34$$

ونأخذ الملاحظة رقم $(n+1)$ إذا كان:

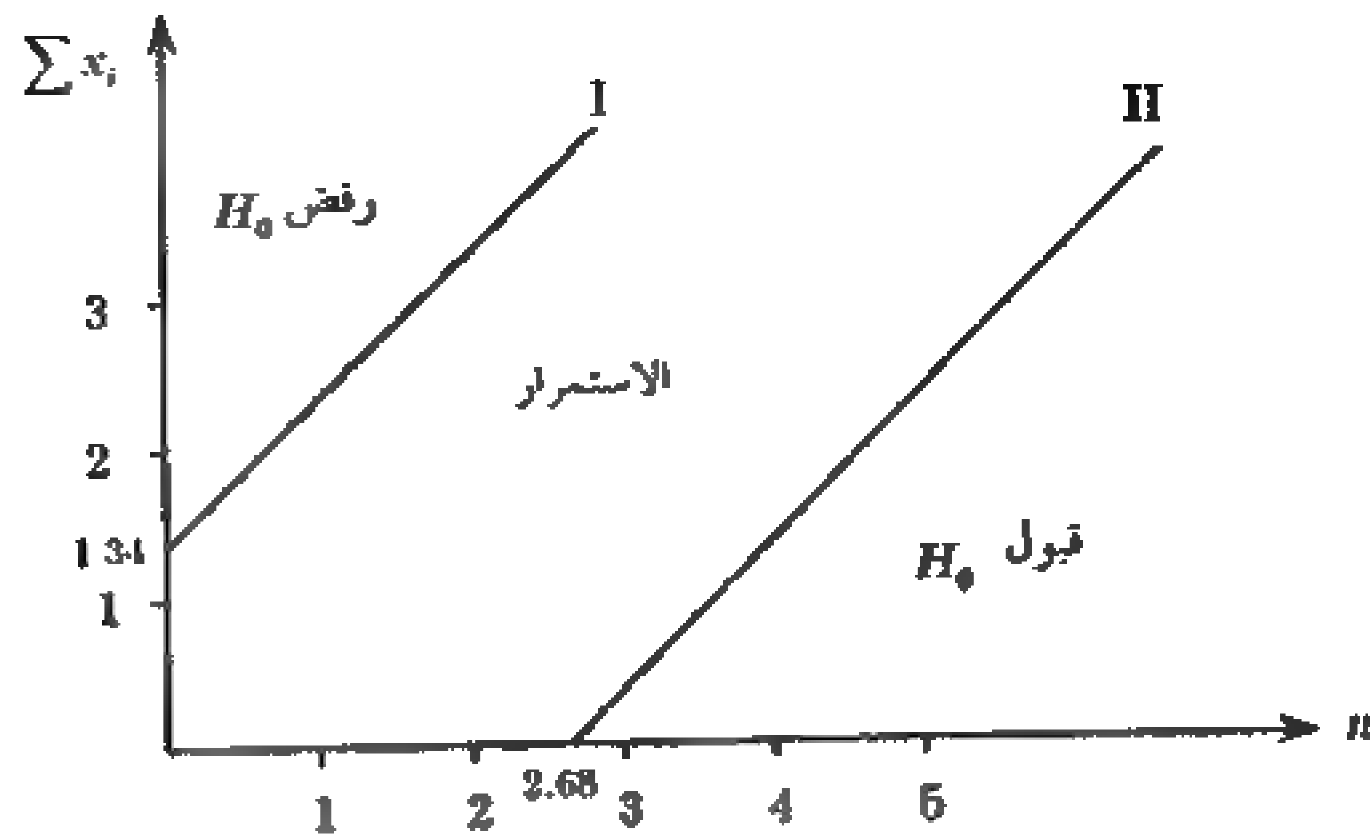
$$0.5n - 1.34 < \sum_{i=1}^{n} x_i < 0.5n + 1.34$$

ويمثل ذلك بيانياً كما هو مبين على الشكل (2.4.6)، حيث إن المستقيم I معادلته:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.05n + 1.34$$

والمستقيم الثاني II معادلته:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0.05n - 1.34$$



الشكل (2.4.6)

مثـــال 2.4.6

إذا كانت $(x_1, x_2, ...)$ ملاحظات على متغير عشوائي ξ يخضع لتوزيع بواسون $\Pi(\theta)$، فاختبر فرضية العدم $H_0 : \theta_0 = 2$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta_1 = 3$، عندمـــا $\alpha = 0.01$ و $\beta = 0.05$ باستخدام اختبار فالد.

نحسب أولاً A_1, A_0 ومن ثم a_1, a_0 على النحو الآتي:

$$A_0 \approx \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{0.01}{0.95} = \frac{1}{95} \quad \Rightarrow \quad a_0 = \ln A_0 \approx -4.55$$

$$A_1 \approx \frac{1-\alpha}{\beta} = \frac{0.99}{0.05} = \frac{99}{5} \quad \Rightarrow \quad a_1 = \ln A_1 \approx 2.99$$

وكما نعلم:

$$z_i = \ln \frac{f_0(x_i)}{f_1(x_i)} = \ln \frac{2^{x_i} e^{-2}/x_i!}{3^{x_i} e^{-3}/x_i!} = 1 + x_i \ln \frac{2}{3} = 1 - 0.41 x_i$$

وعليه:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = n - 0.41 \sum_{i=1}^{n} x_i$$

ويكون اختبار فالد كالآتي:

بعد الملاحظات الـ n على المتغير العشوائي ξ نرفض الفرضية H_0 إذا كان:

$$n - 0.41\sum_{1}^{n} x_i \leq -4.55$$

أو:

$$\sum_{1}^{n} x_i \geq \frac{n+4.55}{0.41} = 2.44n + 11.1$$

ونقبل H_0 إذا كانت:

$$n - 0.41\sum_{1}^{n} x_i \geq 2.99$$

أي:

$$\sum_{1}^{n} x_i \leq \frac{n-2.99}{0.41} = 2.44n - 7.48$$

ونأخذ الملاحظة رقم $(n+1)$ إذا كانت:

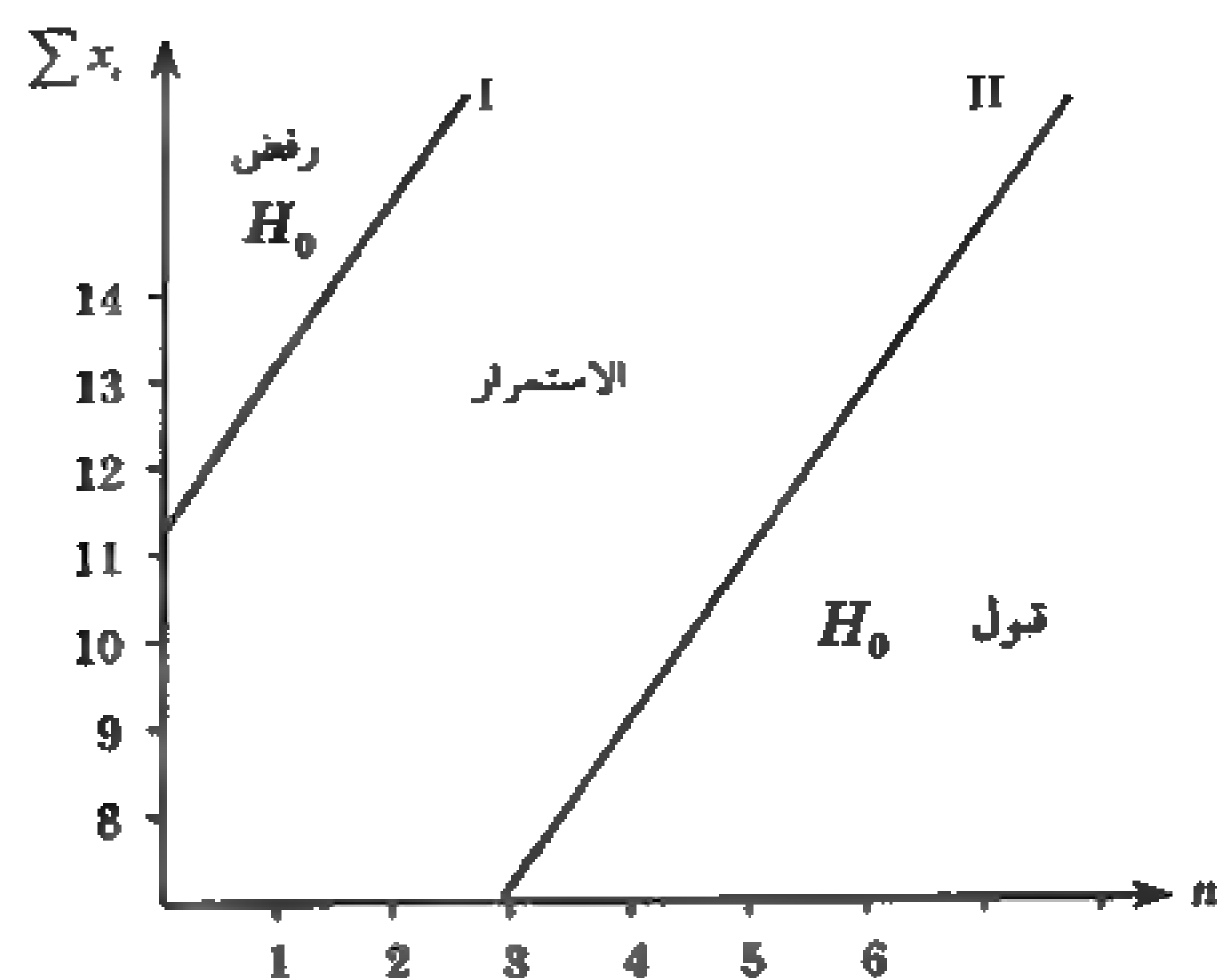
$$2.44n - 7.29 < \sum_{1}^{n} x_i < 2.44n + 11.1$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانياً كما هو مبين على الشكل (3.4.6).

فمثلاً، إذا كانت لدينا الملاحظات (1,3,2,4,6,11.7,10,12) على المتغير العشوائي ξ الخاضع لـ $\Pi(\theta)$، فهل تكفي للوصول إلى قرار بشأن الفرضية H_0 (قبول أو رفض)؟ وإذا كان الجواب بنعم عند أية ملاحظة نتوقف؟

حيث إن معادلتي المستقيمين I , II على الترتيب هما:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2.44n + 11.1 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 2.44n - 7.29$$



الشكل (3.4.6)

$$2.44(1)-7.29=-4.85<x_1=1<2.44(1)+11.1=13.54$$

$$2.44(2)-7.29=-2.41<x_1+x_2=4<2.44(2)+11.1=15.98$$

$$2.44(3)-7.29=-0.16<x_1+x_2+x_3=6<2.44(2)+11.1=18.70$$

$$2.44(4)-7.29=2.47<\sum_1^4 x_i=10<2.44(4)+11.1=20.86$$

$$2.44(5)-7.29=4.91<\sum_1^5 x_i=16<2.44(5)+11.1=23.3$$

بينما عند الملاحظة رقم 6:

$$\sum_1^6 x_i=27>2.44(6)+11.1=25.74$$

وبالتالي نرفض الفرضية H_0، أي يمكننا الاكتفاء بالملاحظات الست الأولى للوصول إلى قرار (وهنا رفض H_0).

مثـــال 3.4.6

إذا كان ξ متغيراً عشوائياً يخضع للتوزيع $\mathcal{L}(\xi)\in\Gamma(1,1/\theta)$، وكـــانت $x_1,x_2,\ldots$

ملاحظات (قراءات) عشوائية على ع، فكوّن اختبار نسبة الاحتمال التتـــابعي لاختبـــار فـــرضية العدم $H_0:\theta=1$ مقابل الفرضية البديلة $H_1:\theta=0.5$ بافتـــراض $\alpha=0.05$ و $\beta=0.08$. وإذا كان لدينا الملاحظات العشوائية (4,3.5,5,2.4) هل بالإمكان اتخـــاذ قرار بقبول أو رفض H_0؟

$$A_0 \approx \frac{\alpha}{1-\beta}=\frac{0.05}{0.92}=\frac{5}{92} \Rightarrow \ln A_0 \approx -2.91$$

$$A_1 \approx \frac{1-\alpha}{\beta}=\frac{0.95}{0.08}=\frac{95}{8} \Rightarrow \ln A_1 \approx 2.47$$

$$z_i=\ln\frac{f_0(x_i)}{f_1(x_i)}=\ln\frac{e^{-x_i}}{(1/2)e^{-\frac{1}{2}x_i}}=\ln 2-\frac{1}{2}x_i$$

وبالتالي:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = n\ln 2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ويكون اختبار نسبة الاحتمال التتابعي ذو القوة $(\alpha=0.05\,,\beta=0.08)$ كالآتي:

بعد الملاحظة رقم n نرفض H_0 إذا كان:

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = n\ln 2-\frac{1}{2}\sum_{1}^{n} x_i \le -2.91 \Rightarrow \sum_{1}^{n} x_i \ge 2n\ln 2+5.82=1.39n+5.82$$

ونقبل H_0 إذا كان:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n\ln 2-\frac{1}{2}\sum_{1}^{n} x_i \ge 2.47 \Rightarrow \sum_{1}^{n} x_i \le 2n\ln 2-4.94=1.39n-4\ 94$$

ونأخذ الملاحظة رقم $(n+1)$ إذا كان:

$$1.39n-4.94<\sum_{1}^{n} x_i<1.39n+5.82$$

نلاحظ عند الملاحظة الأولى:

$$-3.55 < x_1 = 4 < 7.21$$

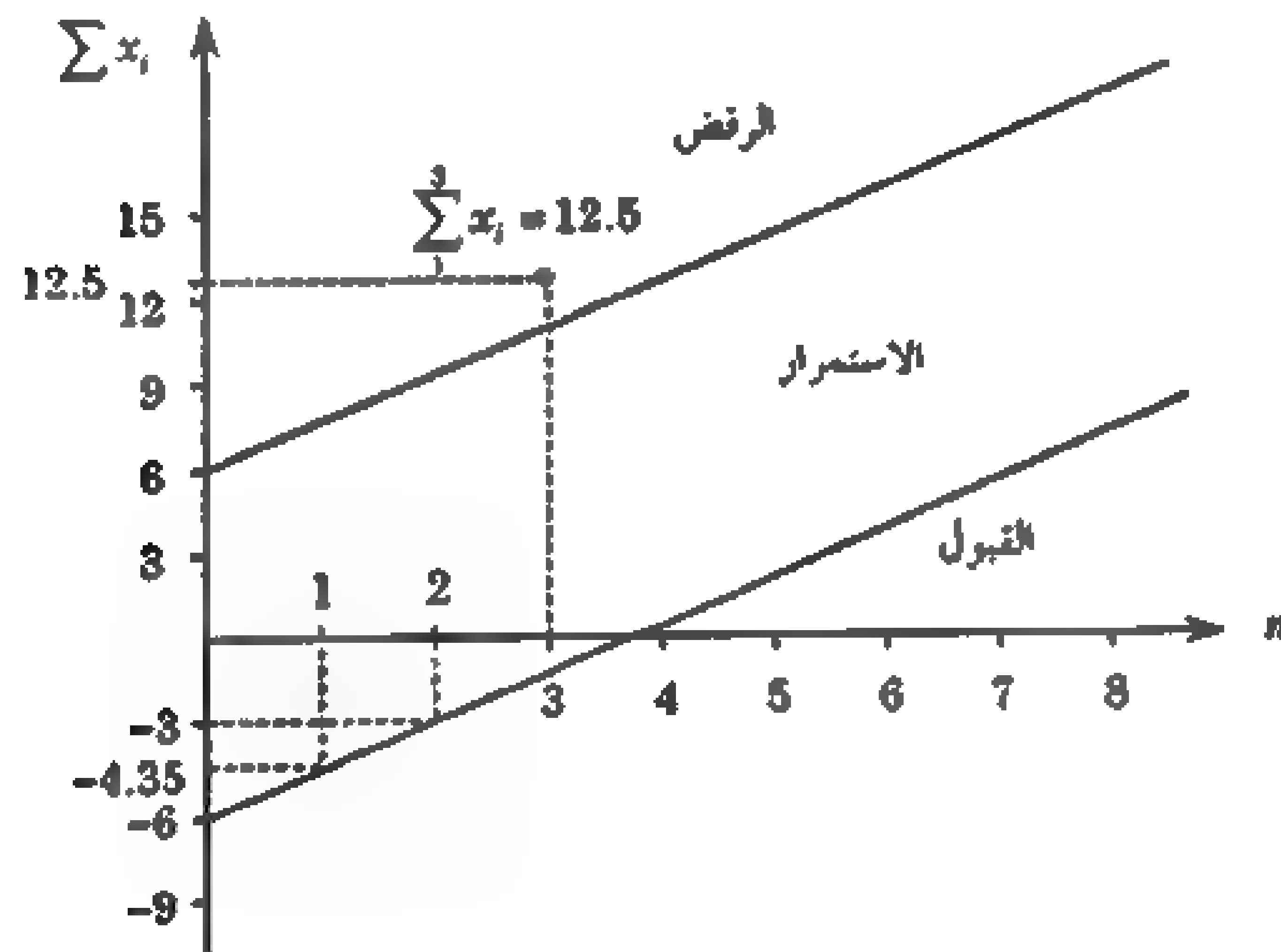
أي نستمر فنأخذ الملاحظة الثانية، فنجد:

$$-2.16 < \sum_{i=1}^{2} x_i = 7.5 < 8.6$$

نستمر ونأخذ الملاحظة الثالثة، فنجد:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = 12.5 \geq 1.39(3) + 5.82 = 9.99$$

وبالتالي نتخذ القرار عند الملاحظة الثالثة برفض الفرضية $H_0 : \theta = 1$. يمكن تمثيل ما سبق بيانياً كما هو مبين على الشكل (4.4.6):



الشكل (4.4.6)

مثـال 4.4.6

لتكن $(x_1, x_2, ...)$ ملاحظات على متغير عشوائي مستمر ξ يتبع توزيعـاً طبيعيـاً $N(\theta, 4)$ و $\alpha = 0.05, \beta = 0.10$، ونريد اختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = 1$ ضد الفرضية

البديلة $H_1: \theta = 2$ وذلك باستخدام اختبار نسبة الاحتمال التتابعي (اختبار فالد).

نحسب أولاً A_1 , A_0، حيث إن:

$$A_0 \approx \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{0.05}{0.90} = \frac{1}{18} \Rightarrow a_0 = \ln A_0 \approx -2.89$$

$$A_1 \approx \frac{1-\alpha}{\beta} = \frac{0.95}{0.10} = 9.5 \Rightarrow a_1 \approx \ln A_1 \approx 2.25$$

ومن ثم z_i:

$$z_i = \ln\frac{f_0(x_i)}{f_1(x_i)} = \ln\frac{\left(1/2\sqrt{2\pi}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-1}{2}\right)^2}}{\left(1/2\sqrt{2\pi}\right)e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-2}{2}\right)^2}} = \frac{1}{8}(x_i-2)^2 - \frac{1}{8}(x_i-1)^2 = -\frac{1}{4}x_i + \frac{3}{8}$$

وعلى ذلك فإن:

$$\sum_1^n z_i = -\frac{1}{4}\sum_1^n x_i + \frac{3}{8}n$$

ويكون الاختبار على النحو الآتي:

بعد الملاحظة رقم n نرفض H_0 إذا كان:

$$\sum_1^n z_i = -\frac{1}{4}\sum_1^n x_i + \frac{3}{8}n \le -2.89 \Rightarrow \sum_1^n x_i \ge \frac{3}{2}n + 11.56$$

بينما نقبل H_0 إذا كان:

$$\sum_1^n z_i = -\frac{1}{4}\sum_1^n x_i + \frac{3}{8}n \ge 2.25 \Rightarrow \sum_1^n x_i \le \frac{3}{2}n - 9$$

ونأخذ الملاحظة رقم $(n+1)$ إذا كان:

$$\frac{3}{2}n - 9 < \sum_1^n x_i < \frac{3}{2}n + 11.56$$

إذا كانت لدينا العينة العشوائية المشاهدة (16,14,2−,8,5,10−) على ع، فهل نقبل (نرفض الفرضية) H_0 أم نحتاج إلى مشاهدات أخرى (الملاحظة رقم 7 أو 8 أو . . .)؟

نلاحظ أن المتباينة:

$$\frac{3}{2}n-9<\sum_{1}^{n}x_i<\frac{3}{2}n+11.56$$

محققة حتى الملاحظة رقم 5، لكن عند أخذ الملاحظة رقم 6 نجد:

$$\sum_{1}^{6}x_i=31>\frac{3}{2}(6)+11.56=20.56$$

أي نتخذ القرار برفض الفرضية H_0.

5.6 متوسط حجم العينة في اختبار فالد

AVERAGE SAMPLE SIZE IN VALD TEST

كما أشرنا سابقاً إن عدد الملاحظات v في اختبار فالد عبارة عن متغير عشوائي يأخذ القيم $n=1,2,...$، وله توقع رياضي (متوسط) منتهٍ $E_\theta(v)$ (مبرهنة 2.3.6).

سنتطرق في هذه الفقرة لحساب $E_\theta(v)$. لنتوقف أولاً عند مطابقة فالد:

$$E_\theta(S_v)=E_\theta(v)E_\theta(Z) \quad ; \quad \forall\theta\in\theta \qquad (1.5.6)$$

وهذا ما تنص عليه المبرهنة الآتية:

مبرهنة 1.5.6

إذا كانت $Z_1,Z_2,...$ متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس توزيع Z، بحيث إن $E|Z|<\infty ; EZ\neq 0$، و v متغير عشوائي يفترض قيماً صحيحة موجبة وكانت قيمته n تعتمد فقط على القيم الـ n الأولى للمتغيرات العشوائية Z_i، فإن:

$$E_\theta(S_\upsilon)=E_\theta(\upsilon)E_\theta(Z) \quad ; \quad \forall\theta\in\Theta \quad , \quad S_\upsilon=Z_1+....+Z_\upsilon$$

الإثبات

لتكن لدينا المتغيرات العشوائية $Y_1,Y_2,....$، بحيث إن:

$$Y_n=\begin{cases}1 & ; \quad \upsilon\geq n \quad ; \quad n \text{ لم يتخذ القرار قبل الملاحظة رقم} \\ 0 & ; \quad \upsilon<n \quad ; \quad \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

من الواضح أن Y_n دالة في $Z_1,Z_2,...,Z_{n-1}$ فقط، وبالتالي مستقل عن Z_n وبسهولة يمكن إثبات أن:

$$S_\upsilon=\sum_{n=1}^{\infty}Y_nZ_n$$

وبأخذ توقع الطرفين نجد:

$$E_\theta(S_\upsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}E_\theta(Y_nZ_n)=E_\theta(Z)\sum_{n=1}^{\infty}E_\theta(Y_n)=E_\theta(Z)\sum_{n=1}^{\infty}P_\theta(Y_n=1) \qquad (2.5.6)$$

لأن المتغيرات العشوائية $Z_1,Z_2,...,Z_n$ مستقلة ولها نفس التوزيع وهو توزيع Z.

إن الحادث $\{Y_n=1\}$ مكافئ للحادث $\{\upsilon\geq n\}$. وبما أنه من أجل أي متغير عشوائي D يفترض قيماً صحيحة موجبة، فإن:

$$\begin{aligned}ED&=P(D=1)+2P(D=2)+3P(D=3)+.....=\\&=\sum_{k=1}^{\infty}P(D=k)+\sum_{k=2}^{\infty}P(D=k)+\sum_{k=3}^{\infty}P(D=k)+.....=\\&=\sum_{n=1}^{\infty}P(D\geq n)\end{aligned}$$

ومن ثم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}P_\theta(Y_n=1)=\sum_{n=1}^{\infty}P_\theta(\upsilon\geq n)=E_\theta(\upsilon)$$

وبالتعويض في العلاقة (2.5.6)، نجد:

$$E_0(S_\nu) = E_0(Z)E_0(\nu)$$

لنفترض الآن أن قيمتي احتمالي الخطأ α , β معينتان. وكما رأينا في البنـــد (4.6)، عملياً عندما تكون α , β صغيرتين فالحدان A_0 , A_1 في (1.4.6) يمكن استبدالهما علـى الترتيب بـــ A'_0 , A'_1 ومن ثم استبدال a_0 , a_1 بـــ a'_0 , a'_1:

$$a_0 \approx a'_0 = \ln A'_0 = \ln \frac{\alpha}{1-\beta} \quad , \quad a_1 \approx a'_1 = \ln A'_1 = \ln \frac{1-\alpha}{\beta} \qquad (3.4.6)$$

وعندما α , β صغيرتين فطول الفترة (a'_0, a'_1) كبير. والمقدار $E_\theta(Z)$ مستقل عــن α , β، وحسب الفرض منتهٍ [راجع البند (3.6)]. لذا يمكن إهمال حقيقة تجاوز المجمــوع S_ν أحد الحدين في لحظـــة التوقـــف، أي وضـــع $S_\nu \approx a'_j$ عنـــد رفـــض الفرضيـــة $H_j \; (j = 0,1)$. وبعبارة أخرى يمكن اعتبار متوسط المجموع S_ν يساوي تقريبـــاً الحـــد الموافق a'_0 أو a'_1 ومن هذه المناقشة ومطابقة فالد (1.5.6) نجد:

$$E_{\theta_0}(\nu)E_{\theta_0}(Z) = E_{\theta_0}(S_\nu) \approx a'_0 P(H_1|H_0) + a'_1 P(H_0|H_0) = \alpha a'_0 + (1-\alpha)a'_1$$

وبشكل مشابه نجد:

$$E_{\theta_1}(\nu)E_{\theta_1}(Z) = E_{\theta_1}(S_\nu) \approx a'_0 P(H_1|H_1) + a'_1 P(H_0|H_1) = (1-\beta)a'_0 + \beta a'_1$$

وعلى ذلك يمكن حساب $E_j(\nu) = E_{\theta_j}(\nu) ; j = 0,1$ بالصيغة التقريبية الآتية:

$$E_0\nu \approx \frac{\alpha a'_0 + (1-\alpha)a'_1}{E_0 Z} \quad , \quad E_1\nu \approx \frac{(1-\beta)a'_0 + \beta a'_1}{E_1 Z} \qquad (4.5.6)$$

ويمكن إثبات من أجل أي اختبار تتابعي له نفس القوة (α,β) أن متوسط عدد الملاحظات حتى لحظة التوقف (لحظة اتخاذ القرار) عند الفرضية $H_j ; j = 0,1$ يقدر بالطرف الأيمـــن من المساواة الموافقة في (4.5.6). هكذا، متوسط عدد الملاحظات (القيمة المتوقعة لحجـــم

العينة) في اختبار فالد قريب من أصغر قيمة، أي أن هذا الاختبـــار يعتبر الأمثل (بدرجـــة التقريب العالية المتحذة).

مثـــال 1.5.6

لتكن لدينا معطيات المثال (3.4.6) ونتائج الحل الواردة، ونريد حساب متوسط حجم العينة اللازم للوصول إلى قرار (قبول أو رفض H_0).

كما نعلم أن الملاحظات مأخوذة على متغير عشوائي مستمر ξ يخضع لتوزيع أســـي $\Gamma(1,1/\theta)$، أي أن كثافة توزيعه الاحتمالي:

$$f(x,\theta)=\theta e^{-\theta x} \quad ; \quad \theta>0 \;,\; x>0$$

وأن توقعه الرياضي $E_\theta\xi=\dfrac{1}{\theta}$. وعليه فإن توزيع الملاحظة X_i:

$$f(x_i;\theta)=\theta e^{-\theta x_i} \quad , \quad E_\theta X_i=\frac{1}{\theta}$$

وبما أن:

$$Z_i=\ln\frac{f_0(X_i)}{f_1(X_i)}=\ln\frac{e^{-X_i}}{(1/2)e^{-X_i/2}}=\ln 2-\frac{1}{2}X_i$$

فإن:

$$E_\theta Z_i=\ln 2-\frac{1}{2}E_\theta X_i$$

ومن ثم:

$$E_0Z_i=E_{\theta_0}Z_i=\ln 2-\frac{1}{2}=0.19$$
$$E_1Z_i=E_{\theta_1}Z_i=\ln 2-1=-0.31$$

وبتطبيق العلاقتين في (4.5.6)، نجد:

$$E_0\upsilon\approx\frac{0.05(-2.91)+0.95(2.47)}{0.17}=11.58\approx 12$$

$$E_1 v \approx \frac{0.92(-2.91)+0.08(2.47)}{-0.31} \approx 9$$

6.6 مقارنة اختبار فالد مع اختبار الحجم الثابت

COMPARISON OF VALD TEST WITH FIXED SAMPLE SIZE TEST

عندما تكون كل من α, β معطاة فيمكننا حساب حجم العينة الثابت اللازم لإجراء اختبار نيمان وبيرسون (الاختبار الأقوى) وكذلك حساب القيمة المتوقعة لحجم العينة في حالة اختبار فالد. والمثال الآتي يبين الوفر الذي نحصل عليه من استخدام اختبار فالد بدلاً من الاختبارات التي تعتمد على حجم العينة الثابت.

مثـال 1.6.6

لتكن $(x_1, x_2, ...)$ ملاحظات على متغير عشوائي ξ يتبع التوزيع الطبيعي $\mathcal{L}(\xi) \in N(\theta, \sigma^2)$ وكل من α, β معطاة ويطلب اختبار فرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$ باستخدام اختبار نسبة الاحتمال التتابعي، ومن ثم حساب متوسط حجم العينة اللازم للوصول إلى قرار.

بما أن:

$$z_i = \ln \frac{f_0(x_i)}{f_1(x_i)} = \frac{(x_i - \theta_1)^2 - (x_i - \theta_0)^2}{2\sigma^2} = -\frac{\theta_1 - \theta_0}{\sigma^2}\left(x_i - \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}\right) \qquad (1.6.6)$$

يتعين اختبار فالد ذو القوة (α, β) على النحو الآتي:

تستمر الملاحظات على المتغير العشوائي ξ طالما المتباينة المزدوجة:

$$a_0' = \ln \frac{\alpha}{1-\beta} < \sum_{i=1}^{n} z_i < \ln \frac{1-\alpha}{\beta} = a_1' \qquad (1)$$

أو :

$$\frac{n}{2}(\theta_1 + \theta_0) - \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} a_1' < \sum_{1}^{n} x_i < \frac{n}{2}(\theta_1 + \theta_0) - \frac{\sigma^2}{\theta_1 - \theta_0} a_0' \qquad (2)$$

أما إذا كانت:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{n}{2}(\theta_1+\theta_0) - \frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}a_0'$$

فنرفض الفرضية H_0. بينما نقبل الفرضية H_0 إذا كانت:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n}{2}(\theta_1+\theta_0) - \frac{\sigma^2}{\theta_1-\theta_0}a_1'$$

لنحسب الآن متوسط عدد الملاحظات حتى اتخاذ القرار (قبول أو رفض H_0).
من العلاقة (1.6.6)، نجد:

$$E_jZ = E_{\theta_j}Z = -\frac{\theta_1-\theta_0}{\sigma^2}\left(E_{\theta_j}(X_i)-\frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right) = -\frac{\theta_1-\theta_0}{\sigma^2}\left(\theta_j-\frac{\theta_0+\theta_1}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} (\theta_1-\theta_0)^2/(2\sigma^2) & ; \quad j=0 \\ -(\theta_1-\theta_0)^2/(2\sigma^2) & ; \quad j=1 \end{cases} \qquad (2.6.6)$$

من ذلك ومن العلاقة (4.5.6)، نجد:

$$E_0 v \approx \frac{\alpha a_0' + (1-\alpha)a_1'}{E_0Z} = +\frac{2\sigma^2}{(\theta_1-\theta_0)^2}\left[\alpha \ln\frac{\alpha}{1-\beta} + (1-\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{\beta}\right] \qquad (3.6.6)$$

$$E_1 v \approx \frac{(1-\beta)a_0' + \beta a_1'}{E_1Z} = -\frac{2\sigma^2}{(\theta_1-\theta_0)^2}\left[(1-\beta)\ln\frac{\alpha}{1-\beta} + \beta\ln\frac{1-\alpha}{\beta}\right] \qquad (4.6.6)$$

وعدد الملاحظات (التكرارات) اللازمة n^*، من أجل اختبار نيمان وبيرسون بنفس احتمالي الخطأ α, β، يتعين من العلاقة (I-12.2.2)، أي أن:

$$n^* = \left\|\left[\sigma(\zeta_\alpha+\zeta_\beta)^2/(\theta_1-\theta_0)^2\right]\right\| + 1$$

ونسبة متوسط حجم العينة في اختبار فالد التتابعي، عند صحة فرضية العدم H_0، إلى الحجم n^* تساوي:

$$\frac{E_0 \upsilon}{n^*} \approx \frac{2}{(\zeta_\alpha + \zeta_\beta)^2}\left[\alpha \ln \frac{\alpha}{1-\beta} + (1-\alpha)\ln\frac{1-\alpha}{\beta}\right] \qquad (5.6.6)$$

ومستقلة عن σ^2 و $(\theta_1 - \theta_0)^2$، مع العلم أن ζ_α تعين من المساواة $\Phi(-\zeta_\alpha) = \alpha$.

وهذه النسبة، عند صحة الفرضية البديلة H_1، تساوي:

$$\frac{E_1 \upsilon}{n^*} \approx -\frac{2}{(\zeta_\alpha + \zeta_\beta)^2}\left[(1-\beta)\ln \frac{\alpha}{1-\beta} + \beta\ln\frac{1-\alpha}{\beta}\right] \qquad (6.6.6)$$

وكحالة خاصة إذا كان $\alpha = \beta$، فإن $\zeta_\alpha = \zeta_\beta$ و $\ln\frac{\alpha}{1-\beta} = -\ln\frac{1-\alpha}{\beta}$، وبناءً على العلاقتين (5.5.6) و (6.5.6) نجد:

$$\frac{E_0 \upsilon}{n^*} \approx \frac{E_1 \upsilon}{n^*} \approx \frac{2\alpha - 1}{2\zeta_\alpha^2}\ln\frac{1-\alpha}{\beta} = \psi(\alpha) \qquad (7.6.6)$$

فمثلاً، عندما $\alpha = 0.05$ $(\Phi(\zeta_\alpha) = 0.05)$، فإن $\zeta_\alpha = 1.6449$، ومن العلاقة (7.6.6) نجد $\psi(\alpha) = 0.4897$. وهذا يعني توفير الملاحظات بشكل 50% تقريباً فيما لو استخدما اختبار فالد باحتمالي خطأ α, β بدلاً من استخدام اختبار نيمان وبيرسون بنفس احتمالي الخطأ. وهذا ما يوفر الكثير من الوقت والجهد والمال في العديد من التطبيقات.

مثال 2.6.6

إذا كانت $(x_1, x_2, ...)$ مشاهدات على متغير عشوائي مستمر ξ يخضع للتوزيع $\mathcal{L}(\xi) \in N(\theta, 100)$ وكانت $H_0: \theta = 150, H_1: \theta = 155$ و $\alpha = 0.01, \beta = 0.05$ فالمطلوب:

1. أوجد حجم العينة الثابت لإجراء الاختبار الأقوى (اختبار نيمان وبيرسون).
2. أوجد القيمة المتوقعة لحجم العينة اللازم لإجراء اختبار فالد.

كما نعلم [مثال (1.2.2)] أن الاختبار الأقوى بحجم $\alpha = 0.01$ يعطي بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha}^{*} = \left\{x : \bar{x} \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\alpha} + \theta_0 = \frac{23.3}{\sqrt{n}} + 150\right\} \quad ; \quad \Phi(-t_{\alpha}) = 0.01$$

وحجم العينة n^{*} الـــلازم لإجـــراء اختبـــار نيمان وبيرسون المـــوافق لـــ $\alpha = 0.01$، $\beta = 0.05$ هو:

$$n^{*} = \left\|\left[\sigma^2(\zeta_{\alpha} + \zeta_{\beta})^2/(\theta_1 - \theta_0)^2\right]\right\| + 1$$
$$= \left[100(2.33 + 1.65)/25\right] + 1 = \left\|[15.92]\right\| + 1 = 16$$

بتطبيق العلاقة (2.6.6)، نجد:

$$E_0 Z = (\theta_1 - \theta_0)^2/(2\sigma^2) = \frac{25}{50} = 0.5$$
$$E_1 Z = -(\theta_1 - \theta_0)^2/(2\sigma^2) = -0.5$$

وبما أن:

$$a_0' = \ln\frac{\alpha}{1-\beta} = \ln\frac{0.01}{0.95} = \ln\frac{1}{95} = -4.55$$
$$a_1' = \ln\frac{1-\alpha}{\beta} = \ln\frac{0.99}{0.05} = \ln\frac{99}{5} = 2.99$$

فإن:

$$E_0 v = \frac{\alpha a_0' + (1-\alpha)a_1'}{E_0 Z} = \frac{0.01(-4.55) + 0.99(2.99)}{0.5} = \frac{2.9146}{0.5} = 5.829 \approx 6$$
$$E_1 v = \frac{(1-\beta)a_0' + \beta a_1'}{E_1 Z} = \frac{0.95(-4.55) + 0.05(2\ 94)}{-0.5} = \frac{-4.1755}{-0.5} = 8.351 \approx 8$$

نلاحظ أنه في الحالتين (رفض أو قبول H_0) تكون القيمة المتوقعة لحجم العينة أقـــل بكثير من حجم العينة في اختبار نيمان وبيرسون، بحيث لا يتجاوز تقريباً نصف حجـــم العينة الثابت.

تمارين

1. إذا كانت ξ تخضع للتوزيع الأسي:

$$f(x;\theta) = \theta e^{-\theta x} \quad , \quad x > 0$$

وكانت $H_0 : \theta = 1 \, , H_1 : \theta = 2$ و $\alpha = \beta = 0.01$، فأوجد اختبار فالد واحسب القيمة المتوقعة لحجم العينة.

2. إذا كانت ξ تخضع للتوزيع:

$$f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} \quad ; \quad 0 < x < 1$$

وكانت $H_0 : 2 \, , H_1 = 3$ و $\alpha = \beta = 0.05$، فأوجد اختبار نسبة الاحتمال التتابعي واحسب القيمة المتوقعة لحجم العينة. وبفرض لدينا العينة المشاهدة $x = (0.2,0.4,0.6,0.1,0.7,0.9,0.4)$، هل تقبل الفرضية H_0 أم ترفضها؟. وإذا كان الجواب بنعم عند أي ملاحظة يتخذ القرار (الرفض أو القبول)؟

3. أعد حل التمرين (2) إذا كانت $\alpha = 0.01 \, , \beta = 0.05$.

4. إذا كانت ξ تخضع لتوزيع بيرنولي $\mathcal{L}(\xi) \in B(1,\theta)$، وكانت $H_0 : \theta_0 = 0.25$، $H_1 : \theta_1 = 0.75$ و $\alpha = \beta = 0.02$، فأوجد اختبار فالد واحسب القيمة المتوقعة لحجم العينة. وبفرض لدينا عينة مشاهدة $x = (0,1,1,0,0,1,1,1,0,0)$، هل تقبل الفرضية H_0 أم ترفضها؟

5. إذا كانت ξ تخضع لتوزيع بواسون $\Pi(\theta)$. وكانت $H_0 : \theta_0 = 1 \, , H_1 : \theta_1 = 3$ و $\alpha = \beta = 0.001$. فما هو احتبار فالد الموافق، ومن ثم ما هي قوة هذا الاختبار؟

6. إذا كانت ξ تخضع للتوزيع الطبيعي $\mathcal{L}(\xi) \in N(\theta, 25)$، وكانت $H_0 : \theta_0 = 150$ و $H_1 : \theta_1 = 180$ و $\alpha = 0.01, \beta = 0.05$، فالمطلوب:

أ. أوجد اختبار فالد ذا القوة $(0.01, 0.05)$.

ب. احسب القيمة المتوقعة لحجم العينة n.

ج. إذا كانت لدينا العينة المشاهدة $x = (170, 130, 120, 180, 150, 190, 135)$، فما هو قرارك (قبول أم رفض H_0)؟

7. إذا كانت $(x_1, x_2, ...)$ مشاهدات على متغير عشوائي ξ يخضع للتوزيع:

$$f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} \quad ; \quad 0 < x < \theta$$

وكانت $H_0 : \theta = 2, H_1 : \theta = 3$ و $\alpha = 0.05, \beta = 0.01$ فالمطلوب:

أ. بناء اختبار فالد ذا القوة $(0.05; 0.01)$.

ب. بناء اختبار نيمان-بيرسون بحجم $\alpha = 0.05$

ج. أوجد القيمة المتوقعة لحجم العينة اللازم لإجراء اختبار فالد.

د. عين حجم العينة n اللازم لإجراء اختبار نيمان-بيرسون، ثم قارن بين الحجمين (ج ، د).

8. أعد حل التمرين (7) في الحالات التالية:

أ. $\beta = 0.05$, $\alpha = 0.01$.

ب. $\beta = 0.05$, $\alpha = 0.1$.

ج. $\beta = 0.01$, $\alpha = 0.005$.

الفصل السابع:

الفرضيات الإحصائية اللامعلمية

1.7 مقدمة

تناولنا في الفصول السابقة بشيء من التفصيل اختبار الفرضيات المعلمية، وأعطيناها أهمية خاصة لاختبارات نسبة المعقولية. ورأينا أن مسائل اختبار الفرضيات المعلمية كانت تتطلب افتراض أن صيغة التوزيع الاحتمالي للمجتمع الذي سحبت منه العينة العشوائية معلومة لكنها تعتمد على معلمة أو معالم مجهولة، ومن ثم، صيغت الفرضيات المراد اختبارها حول تلك المعالم الواردة في صيغة التوزيع. وأن اختبارات الفرضيات المعلمية بنيت أساساً على افتراض أن العينات عشوائية، هذا بالإضافة إلى وجود حالات تتطلب افتراضات أخرى مثل استقلال العينات العشوائية وتجانس العينات العشوائية، . . . الخ.

في حالات كثيرة قد لا يكون بعض أو كل تلك الافتراضات صحيحاً (أو يوجد شك في صحتها)، وبالتالي يتطلب الأمر اختبار صحتها، ومثل تلك الفرضيات تدعى بالفرضيات اللامعلمية Non-parametric hypothesis (ليست حول المعالم غير المعلومة الواردة في صيغة التوزيع الاحتمالي للمجتمع قيد الدراسة)، وأن اختبارها لا يتطلب المعرفة التامة أو الجزئية لتوزيع المجتمع.

نواجه في حالات عدة مجتمعات يصعب فيها معرفة صيغة التوزيع الاحتمالي الذي تتبعه، ولهذا كان من الضروري أن تنشأ أساليب أخرى لا تتطلب معرفة صيغة التوزيع

الاحتمالي للمجتمعات التي سحبت منها العينات العشوائية، وتبنى على افتراضات أقـــل. وقد عرفت هذه الأساليب بالطرق اللامعلمية Non-parametric methods، أو الطرق حرة التوزيع Distribution free methods، بمعنى الطرق التي لا تتطلب معرفة التوزيع الاحتمالي للمجتمع (أو المجتمعات) الذي سحبت منه العينـــة العشـــوائية أو العينـــات العشوائية المشاهدة.

وفضلاً عن أن الطرق والاختبارات اللامعلمية يمكن استخدامها تحت شروط عامـــة للغاية وتعفينا من القلق عن صحة الافتراضات فهي تتميز بعدة أمور منها:

1. إنها عادة ما تكون أسهل في الفهم والتفسير من الطرق الأخـــرى ولا تحتـــاج إلى مجهود في العمليات الحسابية.
2. أنها لا تشترط أن تكون البيانات كمية (عددية) بل يمكن أن تكـــون نوعيـــة أو ترتيبية.

ولهذا شاع استخدام الطرق اللامعلمية بالرغم من أنها لا تعطي نفس القدر من الدقة الذي تعطيه الطرق المعلمية المناظرة لها، فهي بصفة عامة أقل كفاءة منـــها. وبالتـــالي إذا وجد موقف يمكن فيه تطبيق كلا الأسلوبين فينبغي دائماً استخدام الطريقة المعلمية فـــهي الأكثر كفاءة.

نقدم في البنود التالية الصياغات الرياضية للفرضيات اللامعلمية التي نصادفها غالبـــاً في التطبيقات الإحصائية.

2.7 الفرضية اللامعلمية حول شكل التوزيع

NON-PARAMETRIC HYPOTHESIS CONCERNING TYPE OF DISTRIBUTION

إن جميع مسائل اختبار الفرضيات التي نوقشت في الفصول السابقة بنيـــت علـــى افتراض أن صيغة التوزيع الاحتمالي للمجتمع، الذي أخذت منه عينة عشوائية، معلومـــة

$F(x;\theta)$ لكنها تعتمد على معلمة θ (وحيدة البعد أو متعددة الأبعاد) غير معلومة. غير أن هناك حالات يصعب فيها تحديد مدى تحقق هذا الافتراض، أي وجود شك في تحققه، وبالتالي يجب اختبار صحته.

لتكن $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع متغير عشوائي ξ دالة توزيعه $F_\xi(x)$ مجهولة. عندئذٍ الفرضية الإحصائية اللامعلمية H_0 يمكن أن تكون:

$$H_0 : F_\xi(x) = F_0(x)$$

حيث إن دالة التوزيع $F_0(x)$ معينة تماماً، أو من الشكل:

$$H_0 : F_\xi(x) \in F_0$$

حيث إن F_0 صف دوال التوزيع من نوع معين (طبيعي، بواسوني، . . . الخ)، ويعطى بصيغة معلمية:

$$F_0 = \{F(x;\theta) \ ; \ \theta \in \Theta\}$$

فمثلاً، ليكن المتغير العشوائي الملاحظ ξ يفترض قيماً صحيحة وغير سالبة، ونريد اختبار صحة الفرضية:

$$H_0 : \mathcal{L}(\xi) = \Pi(2)$$

أو

$$H_0 : \mathcal{L}(\xi) \in \Pi(\theta)$$

حيث إن $\Pi(\theta)$ صف كل التوزيعات البواسونية. في مثل تلك الحالات H_0 فرضية حول صيغة (محددة تماماً أو جزئياً) توزيع المتغير العشوائي الملاحظ ξ.

3.7 الفرضية اللامعلمية حول تقسيمة من تقسيمات المجتمع

NON-PARAMETRIC HYPOTHESIS CONCERNING A QUANTILE OF THE POPULATION

في بعض الحالات تصاغ فرضية العدم H_0 حول بعض المميزات الخاصة بدالة التوزيع $F_\xi(x)$. فمثلاً، يمكن أن تكون فرضية العدم H_0 من الشكل:

$$H_0 : F_\xi(z_i) = p_i \quad ; \quad i = 1, ..., k$$

حيث إن:

$$0 < p_1 < .... < p_k < 1 \quad , \quad -\infty < z_1 < .... < z_k < +\infty$$

أعداد معطاة، هنا فرضية العدم H_0 تنص على أن التوزيع $\mathcal{L}(\xi)$ له القيم الحرجة $z_i ; i = 1, ..., k$ الموافقة للاحتمالات المعطاة $p_i ; i = 1, ..., k$ ونريد اختبار صحة ذلك.

فمثلاً، يمكن أن تكون فرضية العدم حول μ وسيط التوزيع غير المعلوم $\mathcal{L}(\xi)$ (وسيط المجتمع Population median)، أي أن فرضية العدم $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$. ويمكن أن تكون حول ربيعات هذا التوزيع Q_1, Q_2, Q_3، وعندئذٍ فرضية العدم:

$$H_0 : Q_1 = Q_{10} \;\; , \;\; Q_2 = Q_{20} \;\; , \;\; Q_3 = Q_{30}$$

كما ويمكن أن تكون الفرضية حول عُشيرات التوزيع $\mathcal{L}(\xi)$، وعندئذٍ تصاغ فرضية العدم H_0 على النحو الآتي:

$$H_0 : Q_1 = Q_{10}, ..., Q_9 = Q_{90}$$

وتحدد الكميات المراد اختبارها حسب متطلبات المشكلة المطروحة.

4.7 فرضية التجانس HYPOTHESIS OF HOMOGENEITY

لتكن لدينا k عينة عشوائية مستقلة نرمز لها بـ:

$$(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{in_i}) \quad ; \quad i = 1, 2, ..., k$$

والتساؤل الذي يطرح نفسه الآن: هل يوجد أساساً لاعتبار هذه العينات العشوائية مسحوبة من مجتمع واحد؟ أي هل يمكن اعتبار هذه المعطيات كنتائج ملاحظة على متغير عشوائي واحد؟ وبعبارة أخرى هل يمكن بثقة كافية اعتبار أن قانون توزيع الملاحظة لا يتغير من عينة لأخرى؟. إذا كان الجواب بنعم، فيقال أن المعطيات متجانسة (مأخوذة من مجتمع واحد). وإذا رمزنا بـ $F_i(x)$ لدالة توزيع المتغير الملاحظ ξ_i (المجتمع الذي سحبت منه العينة العشوائية رقم i)، حيث إن $i=1,2,...,k$، فعندئذٍ تصاغ فرضية العدم H_0 على النحو الآتي:

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x) = ... = F_k(x) \quad ; \quad x \in R$$

وتدعى بفرضية التجانس.

إذا كانت لدينا عينتان عشوائيتان مستقلتان $X=(X_1,...,X_m)$ و $Y=(Y_1,...,Y_n)$ مأخوذتان في وقتين مختلفين، أو بشكل عام، في ظروف مختلفة من مجتمع واحد، ونريد معرفة ما إذا كان التغير في الزمن أو في الظروف أثر على قانون توزيع المتغير العشوائي الملاحظ ξ. في هذه الحالة نتصور أن العينتين مأخوذتان من توزيعين احتماليين مختلفين $F_1(x)$ و $F_2(x)$ (من توزيع ξ_1 وتوزيع ξ_2) ونريد اختبار فرضية التجانس:

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x)$$

وبشكل مشابه، إذا كانت لدينا ثلاث عينات عشوائية مأخوذة في أزمنة مختلفة أو في ظروف مختلفة من مجتمع واحد ونريد اختبار تجانسها.

فمثلاً، لدراسة الفرق بين تأثيرات ثلاث طرق مختلفة في التدريس A_1, A_2, A_3 على مستوى الطالب. تؤخذ ثلاث عينات عشوائية مستقلة من مجتمع الطلبة وتطبق على كل عينة إحدى الطرق الثلاث المختلفة. وبعد امتحانات تحديد المستوى نحصل على ثلاث عينات عشوائية مشاهدة من المعدلات، يمكن اعتبار العينة الأولى المشاهدة مأخوذة من مجتمع ξ_1 والثانية من مجتمع ξ_2 والأخيرة من مجتمع ξ_3. فيصبح المطلوب اختبار هل

معدلات الطلبة في العينات الثلاث المشاهدة يمكن اعتبارها مأخوذة من مجتمع واحد ξ؟ أي اختبار فرضية العدم:

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x) = F_3(x) = F(x)$$

عند مستوى معنوية α. وهذا يعني، عند صحة فرضية العدم H_0 أن طرق التدريس المختلفة لا تعكس تأثيراً جوهرياً على مستوى الطالب.

ومثل هذه الفرضيات تصاغ في ميادين مختلفة: مراقبة جودة إنتاج باستخدام أسلوب المعاينة، مقارنة طرق تدريس مختلفة، مقارنة أنظمة مرور مختلفة، مقارنة آراء النساء والرجال في مجتمع ما حول قضية اجتماعية، مقارنة تأثير نوعين أو أكثر من المعالجات لموضوع معين، . . . الخ.

5.7 فرضية الاستقلال HYPOTHESIS OF INDEPENDENCE

نتيجة تجربة عشوائية E موصوفة بمتغير ذي بعدين $\xi = (\xi_1, \xi_2)$، دالة توزيعه $F_\xi(x,y)$ ويوجد أساس لافتراض أن المركبتين ξ_1 , ξ_2 مستقلتان. في هذه الحالة يجب اختبار فرضية الاستقلال التي تصاغ على النحو الآتي:

$$H_0 : F_\xi(x,y) = F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y) \quad ; \quad \forall (x,y) \in R^2$$

حيث إن $F_{\xi_1}(x)$ و $F_{\xi_2}(y)$ دالتا توزيع المتغيرين العشوائيين وحيدي البعد (حقيقيين) ξ_1 و ξ_2 على الترتيب، وذلك بناءً على عينة عشوائية بحجم n من أزواج القيم $((X_1,Y_1),...,(X_n,Y_n))$ مأخوذة على $\xi = (\xi_1, \xi_2)$.

فمثلاً، إذا كان $\xi = (\xi_1, \xi_2)$، بحيث ξ_1 = طول الطالب و ξ_2 = وزن الطالب، وكان لدينا عينة مشاهدة من أزواج القيم $((X_1,Y_1),...,(X_n,Y_n))$ مأخوذة على ξ، ونريد معرفة ما إذا كان المتغيران ξ_1 , ξ_2 مستقلين أم لا، أي اختبار فرضية الاستقلال

. $H_0 : F_\xi(x,y) \equiv F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(y)$

وبشكل عام يمكن اعتبار $\xi = (\xi_1,...,\xi_k)$ متغيراً عشوائياً ذا k بعد دالـــة توزيعـــه $F_\xi(x_1,...,x_k)$. وعندئذٍ فرضية استقلال المركبات $\xi_1,...,\xi_k$ تأخذ الشكل:

$$H_0 : F_\xi(x_1,...,x_k) = F_{\xi_1}(x_1)....F_{\xi_k}(x_k) \quad ; \quad \forall (x_1,...,x_k) \in R$$

حيث إن $F_{\xi_i}(x_i) ; i = 1,...,k$ دالة توزيع المتغير العشوائي وحيد البعد ξ_i .

إن حل غالبية المسائل الإحصائية في الميادين المختلفة يعتمد على معطيـــات عينـــة عشوائية أو أكثر. ومن شروط العينة العشوائية هو أن تكون مركباتها مســـتقلة. وهـــذا الشرط ليس بالضرورة محققاً في كل عينة مشاهدة. لذا يجب علينا التأكد من تحقق ذلـــك، وعندئذٍ إذا كانت لدينا العينة العشوائية $(X_1,....,X_n)$، فتصاغ فرضية الاستقلال علـــى النحو الآتي:

$$H_0 : F(x_1,...,x_k) = F_{X_1}(x_1)....F_{X_n}(x_n)$$

6.7 فرضية العشوائية HYPOTHESIS OF RANDOMIZATION

إن جميع طرق الاستدلال الإحصائي في التقدير واختبار الفرضيات المعلمية بنيـــت على افتراض أن العينات عشوائية. لكن في حالات عدة قد يكون هذا الافتراض غير محقق أو لدينا شك في صحته. وتظهر هذه الحالات بشكل خاص عندما نكون عاجزين كليـــاً أو جزئياً عن التحكم في سحب العينة. فمثلاً، في تقدير معدل الوفاة من مرض معـــين لا مفر من الاعتماد على سجلات سابقة وهذه لا تشكل عينة عشوائية بالمعنى الدقيق. كذلك الحال حين لا يكون لدينا خيار إلا الاعتماد على أي سجلات متاحة لإعطاء تنبؤات عـــن الأحوال الجوية أو دراسة حوادث المرور أو حين نأخذ وحدات صناعية بحسب ترتيـــب إنتاجها. في مثل تلك الحالات ينبغي أولاً اختبار عشوائية العينة.

نتيجة تجربة عشوائية E موصوفة بمتغير عشوائي ذو n بعد $X = (X_1,...,X_n)$، دالة توزيعه $F_X(x); x = (x_1,...,x_n)$ مجهولة. والتساؤل الآن: هل يمكن اعتبار $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع متغير عشوائي ما ξ؟، أي هل يمكن اعتبار المركبات $X_i; i = 1,...,n$ مستقلة ولها نفس توزيع المتغير العشوائي الملاحظ ξ؟. في هذه الحالة يجب اختبار الفرضية:

$$H_0 : F_X(x) = F_\xi(x_1)....F_\xi(x_n)$$

حيث إن $F_\xi(x)$ دالة توزيع وحيد البعد. تدعى هذه الفرضية بفرضية العشوائية.

لا تشتمل الفرضيات السابقة على كل أنواع الفرضيات الإحصائية اللامعلمية التي تبرز في التطبيق بل أهمها.

سنبحث في الفصول القادمة الطرق العامة لاختبار الفرضيات اللامعلمية الواردة أعلاه بالإضافة إلى فرضيات لامعلمية أخرى. وفي كل تلك الحالات تصاغ فرضية واحدة H_0 ويطلب اختبار فيما إذا كانت المعطيات التجريبية (معطيات العينة أو العينات العشوائية الملاحظة) متفقة مع هذه الفرضية أو تضحضها، لذا يدعى مثل تلك الاختبار بشكل عام باختبار التوافق.

إن المبادئ العامة لبناء الاختبارات اللامعلمية وخوارزمية الاختبار تبقى تطبيقياً هي ذاتها الواردة في اختبار الفرضيات المعلمية. أي أن اختبار الفرضيات اللامعلمية يتم على أساس إيجاد إحصاء اختبار توزيعه معلوم (تماماً أو تقريباً) عند صحة الفرضية H_0، ومن ثم مقارنة القيمة الملاحظة لهذا الإحصاء بالقيمة الحرجة (القيمة الجدولية). إذا كانت الفرضية H_0 تعين تماماً توزيع المتغير العشوائي الملاحظ فتدعى بالبسيطة، وخلاف ذلك بالمركبة. فمثلاً، في الفرضيات اللامعلمية السابقة تعتبر الفرضية $H_0 : F_\xi(x) = F_0(x)$ بسيطة، بينما الفرضيات الأخرى مركبة.

الفصل الثامن:

اختبار الفرضيات حول شكل التوزيع

لتكن $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع غير معلوم $\mathcal{L}(\xi)$ نرمز لدالة توزيعه بـ $F_\xi(x)$، وصيغت فرضية عدم بسيطة بشأنه:

$$H_0 : F_\xi(x) = F_0(x)$$

حيث إن $F_0(x)$ دالة توزيع معينة تماماً (لا تعتمد على معالم مجهولة).

لاختبار فرضية العدم H_0 هناك اختبارات عدة أشهرها اثنان هما: اختبار كالماغوروف Kolmogorov Test واختبار χ^2 Chi-square Test.

1.8 اختبار كالماغوروف لجودة التوفيق

KOLMOGOROV GOODNESS-OF-FIT TEST

يستخدم هذا الاختبار في الحالات التي تكون فيها دالة التوزيع المفترضة $F_0(x)$ (الفرضية المراد اختبارها) مستمرة. ويؤخذ المقدار:

$$T(X) = D_n = D_n(X) = \sup_{-\infty<x<\infty} \left|F_n^*(x) - F_0(x)\right| \qquad (1.1.8)$$

كإحصاء اختبار، الذي يمثل الانحراف الأعظمي (بالقيمة المطلقة) لدالة التوزيع التجريبي $F_n^*(x)$ عن دالة التوزيع المفترضة $F_0(x)$ على كامل فئة الأعداد الحقيقية R. وكما نعلم

عند كل عدد حقيقي $x \in R$ فإن $F_n^*(x)$ يعتبر تقديراً أمثل لـ $F_0(x)$ [راجع المبرهنة (2.6.5-I)]، وبازدياد حجم العينة العشوائية n يتقارب $F_n^*(x)$ من $F_0(x)$ [راجع نتيجة المبرهنة (4.14.3-I)]. وعليه عندما تكون n كبيرة إلى حد ما وفرضية العدم H_0 صحيحة فإن قيمة الإحصاء D_n يجب أن لا تختلف جوهرياً عن الصفر [راجع المبرهنة (5.14.3-I)]. وبالتالي منطقة الرفض الموافقة للاختبار المؤسس على الإحصاء $D_n(X)$ تعطى بالشكل:

$$\Im_{1\alpha} = \{t : t = D_n(x) \geq \lambda_\alpha\} \qquad (2.1.8)$$

ويتعين الثابت $\lambda = \lambda_\alpha$، عند مستوى معنوية α، بمعرفة التوزيع الاحتمالي لإحصاء الاختبار $T(X) = D_n(X)$، عند صحة فرضية العدم H_0.

يتمتع إحصاء الاختبار $D_n(X)$ بالخاصتين الهامتين التاليتين:

1. توزيع الإحصاء $D_n(X)$، عند صحة فرضية العدم H_0، مستقل عن شكل دالة التوزيع $F_0(x)$، أي مستقل عن توزيع المجتمع الذي سحبت منه العينة X، وهذا يعني أن الإحصاء $D_n(X)$ حر التوزيع [راجع المبرهنة (11.14.3-I) وما يليها مباشرة].

   وهذه الخاصة لها أهمية كبيرة، لأن ذلك يسمح بحساب وجدولة توزيع الإحصاء $D_n(X)$ مرة واحدة، وبشكل خاص من أجل عينات عشوائية مأخوذة من التوزيع المنتظم $R(0,1)$، واستعماله لاختبار فرضية حول دالة توزيع مستمرة.

2. إن توزيع الإحصاء $D_n(X)$ عندما تكون n كبيرة $(n \geq 20)$ مستقل عملياً عن n ويعطى بالعلاقة [راجع المبرهنة (6.14.3-I)]:

$$P(D_n \in \Im_{1\alpha} | H_0) = P(\sqrt{n} D_n \geq z_\alpha | H_0) \approx \alpha = 1 - K(z_\alpha) = 1 - e^{-2z_\alpha^2} \qquad (3.1.8)$$

حيث إن $K(z)$ دالة توزيع كالماغوروف.

بناءً على الخاصتين (1 ، 2) أعد جدولاً خاصاً يعطي قيم $\lambda_\alpha = \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$ الموافقة لبعض قيم α الأكثر استخداماً في التطبيقات الإحصائية وقيم n المختلفة، ويدعى بجدول اختبار كالماغوروف (الملحق، الجدول 5) نسبة للعالم الروسي كالماغورروف الذي بنى الاختبار (2.1.8) ووضع الجدول المذكور.

وبتعيين قيمة λ_α المحققة للعلاقة:

$$P(D_n \geq \lambda_\alpha) = \alpha$$

نحصل على اختبار جودة التوفيق (2.1.8).

ومن الطبيعي عند استخدام التوزيع المقارب لـ $D_n(X)$، فإن:

$$P\left(D_n(X) \geq \lambda_\alpha\right) \approx \alpha \qquad (4.1.8)$$

وعلى ذلك، إذا كانت $t = D_n(x) \geq \lambda_\alpha$ نرفض فرضية العدم H_0.

يمكن مما سبق إيجاز خوارزمية إجراء اختبار كالماغورروف لجودة التوفيق على النحو الآتي:

1. نقوم بترتيب مفردات العينة المشاهدة $x = (x_1, ..., x_n)$ تصاعدياً، أي بناء المتسلسلة العددية $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq ..... \leq x_{(n)}$.

2. توجد -بشكل عام- قيم مشاهدة مكررة (القيم المشاهدة ليست كلها مختلفة) ولنفترض أن هنالك $k < n$ قيمة مختلفة نرمز لها بـ $z_i ; i = 1, ..., k$، بحيث إن $z_1 < z_2 < .... < z_k$. ومن ثم نقسم مدى المتغير العشوائي الملاحظ ξ وفق الفئات المانعة بالتبادل $(-\infty, z_1], ..., (z_k, +\infty)$، أو أي فئات مانعة أخرى.

3. نعين قيم دالة التوزيع F_0 وكذلك F_n^* عند الحدود العليا للفئات المانعة بالتبادل الواردة في (2)، ثم نحسب الفروقات المطلقة $\left|F_n^*(z) - F_0(z)\right|$ ونعين أكبرها، فنحصل بذلك على القيمة الملاحظة للإحصاء $D_n(X)$، أي $t = D_n(x)$.

4. نعين من جدول اختبار كالماغوروف قيمة λ الموافقة لمستوى المعنوية (الدلالة) المتخذ α وحجم العينة العشوائية المشاهدة n، أي λ_α.

5. نرفض الفرضية $H_0 : F(x) \equiv F_0(x)$، إذا كانت $t \geq \lambda_\alpha$ ونقبلها عندما تكون $t < \lambda_\alpha$.

نلاحظ أن إحصاء الاختبار $D_n(X)$ يزداد بازدياد انحراف قيمة $F_0(x)$ عن $F_n^*(x)$ من أي جانب (يميناً أو يساراً)، لذلك فالفرضية البديلة H_1 لفرضية العدم H_0 هي من الشكل $H_1 : F_0(x) \neq F(x)$ (فرضية ذات جانبين).

مثال 1.1.8

لتكن لدينا العينة العشوائية المشاهدة:

$$x = (0.2 , 3 , 0.3 , 0.2 , 4 , 1 , 0.5 , 3.6 , 1.2 , 5)$$

من مجتمع ما توزيعه $\mathcal{L}(\xi)$ غير معلوم. هل يمكن اعتبار أن هذا المجتمع يخضع للتوزيع الأسي:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-x/2} \quad ; \quad x > 0$$

عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

إن فرضية العدم H_0 في هذه الحالة تصاغ على النحو الآتي:

$$H_0 : F_\xi(x) = F_0(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/2} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

لاختبار هذه الفرضية نتبع الخطوات الواردة أعلاه:

نرتب مفردات العينة المشاهدة تصاعدياً فنحصل على العينة المرتبة:

(0.2 , 0.2 , 0.3 , 0.5 , 1.2 , 1.2 , 3 , 3.6 , 4 ,5)

ثم نحسب قيم $F_n^*(x)$ و $F_0(x)$ عند المفردات المختلفة، وبعد ذلك نحسب الفروقات المطلقة $\left| F_n^*(x) - F_0(x) \right|$ فنحصل بالنتيجة على الجدول (1.1.8).

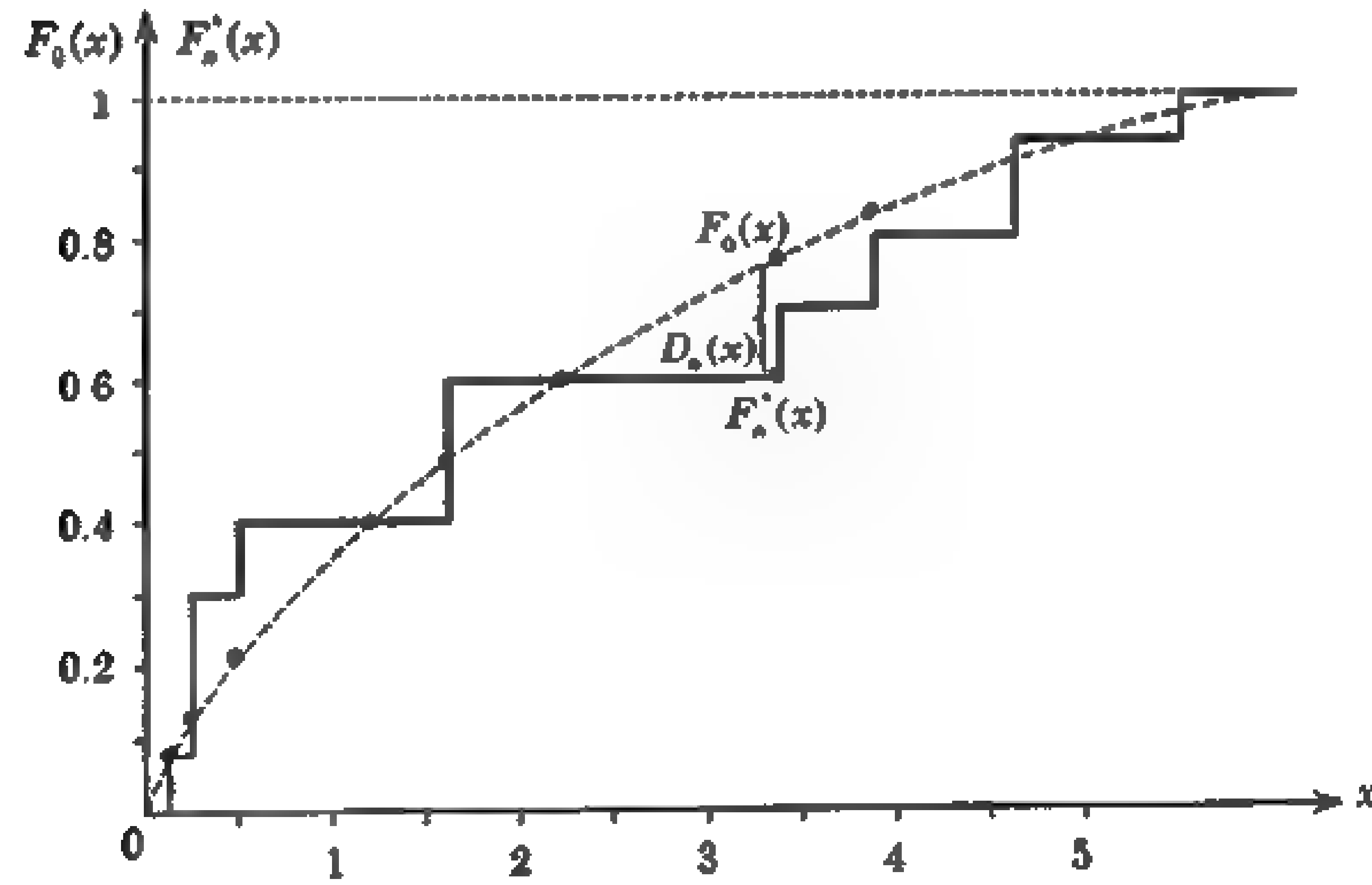
جدول (1.1.8)

x	$F_n^*(x)$	$F_0(x)$	$\lvert F_n^*(x)-F_0(x)\rvert$
0.2	0	0.09	0.09
0.3	0.2	0.14	0.06
0.5	0.3	0.22	0.08
1.0	0.4	0.34	0.01
1.2	0.4	0.45	0.05
3.0	0.6	0.78	0.18
3.6	0.7	0.83	0.13
4.0	0.8	0.86	0.06
5.0	0.9	0.92	0.02

نلاحظ من الجدول (1.1.8) أن:

$$t = D_n(x) = \sup_x \lvert F_n^*(x) - F(x) \rvert = 0.18$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة إذا مثلنا كل من $F_n^*(x)$ و $F_0(x)$ بيانياً كما هو مبين على الشكل (1.1.8).



الشكل (1.1.8)

ومن جدول اختبار كالماغـــوروف (الملحق، جدول 5)، عنـــدما $n=10$ و $\alpha=0.05$،
نجد أن $\lambda_\alpha = 0.409$، أي أن $D_n(x) = 0.18 < \lambda_\alpha^*$، وبالتالي نقبل الفرضية H_0.

مثـــال 2.1.8

لدراسة متانة نوع معين من البيتون المسلح أخذت عينة عشوائية من 200 نمـــوذج فكانت نتائج قياس المتانة (ميجا باسكال) كما هي واردة في الجدول (2.1.8).

جدول (2.1.8)

فترات المتانة $[x_i, x_{i+1})$	التكرار (m_i)	التكرار النسبي (m_i/n)
19 – 20	10	0
20 – 21	26	0.1
21 – 22	56	0.2
22 – 23	64	0.3
23 – 24	30	0.15
24 – 25	14	0

نلاحظ من خلال التمثيل البياني للمدرج والمضلع التكراري للمعطيات الـــواردة في الجدول (2.1.8) [أنظر الشكل (I-3.4.3)] أن توزيع المتانة ξ يذكرنا بالتوزيع الطبيعـــي العام $N(\theta_1, \theta_2^2)$، لذا يمكن تقديم افتراض أن توزيع المتغير العشوائي الملاحظ ξ ينتمـــي لعائلة التوزيعات الطبيعية.

بما أن حجم العينة كبير بكفاية $(n=200)$ نأخذ متوسط وتباين العينة المشاهدة:

$$\bar{x} = 22.1 \quad , \quad s^2 = (1.233)^2 \approx 1.52$$

كتقديرين جيدين للمعلمتين θ_1, θ_2^2 على الترتيب.

ليكن المطلوب الآن اختبار فرضية العدم:

$$H_0 : \mathcal{L}(\xi) = N(22.1,1.52)$$

عند مستوى معنوية $\alpha = 0.10$.

كل العمليات المساعدة الضـــرورية لإيجاد القيمة الملاحظة $t = D_n(x)$ لإحصـــاء الاختبار $D_n(X)$ واردة في الجدول (3.1.8).

جدول (3.1.8)

فترات المتانة $[x_i, x_{i+1})$ ميجاباسكال	التكرار النسبي $\frac{m_i}{n}$	الفترات $[u_i ; u_{i+1})$; $u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$	قيم دالة التوزيع التجريبي $F_n^*(x_{i+1})$	قيم دالة التوزيع $F_0(x_{i+1}) = \Phi(u_{i+1})$	$\|F_n^*(x) - F_0(x)\|$
< 19	0.00	(−∞;−2.51)	0.00	0.006	0.006
[19;20)	0.05	[−2.51;−1.70)	0.05	0.045	0.005
[20;21)	0.13	[−1.70;−0.89)	0.18	0.187	0.007
[21;22)	0.28	[−0.89;−0.08)	0.46	0.468	0.008
[22;23)	0.32	[−0.08;0.73)	0.78	0.767	0.013
[23;24)	0.15	[0.73;1.54)	0.93	0.938	0.008
[24;25)	0.07	[1.54;2.61)	1.00	1.00	0.000
≥ 25	0.00	[2.61,+∞)	1.00	1.00	0.000

حيث إن $\Phi(.)$ دالة التوزيع الطبيعي المعياري.

نلاحظ من العمود الأخير أن:

$$t = D_n(x) = \sup_x \left| F_n^*(x) - F_0(x) \right| = 0.013$$

ومـــن جـــدول اختبار كالماغوروف (الملحق، جدول 5) عندما تكـــون $n = 200$ و $\alpha = 0.10$، نجد أن $\lambda_\alpha = 1.22/\sqrt{200} = 0.086$، وبما أن $t = 0.013 < \lambda_\alpha = 0.086$ نقبل فرضية العدم H_0 .

2.8 اختبار χ^2 بيرسون لجودة التوفيق

PEARSON'S CHI-SQUARE GOODNESS-OF-FIT TEST

لاحظنـــا في البند السابق (1.8) أن اختبار كالماغوروف يقتصر تطبيقه على تلـــك الحالات التي يكون فيها التوزيع المفترض $F_0(x)$ (التوزيع المراد اختبار صحته) للمتغـــير العشوائي الملاحظ ξ وحيد البعد مستمر. هذا بالإضافة إلى أن حساب القيمة الملاحظـة t لإحصاء الاختبار $D_n(X)$ في حالات عدة مسألة صعبة. لذا غالباً يستخدم اختبار آخـــر لجودة التوفيق يدعى باختبار χ^2 (اختبار χ^2 بيرسون). ويمكن استعماله من أجل اختبـــار أي توزيع مفترض مستمراً كان أم منقطعاً وحتى متعدد الأبعاد. وتطبيق اختبار χ^2 يتطلب تصنيف (تبويب) معطيات العينة العشوائية، وهذا يتم على النحو الآتي:

ليكن ξ المتغير العشوائي الملاحظ و Ω_ξ فئة القيم الممكنة له (فضـــاء ξ)، ولتكـــن $X=(X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع احتمالي غير معلوم $\mathcal{L}(\xi)$. نجزئ الفضـــاء Ω_ξ إلى k فئة جزئية مانعة بالتبـــادل $\zeta_1,\dots,\zeta_k$ $\left(\Omega_\xi=\zeta_1\cup\dots\cup\zeta_k\,;\,\zeta_i\cap\zeta_j=\Phi\,,\,i\neq j\right)$ ولنرمز بـــ υ_j لعدد عناصر العينة X الواقعة في الفئة ζ_j (تكرار الفئة ζ_j)، أي أن:

$$\upsilon_j=\left|\{i:X_i\in\zeta_j\}\right| \quad ; \quad j=1,\dots,k \ , \ \sum_1^k \upsilon_j=1$$

فنحصل بذلك على التوزيع التكراري $\{(\zeta_j,\upsilon_j)\,;\,j=1,\dots,k\}$. وهذا يعني الانتقـــال إلى تمثيل تكراري للمعطيات الأولية (معطيات العينة) وأن $\upsilon=(\upsilon_1,\dots,\upsilon_k)$ متجه التكـــرارات لوقوع مفردات العينة X في الفئات الجزئية الموافقة $\zeta_j\subset\Omega_\xi$.

إذا رمزنا بـــ p_j لاحتمال وقوع المتغير العشوائي ξ في الفئة الجزئية ζ_j، أي أن:

$$p_j=P(\xi\in\zeta_j)=\int_{\zeta_j} dF_\xi(x) \quad ; \quad j=1,\dots,k \ , \ \sum_1^k p_j=1 \ , \ 0<p_j<1$$

فإن:

$$p_{j0} = P(\xi \in \zeta_j | H_0) = \int_{\zeta_j} dF_0(x) \quad ; \quad j = 1,...,k \ , \ \sum_1^k p_{j0} = 1 \ , \ 0 < p_{j0} < 1$$

ومن ثم $p_0 = (p_{10},..., p_{k0})$ متجه احتمالات وقوع المتغير العشوائي ξ في الفئات الجزئية $\zeta_1,...,\zeta_k$، عند صحة الفرضية H_0.

في هذه الحالة المتغير العشوائي $v = (v_1,...,v_k)$ يخضع للتوزيع الاحتمالي متعدد الحدود $M(v, P)$، دالة احتماله:

$$f(h_1,...,h_k; p_1,..., p_k) = \frac{n!}{h_1!...h_k!} p_1^{h_1}....p_k^{h_k} \quad ; \quad \sum_1^k h_j = n$$

حيث إن $v(x) = h = (h_1,...,h_k)$ القيمة الملاحظة للمتغير العشوائي v عند العينة المشاهدة $x = (x_1,...,x_n)$.

ومن الواضح أن المتغير العشوائي $v_j ; j = 1,...,k$ يخضع لتوزيع ذي الحدين $B(n; p_j)$، وبالتالي القيمة المتوقعة لـ v_j (التكرار المتوقع Expected frequency) هي $E(v_j) = np_j$، ومن ثم التكرار المتوقع، عند صحة فرضية العدم H_0، يكون $E(v_j | H_0) = np_{j0}$.

مما سبق يمكننا إعادة صياغة فرضية العدم:

$$H_0 : F_\xi(x) \equiv F_0(x)$$

على النحو الآتي:

$$H_0 : \mathcal{L}(v) = M(n, p_0) \quad ; \quad p_0 = (p_{10},..., p_{k0})$$

أو:

$$H_0 : p_1 = p_{10},...., p_k = p_{k0}$$

وعندئذٍ يؤخذ المقدار:

$$X_n^2 = X_n^2(v) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(v_j - np_{j0})^2}{np_{j0}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j^2}{np_{j0}} - n \qquad (1.2.8)$$

كإحصاء اختبار، الذي يصف انحرافات معطيات العينة العشوائية (التكرارات v_j) عن القيم الفرضية الموافقة (التكرارات المتوقعة عند صحة الفرضية H_0)، أي عن القيم المتوقعة $E(v_j|H_0) = np_{j0}$. ومن الواضح أن القيم الكبيرة للإحصاء X_n^2 دليل على عدم صحة الفرضية H_0 وبالتالي تكون منطقة الرفض من الشكل:

$$G_1 = \{x : X_n^2(h) \ge c\} \quad ; \quad h = (h_1, ..., h_k) \ , \ n = \sum_1^k h_j \qquad (2.2.8)$$

وبمعرفة توزيع الإحصاء X_n^2 يمكن تعيين الثابت c الموافق لمستوى معنوية معطى α، ونرمز له بـ c_α. إن اشتقاق توزيع $X_n^2(v)$ ليس سهلاً، لكن بازدياد حجم العينة العشوائية n فإن توزيعه يقترب من التوزيع χ^2 بـ $(k-1)$ درجة حرية ومستقل عن فرضية العدم H_0، أي أن $X_n^2(v)$ حر التوزيع عندما تكون n كبيرة، ويخضع لتوزيع $\chi^2_{(k-1)}$ مهما يكن توزيع المتغير العشوائي الملاحظ ξ [راجع المبرهنة (2.3.5)].

يمكن تطبيقياً استخدام توزيع $\chi^2_{(k-1)}$ كتقريب جيد لتوزيع الإحصاء $X_n^2(v)$ عندما يكون حجم العينة العشوائية $n \ge 50$ و $v_j \ge 5 ; j = 1,...,k$. وعند تحقق تلك الشروط يؤخذ الحد الحرج c في (2.2.8) مساوٍ لـ $\chi^2_{\alpha;k-1}$، وهذا الأخير يمكن تعيينه، بمعرفة درجات الحرية $(k-1)$ ومستوى المعنوية α، واستخدام جدول توزيع χ^2 (الملحق، جدول 4). وبالتالي يصبح اختبار χ^2 من أجل فرضية العدم H_0، عند مستوى معنوية α، معطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha} = \{x : X_n^2(h) \ge \chi^2_{\alpha;k-1}\} \quad ; \quad h = (h_1, ..., h_k) \ , \ n = \sum_1^n h_j \qquad (3.2.8)$$

بناءً على ما سبق يمكن إيجاز خوارزمية اختبار χ^2 لجودة التوفيق على النحو الآتي:

1. تؤخذ عينة عشوائية $x = (x_1, ..., x_n)$ من توزيع $\mathcal{L}(\xi)$، حيث إن التوزيع الاحتمالي $\mathcal{L}(\xi)$ غير معلوم.

2. تبوب أو تصنف معطيات العينة المشاهدة x حسب الفئات الجزئية المانعة بالتبادل $\zeta_1,...,\zeta_k$ (تجزئة لــ Ω_ξ).

3. حساب القيمة الملاحظة لمتجه التكرارات $h=(h_1,...,h_k)$ (القيمة الملاحظة لـــ $v=(v_1,...,v_k)$).

4. حساب القيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار $X_n^2(v)$، أي $X_n^2(h)$.

5. إيجاد القيمة الحرجة $\chi^2_{\alpha;k-1}$ الموافقة لــ $(k-1)$ درجة حرية ومستوى معنوية α من جدول توزيع χ^2.

6. بمقارنة القيمة الملاحظة $X_n^2(h)$ بــ $\chi^2_{\alpha;k-1}$ نتخذ أحد قرارين:

أ. عندما $X_n^2(h)\geq\chi^2_{\alpha;k-1}$ نرفض الفرضية H_0.

ب. عندما $X_n^2(h)<\chi^2_{\alpha;k-1}$ نقبل الفرضية H_0.

سنقدم الآن بعض الملاحظات العامة لاختبار χ^2 لجودة التوفيق.

يستخدم اختبار χ^2 لاختبار جودة التوفيق، بشكل عام، في الحالات التي نكون فيها أمام n تكراراً مستقلاً، تحت نفس الشروط، لتجربة مفروضة، وكل تكرار ينتهي إلى واحدة من الحوادث المانعة بالتبادل $A_1,...,A_k$ وتكراراتها ضمن الــ n محاولة معلومة أو يمكن إيجادها بسهولة، ويقال عندئذٍ أن المتغير العشوائي الملاحظ η منقطع ويفترض القيم $\eta=\eta(A_j)=j\,;\,j=1,...,k$. وإذا كانت العينة المشاهدة x من توزيع مستمر $\mathcal{L}(\xi)$ فباستخدام طريقة تبويب المعطيات الأولية $x_1,...,x_n$ يؤول البحث في منظومة منقطعة، وعندئذٍ تؤخذ الحوادث:

$$A_j=\{\xi\in\zeta_j\}\quad;\quad j=1,...,k$$

حيث إن $\zeta_1,...,\zeta_k$ فترات التبويب. ومن سلبيات هذه الطريقة هي أن تجميع المعطيات حسب الفئات يؤدي إلى فقدان أو خسارة بعض المعلومات المتوفرة في العينة المشاهدة $x=(x_1,...,x_n)$، بالإضافة لذلك يبقى السؤال حول عدد الفئات k ومن ثم أطوالها.

على الرغم من تلك السلبيات لاختبار χ^2 لجودة التوفيق فإنه يتمتع بميزات إيجابية أهمها اثنان هما:

أولاً: تطبيقه لا يطلب بالضرورة أن تكون نتائج التجربة أو المحاولة أو التكرار كمية، ولهذه الميزة أهمية كبيرة لأن المعطيات الإحصائية في حالات عدة نوعية وليست كمية (عددية).

ثانياً تتمثل أفضلية هذه الطريقة دون أدنى شك في عموميتها من الناحية التطبيقية (المجتمع قيد الدراسة مستمر أو منقطع، النتائج كمية كانت أم نوعية).

نورد فيما يلي بعض الأمثلة لتطبيق اختبار χ^2 لجودة التوفيق.

مثـــال 1.2.8

عند رمي قطعة نقود معدنية $n = 4040$ مرة، تحت نفس الشروط، حصل العالم بافون على الشعار (الصورة) $h_1 = 2048$ مرة وعلى الرقم $h_2 = n - h_1 = 1992$ مرة. هل يمكن اعتبار أن قطعة النقود هذه متجانسة عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

هنا فرضية العدم H_0 "قطعة النقود متجانسة"، أي أن:

$$H_0 : p = p_{10} = 0.5 \quad , \quad p_2 = p_{20} = 1 - p_{10} = 0.5$$

وكل تكرار ينتهي إلى أحد الحادثين:

A_1 : ظهور الشعار (الصورة).

A_2 : ظهور الرقم.

أي أن التجربة موصوفة بالمتغير العشوائي $\eta : \eta(A_j) = j \,;\, j = 1,2$، ومن ثم:

$$P(\eta = 1 | H_0) = P(A_1 | H_0) = p_{10} = 0.5 \quad , \quad P(A_2 | H_0) = p_{20} = 0.5 \quad , \quad k = 2$$

وعلى ذلك القيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار $X_n^2(v)$:

$$X_n^2(h)=\frac{(h_1-np_{10})^2}{np_{10}}+\frac{(h_2-np_{20})^2}{np_{20}}=$$

$$=\frac{(2048-2020)^2}{2020}+\frac{(1992-2020)^2}{2020}=0.776$$

ومن جدول توزيع χ^2 نجد القيمة الحرجة الموافقة لدرجة حرية $(k-1)=1$ ومستوى معنوية $\alpha=0.05$ تساوي $\chi^2_{0.05;1}=3.841$. وبما أن:

$$0.776=X_n^2(h)<\chi^2_{0.05;1}=3.841$$

فإننا نقبل فرضية العدم H_0 ، أي أن قطعة النقود المستعملة متجانسة.

مثال 2.2.8

ألقي حجر نرد 420 مرة تحت نفس الشروط، فكانت النتائج الملاحظة على النحو الآتي (ξ = عدد النقاط الظاهرة في الرمية الواحدة):

عدد النقاط الظاهرة ξ	1	2	3	4	5	6
التكرارات المشاهدة h_j	64	72	56	80	78	70

هل يمكن اعتبار حجر النرد هذا متجانساً عند مستوى معنوية $\alpha=0.01$؟

في هذه المسألة $A_j=\{\xi=j\};\ j=1,\dots,6$ وفرضية العدم:

$$H_0: p=p_0=(p_{10},\dots,p_{60})=\left(\frac{1}{6},\dots,\frac{1}{6}\right)$$

بافتراض صحة الفرضية H_0 نحصل على الجدول الآتي:

عدد النقاط الظاهرة A_j	1	2	3	4	5	6
التكرارات المشاهدة h_j	64	72	56	80	78	70
التكرار المتوقع (عند صحة الفرضية H_0) np_{j0}	70	70	70	70	70	70
$\lvert h_j-np_{j0}\rvert$	6	2	14	10	8	0

وعليه القيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار $X_n^2(v)$:

$$X_n^2(h)=\sum_{j=1}^{6}\frac{(h_j-np_{j0})^2}{np_{j0}}=\frac{1}{70}(36+4+196+100+64+0)=\frac{400}{70}=5.714$$

وبما أن القيمة الحرجة $\chi^2_{0.01;5}=15.086$ فإن $X_n^2(h)<\chi^2_{0.01,5}$، وبالتالي نقبل الفرضية H_0، أي أن حجر النرد متجانس.

مثال 3.2.8

نتيجة رصد عدد حوادث المرور على إحدى الطرق خلال 100 أسبوع، أخذت عشوائياً، كانت على النحو الآتي:

عدد الحوادث الأسبوعية A_j	0	1	2	3	4	5	≥ 6
عدد الأسابيع	35	30	14	8	6	5	2

إذا رمزنا بـ ξ لعدد حوادث المرور على تلك الطرق في الأسبوع $(A_j=\{\xi=j-1\};\, j=1,\ldots,6\,,\, A_7=\{\xi\geq 6\})$، فهل يمكن اعتبار هذا المتغير خاضعاً لتوزيع بواسون بمتوسط 1.5 حادثة في الأسبوع عند مستوى معنوية $\alpha=0.10$؟

هنا فرضية العدم:

$$H_0: f_\xi(x)=f_0(x)=\frac{(1.5)^x}{x!}e^{-1.5}\quad ;\quad x=0,1,\ldots$$

وبفرض صحة الفرضية H_0 نحصل على الجدول الآتي:

عدد الحوادث الأسبوعية A_j	0	1	2	3	4	5	≥ 6
التكرارات المشاهدة h_j	35	30	14	8	6	5	2
$p_{j0}=P(\xi\in A_j \mid H_0)$	0.223	0.335	0.251	0.126	0.047	0.014	0 004
التكرارات المتوقعة np_{j0}	22.3	33.5	25.1	12.6	4.7	1.4	0.4

نلاحظ أن التكرار المشاهد $h_7 = 2 < 5$ (التكرار المشاهد الأخير). لكن كما أشرنا سابقاً من شروط تطبيق اختبار χ^2 هو $h_j \geq 5 \,;\, j = 1,...,k$، لذا ندمج الفئة الأخيرة مع الفئة السابقة لها فنحصل على الجدول ($A_j = \{\xi = j-1\} \,;\, j = 1,...,5 \,,\, A_6 = \{\xi \geq 5\}$):

A_j عدد الحوادث الأسبوعية	0	1	2	3	4	≥ 5
h_j التكرارات المشاهدة	35	30	14	8	6	7
$p_{j0} = P(\xi \in A_j \mid H_0)$	0.223	0.335	0.251	0.126	0.047	0.018
np_{j0} التكرارات المتوقعة	22.3	33.5	25.1	12.6	4.7	1.8
$\lvert h_j - np_{j0} \rvert$ الفروقات المطلقة	12.7	3.5	11.1	4.6	1.3	5.2

وبالتالي القيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار:

$$X_n^2(h) = \sum_{j=1}^{6} \frac{(h_j - np_{j0})^2}{np_{j0}} =$$

$$= \frac{(12.7)^2}{22.3} + \frac{(3.5)^2}{33.5} + \frac{(11.1)^2}{25.1} + \frac{(4.6)^2}{12.6} + \frac{(1.3)^2}{4.7} + \frac{(5.2)^2}{1.8} =$$

$$= 7.23 + 0.37 + 4.91 + 1.68 + 0.36 + 15.02 = 29.57$$

ومن جدول توزيع χ^2 نجد القيمة الحرجة الموافقة لـ $k - 1 = 6 - 1 = 5$ درجة حرية ومستوى معنوية $\alpha = 0.10$ هي $\chi^2_{0.10;5} = 9.236$. وبما أن $X_n^2(h) > \chi^2_{0.10;5}$ نرفض الفرضية H_0، أي أن عدد الحوادث الأسبوعية على الطريق المحدد لا يخضع لتوزيع بواسون $\Pi(1.5)$.

مثال 4.2.8

في إحدى معارض الساعات، أخذت عينة عشوائية من 500 ساعة ولوحظ الوقت عليها، فكانت النتائج على النحو الآتي:

A_j الفترة الزمنية	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	≥ 11
h_j التكرار	41	34	54	39	49	45	41	33	37	41	47	39

هل يمكن القول إن الوقت الملاحظ ξ يتبع التوزيع المنتظم $R(0,12)$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

هنا $A_j = [j-1, j)\ ;\ j = 1,....,11\ , A_{12} = \{\xi \geq 11\}$ وفرضية العدم:

$$H_0 = p_j = p_{j0} = \frac{1}{12} \quad ; \quad p_j = P(A_j)\ ;\ j = 0,...,12$$

وبفرض صحة الفرضية H_0 نحصل على الجدول:

A_j	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7	7-8	8-9	9-10	10-11	≥ 11
h_j	41	34	54	39	49	45	41	33	32	41	47	39
np_{j0}	41.17	41.17	41.17	41.17	41.17	41.17	41.17	41.17	41.17	41.17	41.17	41.17
$\lvert h_j - np_{j0} \rvert$	0.17	7.17	12.83	2.17	7.83	3.83	0.17	8.17	4.17	0.17	5.83	2.17

والقيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار:

$$t = X_n^2(h) = \sum_{j=1}^{12} \frac{(h_j - np_{j0})^2}{np_{j0}} = 0.00 + 1.25 + 4.00 + 0.11 + 1.49 + 0.36 + 0.00 +$$
$$+ 1.62 + 0.42 + 0.00 + 0.83 + 0.11 = 10.19$$

ومن جدول توزيع χ^2 بـــ $k-1 = 12-1 = 11$ درجة حرية نجد القيمة الحرجــــة الموافقة لمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ تساوي $\chi^2_{0.05,11} = 19.675$. وبما أن $t < \chi^2_{0.05,11}$ نقبل الفرضية H_0. وهذا يعني وجود توافق جيد بين المعطيات المشاهدة والمفترضــــة، أي أن الوقت الملاحظ ξ يخضع للتوزيع المنتظم $R(0,12)$.

السلوك التقاربي لدالة قوة اختبار χ^2

يمكن دراسة السلوك التقاربي لدالة قوة اختبار χ^2، عندما $n \to \infty$، من أجل أي بديل $F(x) \neq F_0(x)$.

نلاحظ مما سبق أن فرضية العدم H_0 تخص متجه الاحتمالات $p = (p_1, ..., p_k)$ لوقوع الحوادث $A_1, ..., A_k$ في كل تكرار (أو محاولة)، لذا سنرمز لدالة قوة الاختبار χ^2 بـ $W(p)$ ولفرضية العدم بـ p_0. وللإشارة إلى علاقة دالة القوة بحجم العينة نكتب $W_n(p)$.

لدراسة الخواص التقاربية لاختبار χ^2 (سلوك دالة القوة عندما $n \to \infty$)، يجب الإجابة أولاً وقبل كل شيء على السؤال: هل يعتبر الاختبار متسقاً؟

يدعى الاختبار χ^2 بالمتسق إذا حقق الشرط:

$$\lim_{n \to \infty} W_n(p) = 1 \quad ; \quad \forall\, p \in H_1$$

وهذا يعني أنه بازدياد حجم العينة n يمكن باحتمال قريب من الواحد إدراك أي انحرافات عن فرضية العدم H_0. وعليه الاختبار المتسق غير متحيز بالتقارب.

مبرهنة 1.2.8

من أجل أي متجه $p \neq p_0$ فإن:

$$\lim_{n \to \infty} W(p) = 1$$

أي أن اختبار χ^2 متسق.

الإثبات

لنحسب متوسط وتباين إحصاء الاختبار $X_n^2(v)$، عند الفرضية p. لذلك نكتب إحصاء الاختبار $X_n^2(v)$ المعرف بالصيغة (1.2.8) على الصورة:

$$X_n^2(v)=\sum_{j=1}^{k}\frac{(v_j-np_j)^2}{np_{j0}}+2\sum_{j=1}^{k}\frac{(v_j-np_j)(p_j-p_{j0})}{p_{j0}}+n\sum_{j=1}^{k}\frac{(p_j-p_{j0})^2}{p_{j0}}$$

بما أن:

$$E(v_j|p)=np_j \quad , \quad E\left[(v_j-np_j)^2|p\right]=\text{var}(v_j|p)=np_j(1-p_j)$$

[لأن v_j يتبع التوزيع $B(n,p_j)$]، فإن:

$$E\left(X_n^2|p\right)=n\sum_{j=1}^{k}\frac{(p_j-p_{j0})^2}{p_{j0}}+\sum_{j=1}^{k}\frac{p_j(1-p_j)}{p_{j0}} \qquad (4.2.8)$$

ومن ثم، عندما $p=p_0$ نجد:

$$E\left(X_n^2(v)|p_0\right)=0+\sum_{j=1}^{k}(1-p_{j0})=k-1$$

وهـذه النتيجة تتفق تمـاماً مع التـوزيع المقارب [المبرهنة (2.3.5)]، حيث إن التوزيع المقارب لـ $X_n^2(v)$ هو $\chi^2_{(k-1)}$، ومتوسط التوزيع $\chi^2_{(k-1)}$ كما هـو معلـوم يسـاوي $(k-1)$ [انظر العلاقة (32.3.2-I)].

سنقدم الآن بدون إثبات صيغة التباين:

$$\text{var}\left(X_n^2(v)|p\right)=4\frac{(n-1)(n-2)}{n}(R_{32}-R_{21}^2)+$$
$$+2\frac{n-1}{n}(3R_{22}-2R_{21}R_{11}-R_{21}^2)+\frac{1}{n}(R_{12}-R_{11}^2) \qquad (5.2.8)$$

حيث إن:

$$R_{ls}=\sum_{j=1}^{k}\frac{p_j^l}{p_{j0}^s}$$

وعند صحة الفرضية H_0، أي أن $p_j=p_{j0}\,;\,j=1,\dots,k$، فإن:

$$R_{ls}=\sum_{j=1}^{k}(p_{j0})^{l-s}$$

وبالتالي:

$$R_{11} = R_{22} = k \quad , \quad R_{21} = R_{32} = \sum_{j=1}^{k} p_{j0} = 1 \quad , \quad R_{12} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_{j0}}$$

وعليه تكتب الصيغة (5.2.8) على النحو الآتي:

$$\operatorname{var}\left(X_n^2(v)\middle|p_0\right) = 2(k-1) + \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p_{j0}} - k^2 - 2k + 2\right)$$

وبأخذ نهاية الطرفين، عندما $n \to \infty$، نجد:

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{var}\left(X_n^2\middle|p_0\right) = 2(k-1)$$

وهذه النتيجة عبارة عن تباين التوزيع $\chi^2_{(k-1)}$.

لنفترض الآن p أي متجه من الاحتمالات المحقق للشرط $p \neq p_0$، عندئذٍ:

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{(p_j - p_{j0})^2}{p_{j0}} > 0$$

من العلاقتين (4.2.8) و (5.2.8) وبناءً على متباينة تشيبيشف نجد:

$$\begin{aligned}
1 - W_n(p) &= P\left(X_n^2 < \chi^2_{\alpha,k-1}\middle|p\right) \\
&= P\left[E\left(X_n^2\middle|p\right) - X_n^2 > E\left(X_n^2\middle|p\right) - \chi^2_{\alpha;k-1}\middle|p\right] \le \\
&\le P\left[\left|E\left(X_n^2\middle|p\right) - X_n^2\right| > \left|E\left(X_n^2\middle|p\right) - \chi^2_{\alpha;k-1}\right|p\right] \le \\
&\le \frac{V\left(X_n^2\middle|p\right)}{\left[E\left(X_n^2\middle|p\right) - \chi^2_{\alpha;k-1}\middle|p\right]^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

وهذا يعني أن:

$$\lim_{n\to\infty}\left[1 - W_n(P)\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} W_n(P) = 1$$

وبالتالي الاختبار χ^2 متسق.

3.8 اختبار فرضية لامعلمية مركبة بناءً على اختبار χ^2 بيرسون

TESTING A NON-PARAMETRIC COMPOSITE HYPOTHESIS BASED ON PEARSONS'S CHI-SQUARE TEST

إن طريقة تصنيف (تبويب) المعطيات ومن ثم تطبيق اختبار χ^2 لجودة التوفيق الواردة في البند السابق (اختبار فرضية بسيطة $H_0 : F_\xi(x) = F_0(x)$) يمكن تطبيقها أيضاً على حالة أكثر تعقيداً، وذلك عندما تكون الفرضية المراد اختبارها مصاغة حول انتماء دالة التوزيع المجهولة للمتغير العشوائي الملاحظ ξ لعائلة من دوال التوزيع المعطاة. وبشكل عام تصاغ المسألة على النحو الآتي:

لتكن $\boldsymbol{F} = \{F(x;\theta);\theta \in \Theta\}$ عائلة معلمية معطاة من دوال التوزيع (θ وحيدة البعد أو متعددة الأبعاد) و $\boldsymbol{X} = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من التوزيع $\mathcal{L}(\xi)$، دالة توزيعه $F_\xi(x)$ غير معلومة. ويطلب اختبار فرضية العدم:

$$H_0 : F_\xi(x) \in \boldsymbol{F}$$

وهذا يعني أن الفرضية المختبرة مركبة.

لتكن المعطيات الأولية (معطيات العينة العشوائية المشاهدة) مصنفة تبعاً للفئات $\zeta_1,...,\zeta_k$ المانعة تبادلياً (تجزئة لـ Ω_ξ) و $\boldsymbol{v} = (v_1,...,v_k)$ متجه التكرارات الموافق لوقوع الملاحظات في فئات التصنيف. نشكل الإحصاء المشابه للإحصاء (1.2.8). لكن الفرضية H_0 مركبة (لا تعين التوزيع $F_\xi(x)$ تماماً)، وهذا يعني أن احتمالات أن يأخذ المتغير العشوائي الملاحظ ξ قيمة في الفئات $\zeta_1,...,\zeta_k$ عند صحة فرضية العدم H_0 غير معلومة تماماً، بل عبارة عن دوال في المعلمة θ:

$$p_j(\theta) = P(\xi \in \zeta_j | H_0) = \int_{\zeta_j} dF(x;\theta) \quad ; \quad j = 1,...,k$$

لذا يأخذ المقدار X_n^2 الشكل الآتي:

$$X_n^2 = X_n^2(v;\theta) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left[v_i - np_j(\theta)\right]^2}{np_j(\theta)} \qquad (1.3.8)$$

وهذا يعني أن المقدار $X_n^2(v;\theta)$ ليس إحصاء لأنه يعتمد على المعلمة غير المعلومة θ، وبالتالي لا يمكن استعماله مباشرة لبناء اختبار، بل يجب التخلص أولاً من عدم التعيين المتعلق بالمعلمة المجهولة θ. وهذا يتم باستبدال المعلمة θ بمقدّر ما $\theta_n^* = \theta_n^*(X)$، وبذلك نحصل على الإحصاء:

$$X_n^{*2} = X_n^2(v;\theta_n^*) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\left[v_i - np_j(\theta_n^*)\right]^2}{np_j(\theta_n^*)} \qquad (2.3.8)$$

وهو دالة في معطيات العينة العشوائية X فقط، وبالتالي قيمته الملاحظة تعين تماماً عند كل عينة مشاهدة $x = (x_1, ..., x_n)$.

إذا أمكن إيجاد توزيع الإحصاء X_n^{*2} (تماماً أو تقريباً) عند صحة الفرضية H_0، وكان هذا التوزيع مستقلاً عن التوزيعات $F(x;\theta)$ المشكلة للفرضية H_0 (الإحصاء X_n^{*2} حر التوزيع)، فيمكن بناء اختبار جودة التوفيق لاختبار فرضية العدم H_0 باستخدام X^{*2}.

في الحالة المطروحة المقادير $p_j(\theta^*)$ ما زالت غير ثابتة وتمثل دوالاً في العينة X (متغيرات عشوائية). لذا لا يمكن تطبيق المبرهنة (2.3.5) على الإحصاء X_n^{*2}. هذا بالإضافة إلى أن توزيع الإحصاء X_n^{*2}، حتى إذا كان موجوداً، يتوقع أن يكون مرتبطاً بطريقة بناء المقدّر $\theta_n^*(X)$. إن مسألة إيجاد التوزيع الاحتمالي المقارب للإحصاء X_n^{*2} عند تلك الشروط المعقدة بحثت من قبل العالم فيشر (عام 1954)، الذي بين وجود طرق لتقدير المعلمة θ، وباستخدام تلك الطرق للتقدير فالتوزيع المقارب لـ X_n^{*2} $(n \to \infty)$ موجود وله شكل بسيط، وهو عبارة عن توزيع χ^2 بـ $(k-r-1)$ درجة حرية، حيث إن r عدد المعالم المجهولة (عدد أبعاد المعلمة θ). وإحدى هذه الطرق هو مايدعى بالتقدير المتعدد للمعقولية العظمى Multinomial maximum likelihood estimate.

إن الدالة:

$$L^{(1)}(h;\theta)=P_0(v=h)=\frac{n!}{h_1!\dots h_k!}\prod_{j=1}^{k}p_j^{h_j} \quad ; \quad v(x)=h=(h_1,\dots,h_k) \; ; \; \sum_{1}^{k}h_j=n$$

كحالة خاصة يمكن اعتبارها دالة معقولية لملاحظات مصنفة خلافاً لدالة المعقولية العادية:

$$L(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)$$

وعندئذٍ تقدير المعلمة θ الذي نحصل عليها من جعل دالة المعقولية $L^{(1)}(h;\theta)$ أعظمية (عند h معينة) يدعى بالتقدير المتعدد للمعقولية العظمى. ونحصل على التقديرات من حل منظومة المعادلات:

$$\frac{\partial \ln L^{(1)}(h;\theta)}{\partial\theta_l}=0 \quad ; \quad l=1,\dots,r \tag{3.3.8}$$

أو:

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{h_j}{p_j(\theta)}\frac{\partial p_j(\theta)}{\partial\theta_l}=0 \quad ; \quad l=1,\dots,r$$

أي تقدير θ بعد تصنيف (تبويب) المعطيات (معطيات العينة المشاهدة x).

مبـرهنة 1.3.8

لتكن الدوال:

$$p_j(\theta) \quad ; \quad j=1,\dots,k \quad , \quad \theta=(\theta_1,\dots,\theta_r) \; ; \; r<k-1$$

محققة للشروط التالية:

1. $\sum_{j=1}^{k}p_j(\theta)=1 \quad ; \quad \forall\,\theta\in\Theta$
2. $p_j(\theta)\ge c>0 \quad ; \quad j=1,\dots,k$
3. المشتقات:

$$\frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta_l} \quad , \quad \frac{\partial^2 p_j(\theta)}{\partial \theta_l \partial \theta_s} \quad ; \quad l, s = 1, \dots, r$$

موجودة ومستمرة.

4. المصفوفة:

$$\left\| \frac{\partial p_j(\theta)}{\partial \theta_l} \right\|$$

قياسها $k \times r$ ورتبتها r (rang) من أجل كل $\theta \in \Theta$.

عندئذٍ، إذا كان $\theta_n^* = \hat{\theta}_n$ التقدير المتعدد للمعقولية العظمى للمعلمة غير المعلومة θ، ذات r بعد، و $\hat{X}_n^2 = X^2(v;\hat{\theta}_n)$ فإن:

$$\mathcal{L}\left(\hat{X}_n^2 | H_0\right) \to \chi^2_{(k-r-1)}$$

عندما $n \to \infty$.

يمكن إثبات صحة هذه المبرهنة بشكل مشابه لإثبات المبرهنة (2.3.5) آخذين بالاعتبار أن المقدّر المتعدد للمعقولية العظمى متسق تقاربياً.

يدعى الاختبار المبني على الإحصاء $\hat{X}_n^2$ باختبار χ^2 بيرسون (اختبار χ^2) لاختبار فرضية عدم لامعلمية مركبة.

سنقدم الآن خوارزمية تطبيق اختبار χ^2 بيرسون لاختبار فرضية لامعلمية مركبة.

لتكن E تجربة تنتهي إلى أحد الحوادث المانعة بالتبادل $A_1, \dots, A_k$ باحتمالات غير معلومة $p_j = P(A_j) ; j = 1, \dots, k$. وأن نتائج تلك التجربة موصوفة بمتغير عشوائي منقطع $\eta = \eta(A_j) = j ; j = 1, \dots, k$، وقدمت فرضية حول الاحتمالات $p_1, \dots, p_k$ لظهور الحوادث $A_1, \dots, A_k$:

$$H_0 : p_j = p_j(\theta) \quad ; \quad j = 1, \dots, k \quad , \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_r) \in \Theta \subset R^r$$

حيث إن الدوال $p_j(\theta)$ تحقق شروط المبرهنة (1.3.8). وإذا كانت التجربة E موصوفة

بمتغير عشوائي مستمر ξ، كما أشرنا سابقاً، بتبويب البيانات (معطيات العينة المشاهدة) حسب الفئات $\zeta_1,\ldots,\zeta_k$ المانعة بالتبادل (توحد $\bigcup_{1}^{k}\zeta_j = \Omega_\xi \ , \ j=1,\ldots,k$; $A_j=\{\xi\in\zeta_j\}$) تؤول المسألة إلى حالة المتقطع.

لنفترض كررت تلك التجربة $n\geq 50$ مرة تحت نفس الشروط، فكانت التكرارات الملاحظة $h_1,\ldots,h_k$ للحوادث $A_1,\ldots,A_k$ محققة للشروط $h_j\geq 5; j=1,\ldots,$ ، وتم تعيين $\hat{\theta}_n$ بحل جملة المعادلات:

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{h_j}{p_j(\theta)}\frac{\partial p_j(\theta)}{\partial\theta_l}=0 \quad ; \quad l=1,\ldots,k \quad , \quad \theta=(\theta_1,\ldots,\theta_r)$$

بالنسبة لـ θ فنجد:

$$\hat{p}_j=p_j(\hat{\theta}_n) \quad ; \quad j=1,\ldots,k$$

وعلى ذلك نجد القيمة الملاحظة للإحصاء $\hat{X}_n^2$ وفق العلاقة:

$$\hat{X}_n^2(h)=\sum_{j=1}^{k}\frac{(h_j-n\hat{p}_j)^2}{n\hat{p}_j}$$

وعند مستوى معنوية معينة α واستخدام جدول توزيع χ^2 بـ $(k-r-1)$ درجة حرية نجد القيمة الحرجة $\chi^2_{\alpha;k-r-1}$.

بمقارنة القيمتين $\hat{X}^2(h)$ و $\chi^2_{\alpha;k-r-1}$ نتخذ أحد القرارين:

1. إذا كانت $\hat{X}^2\geq\chi^2_{\alpha;k-r-1}$ نرفض الفرضية H_0.
2. إذا كانت $\hat{X}^2<\chi^2_{\alpha;k-r-1}$ نقبل الفرضية H_0.

عند استخدام هذه القاعدة يمكن الوقوع في خطأ من النوع I باحتمال يساوي تقريباً α.

إن تقدير المعلمة θ يمكن قبل تصنيف (تبويب) المعطيات، وذلك باستخدام طريقة المعقولية العظمى العادية (استخدام الملاحظات ذاتها $x_1,\dots,x_n$ وليس التوزيع التكراري حسب الفئات $\zeta_1,\dots,\zeta_n$). ويمكن توقع أن مثل هذه الطريقة للتقدير تؤدي إلى نتائج أكثر دقة، بالإضافة لذلك، غالباً إيجاد تقدير المعقولية العظمى العادي (تقدير المعقولية العظمى قبل تبويب البيانات) أبسط بكثير من حل جملة المعادلات (3.3.8). لكن بين العالمان تشيرنوف وليمان (عام 1954) عدم صحة المبرهنة (1.3.8) أحياناً في حالة استخدام تقدير θ بتطبيق طريقة المعقولية العظمى العادية.

مثال 1.3.8

لنفترض أجريت n ملاحظة مستقلة على متغير عشوائي صحيح وغير سالب ξ، ونريد اختبار فرضية العدم:

$$H_0 : \mathcal{L}(\xi) \in \Pi(\theta)$$

عند مستوى معنوية α.

لنضع:

$$A_j = \{j-1\} \quad ; \quad j = 1,\dots,k-1 \qquad , \qquad A_k = \{k-1, k, \dots\}$$

وعندها:

$$p_j(\theta) = f(j-1;\theta) = \frac{\theta^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\theta} \quad ; \quad j = 1,\dots,k-1$$
$$p_k(\theta) = \sum_{l=k-1}^{\infty} f(l,\theta) \quad ; \quad f(l;\theta) = \frac{\theta^l}{l!} e^{-\theta} \ , \ l \geq 0$$

لنجد الآن تقدير θ. وبما أن المعلمة المجهولة وحيدة البعد (معلمة واحدة) فإن جملة المعادلات (3.3.8) تؤول إلى المعادلة:

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{h_j}{p_j(\theta)}\frac{dp_j(\theta)}{d\theta}=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{h_j}{p_j(\theta)}\frac{dp_j(\theta)}{d\theta}+\frac{h_k}{p_k(\theta)}\frac{dp_k(\theta)}{d\theta}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k-2}\frac{h_{j+1}}{f(j;\theta)}\frac{df(j;\theta)}{d\theta}+\frac{h_k}{\sum_{l=k-1}^{\infty}f(l;\theta)}\frac{d}{d\theta}\sum_{l=k-1}^{\infty}f(l;\theta)=$$

$$=\sum_{j=0}^{k-2}\left(\frac{j}{\theta}-1\right)h_{j+1}\frac{\theta^j}{j!}\frac{e^{-\theta}}{f(j;\theta)}+\frac{h_k}{\sum_{l=k-1}^{\infty}f(l;\theta)}\sum_{l=k-1}^{\infty}\frac{\theta^l}{l!}e^{-\theta}\left(\frac{l}{\theta}-1\right)=$$

$$=\sum_{j=0}^{k-2}\left(\frac{j}{\theta}-1\right)h_{j+1}+h_k\sum_{l=k-1}^{\infty}\left(\frac{l}{\theta}-1\right)f(l;\theta)\Big/\sum_{l=k-1}^{\infty}f(l;\theta)=0$$

وعليه:

$$\frac{1}{\theta}\sum_{j=0}^{k-2}jh_{j+1}-\sum_{j=0}^{k-2}h_{j+1}+\left[\frac{n_k}{\theta}\sum_{l=k-1}^{\infty}lf(l;\theta)\Big/\sum_{l=k-1}^{\infty}f(l;\theta)\right]-h_k=0$$

$$\frac{1}{\theta}\left[\sum_{j=0}^{k-2}jh_{j+1}+h_k\sum_{l=k-1}^{\infty}lf(l;\theta)\Big/\sum_{l=k-1}^{\infty}f(l;\theta)\right]=\sum_{j=1}^{k-2}h_{j+1}+h_k=n$$

$$\theta=\frac{1}{n}\left[\sum_{j=0}^{k-2}jh_{j+1}+h_k\sum_{l=k-1}^{\infty}lf(l;\theta)\Big/\sum_{l=k-1}^{\infty}f(l;\theta)\right]$$

نلاحظ أن الحد الأول ضمن القوسين يساوي مجموع النقاط $x_i\,;\,x_i\le k-2$. بينما الحد الثاني يساوي تقريباً مجموع النقاط $x_i\,;\,x_i\ge k-1$ ($x_1,...,x_n$ القيم الملاحظة للمتغير العشوائي ξ). وبالتالي يمكن استخدام المتوسط الحسابي لمفردات العينة المشاهدة كتقدير للمعلمة غير المعلومة θ، أي أن:

$$\hat{\theta}_n\approx\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=\bar{x}$$

وكما نعلم أن تقدير المعقولية العظمى العادية (تقدير المعقولية العظمى بناءً على القيم الملاحظة $x_1,...,x_n$) من أجل المعلمة θ يساوي تماماً $\bar{x}$.

لنجد الآن $\hat{p}_j = p_j(\hat{\theta}_n)\,;\, j = 1,\dots,k$:

$$\hat{p}_j = p(A_j) = \begin{cases} \dfrac{\overline{x}^{\,j-1}}{(j-1)!}e^{-x} & ; \quad j = 1,2,\dots,k-1 \\ \displaystyle\sum_{l=k-1}^{\infty} \dfrac{\overline{x}^{\,l}}{l!}e^{-x} & ; \quad j = k \end{cases}$$

وترفض الفرضية H_0 عندما:

$$\hat{X}^2(h) = \sum_{j=1}^{k} \frac{(h_j - n\hat{p}_j)^2}{n\hat{p}_j} \geq \chi^2_{\alpha,k-2}$$

مثـــال 2.3.8

إذا كانت البيانات الآتية تبين عدد الحرائق الشهرية في مدينة ما خلال ستين شـــهراً ماضية أخذت عشوائياً:

عدد الحرائق الشهرية x_j	0	1	2	3	4	5	6
عدد الشهور h_j	2	16	14	10	7	6	5

فهل يمكن اعتبار أن عدد الحرائق الشهرية (المتغير العشوائي ξ) يتبع توزيع بواسون، عنـد مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

فرضية العدم:

$$H_0 : \mathcal{L}(\xi) \in \Pi(\theta)$$

وهذا يعني أن صيغة دالة الاحتمال للمتغير ξ، عند صحة الفرضية H_0، هي:

$$f(x;\theta) = \frac{\theta^x}{x!}e^{-x} \quad ; \quad x = 0,1,\dots \quad , \quad \theta > 0$$

وهو توزيع يعتمد على معلمة واحدة غير معلومة θ، وأفضل تقدير لهـذه المعلمـة هـو متوسط العينة $\bar{x}$، كما بينا سابقاً:

$$\hat{\theta}_n = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{7} h_j x_j = \frac{162}{60} = 2.7$$

ومن ثم:

$$\hat{p}_j = \begin{cases} \frac{(2.7)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\bar{x}} & ; \quad j = 1,2,\dots,6 \\ \sum_{l=6}^{\infty} \frac{(2.7)^l}{l!} e^{-2.7} & ; \quad j = 6,7,\dots \end{cases}$$

هنا $A_j = \{j-1\}\ ;\ j = 1,\dots,6\ ,\ A_7 = \{6,7,\dots\}$.

وعليه يمكن بناء الجدول الآتي:

الفئات A_j	0	1	2	3	4	5	≥ 6
التكرارات المشاهدة h_j	2	16	14	10	7	6	5
الاحتمال $\hat{p}_j$	0.067	0.181	0.245	0.220	0.149	0.080	0.058
التكرارات المتوقعة $n\hat{p}_j$	4.02	10.86	14.70	13.2	8.94	4.8	3.48

وبما أن $h_1 < 5$ تضاف الفئة A_1 إلى A_2 فنحصل على:

التكرارات المشاهدة h_j	18	14	10	7	6	5
التكرارات المتوقعة $n\hat{p}_j$	14.88	14.7	13.2	8.94	4.8	3.48
$\lvert h_j - n\hat{p}_j \rvert$	3.12	0.7	3.2	1.94	1.2	1.52
$(h_j - n\hat{p}_j)^2 / n\hat{p}_j$	0.65	0.03	0.78	0.42	0 30	0 66

وبالتالي القيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار $\hat{X}^2(v)$:

$$\hat{X}^2(h)=\sum_{j=1}^{k}\frac{(h_j-n\hat{p}_j)^2}{n\hat{p}_j}=2.84 .$$

ومن جدول توزيع χ^2 نجد القيمة الحرجة الموافقة لـ $k-r-1=6-1-1=4$ درجات حرية ومستوى المعنوية المعطى $\alpha=0.05$ تساوي $\chi^2_{0.05;4}=9.488$. وبما أن $\hat{X}^2(h)<\chi^2_{0.05;4}$ نقبل الفرضية H_0.

مثال 3.3.8

لدراسة توزيع أعمار المصابيح الكهربائية المنتجة في مصنع ما، أخذت عينة عشوائية مؤلفة من 334 مصباحاً وسجلت أعمارهم (مدة الإضاءة حتى لحظة الاحتراق) مقدرة بالشهور، فكانت على النحو الآتي:

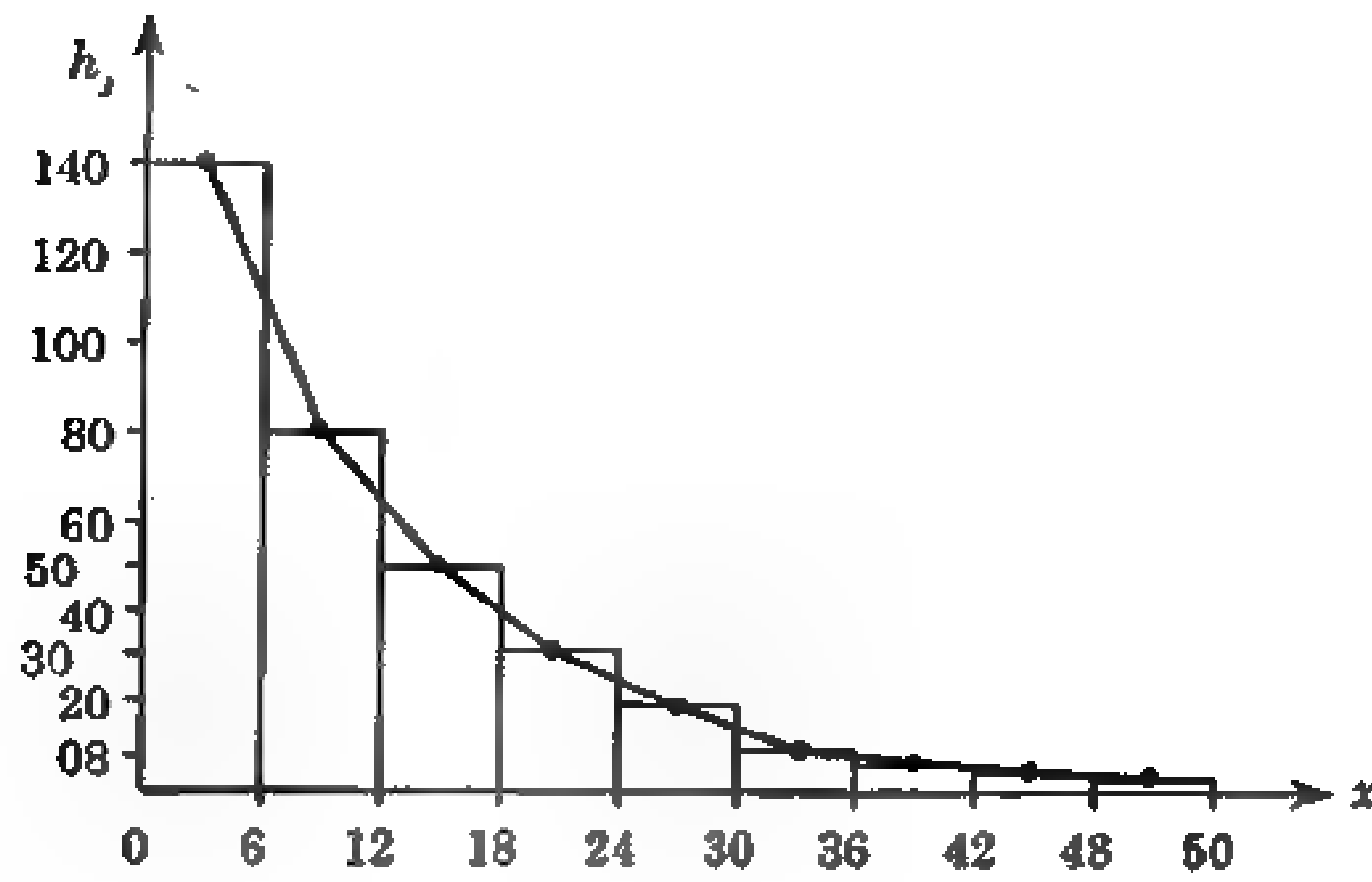
الفئات A_j	0 -	6 -	12 -	18 -	24 -	30 -	36 -	[42,48)
عدد المصابيح h_j	140	80	50	30	20	8	4	2
مركز الفئة $\bar{x}_j$	3	9	15	21	27	33	39	45
$h_j\bar{x}_j$	420	720	750	630	540	264	156	90

هنا المتغير العشوائي قيد الدراسة (الملاحظ) $\xi=$ عمر المصباح (مقدراً بالشهور) و $A_j=[6j-6,6j)\,;\,j=1,2,\ldots,8$.

لنرسم المدرج والمضلع التكراري للتوزيع التكراري [شكل (1.3.8)].

بمقارنة المضلع التكراري هذا مع الشكل العام لمنحني التوزيع الأسي $\Gamma(1,1/\theta)$ نخلص إلى افتراض أن ξ يخضع للتوزيع $\mathcal{L}(\xi)\in\Gamma(1,1/\theta)$. لنختبر صحة هذا الافتراض، عند مستوى معنوية $\alpha=0.05$:

$$H_0 : \mathcal{L}(\xi) \in \Gamma(1,1/\theta)$$



شكل (1.3.8)

كما نعلم أن النموذج الأسي $\Gamma(1,1/\theta)$ يعتمد على معلمة واحدة فقط θ وتقدير المعقولية العظمى لها $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x) = \frac{1}{\bar{x}}$.

بما أن:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{8} h_j \bar{x}_j = \frac{3570}{334} = 10.69$$

فإن:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{10.69} = 0.094$$

وبالتالي فإن:

$$f(x) = 0.094e^{-0.094x} \quad ; \quad x > 0$$

$$P(a < \xi < b) = F(b) - F(a) = e^{-0.094a} - e^{-0.094b} \quad ; \quad a < b$$

وباستخدام هذه الصيغة بعد دمج الفئتين A_7, A_8 (لأن $h_7, h_8 < 5$) يمكن حساب احتمالات الفئات:

$$A_j = [6j - 6, 6j) \;\; ; \;\; j = 1, \ldots, 6 \quad , \quad A_7 = [36, +\infty)$$

فمثلاً:

$$\hat{p}_1 = P(A_1) = F(6) - F(0) = e^0 - e^{0.094(6)} = 1 - e^{-0.564}$$
$$= 1 - 0.5750 = 0.4250 \approx 0.43$$

وبشكل مشابه نحسب احتمالات بقية الفئات كما هي واردة في الجدول الآتي:

الفئات A_j	0 -	6 -	12 -	18 -	24 -	30 -	≥ 36
الاحتمالات $\hat{p}_j$	0.43	0.25	0.14	0.08	0.05	0.02	0.03
التكرارات المتوقعة $n\hat{p}_j$	143.6	83.5	46.76	26.72	16.7	6.68	10.02
التكرارات المشاهدة h_j	140	80	50	30	20	8	6
$\lvert h_j - n\hat{p}_j \rvert$	3.6	3.5	3.24	3.28	3.3	1.32	3.98
$\frac{(h_j - n\hat{p}_j)^2}{n_j\hat{p}_j}$	0.09	0.15	0.22	0.40	0.65	0.26	1.58

وتكون القيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار هي:

$$\hat{X}^2(h) = \sum_{j=1}^{7} \frac{(h_j - n\hat{p}_j)^2}{n\hat{p}_j} = 3.35$$

وبما أن مستوى المعنوية المعطى $\alpha = 0.05$ ودرجات الحرية $k - r - 1 = 7 - 2 = 5$،

فباستخدام جدول توزيع χ^2 نجد القيمة الحرجة $\chi^2_{0.05;5} = 11.070$. وبالمقارنة نجد $3.35 = \hat{X}^2(h) < \chi^2_{0.05;5} = 11.070$، وعليه نقبل فرضية العدم، أي أن المتغير العشوائي ξ يخضع لتوزيع أسي $\mathcal{L}(\xi) \in \Gamma(1,1/\theta)$.

تمارين

1. لدراسة أوزان طلبة جامعة ما سحبت عينة عشوائية مؤلفة من 20 طالباً من تلك الجامعة وأخذت أوزانهم بالكيلوغرام (بدقة 0.01) فكانت كما يلي:

55	65	83.5	70.25	78	68	67.4	69	90	91.5
66.5	80	69.4	78	92.25	58	70	85	72	74.15

اختبر الفرضية القائلة أن أوزان طلاب هذه الجامعة يتبعون التوزيع الطبيعي $N(60,16)$، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.10$.

2. فيما يلي عينة عشوائية:

1.3	2.4	2.2	35	2.8	3.2	4.3	5	6.7
5	2.2	3.2	4.7	5.2	6.7	7	6.5	5.2

من توزيع مستمر $\mathcal{L}(\xi)$. اختبر الفرضية القائلة أن ξ يتبع التوزيع الأسي:

$$f(x) = 3.5e^{-3.5x} \quad ; \quad x > 0$$

عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

3. أخذت 50 ملاحظة لأعلى التعيين على متغير عشوائي مستمر ξ غير سالب فكانت قيمها (مرتبة تصاعدياً حسب القيم ومقربة بدقة 0.01) على النحو الآتي:

0.01	0.01	0.04	0.17	0.18	0.22	0.22	0.25	0.25	0.29
0 42	0.46	0.47	0.56	0.59	0.67	0.68	0.70	0.72	0.76
0 78	0.83	0.85	0.87	0.93	1.00	1.01	1.01	1 02	1.03
1 05	1.32	1.34	1.37	1.47	1.50	1.52	1.54	1.59	1.71
1 90	2.10	2.35	2.46	2.46	2.50	3.73	4.07	6.03	

اختبر الفرضية $H_0 : F_\xi(x) = 1 - e^{-x}\ ;\ x \geq 0$، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$، وذلك بتطبيق اختبار كالماغوروف بعد تبويب المعطيات.

4. لتكن لدينا معطيات المثال (3) والمطلوب اختبار فرضية العدم $H_0 : F_\xi(x) = 1 - e^{-x}\ ;\ x \geq 0$، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$ بتطبيق اختبار χ^2 بعد تصنيف المعطيات في الحالتين:

أ. التصنيف وفق أربع فئات مختلفة الاحتمالات.

ب. التصنيف وفق أربع فئات متساوية الاحتمالات.

5. في تجارب اصطفاء البسلى (البازلياء)، لاحظ العالم مندل تكرارات السلالات المختلفة الناتجة من تهجين سلالة البذور الصفراء للملساء مع سلالة البذور الخضراء المجعدة. هذه المعطيات وقيم الاحتمالات الموافقة لتلك السلالات المعينة وفق نظرية مندل للوراثة، ورادة في الجدول الآتي:

السلالة A_j	التكرار h_j	الاحتمال p_{j0}
ملساء وصفراء	315	9/16
مجعدة وصفراء	101	3/16
ملساء وخضراء	108	3/16
مجعدة وخضراء	32	1/16
$\sum$	$n = 556$	1

اختبر صحة الفرضية:

$$H_0 : p_1 = \frac{9}{16} \ , \ p_2 = p_3 = \frac{3}{16} \ , \ p_4 = \frac{1}{16}$$

عند مستوى دلالة:

أ. $\alpha = 0.10$.

ب. $\alpha = 0.05$.

6. أخذت عينة عشوائية من توزيع مستمر غير معلوم $\mathcal{L}(\xi)$، فكانت كما هي واردة في الجدول الآتي:

الفئات $\zeta_r = (c_{r-1}, c_r]$	150-	155-	160-	165-	170-	175-	180-	185-	190-	(195,200]
h_r التكرار	10	30	50	70	100	85	60	45	20	1

المطلوب:

أ. ما هو التوزيع الذي تفترضه للمتغير العشوائي ξ بناءً على تلك المعطيات؟

ب. اختبر صحة افتراضك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

7. إذا كانت البيانات الآتية تبين عدد الطائرات التي استقبلها مطار دولي في الساعة خلال 366 ساعة ماضية أخذت لأعلى التعيين:

عدد الطائرات	20	26	30	40	45	52	60
عدد الساعات	22	55	90	80	76	12	1

المطلوب:

أ. ماهو نوع التوزيع الذي تفترضه لعدد الطائرات ξ التي يستقبلها هذا المطار في الساعة؟

ب. اختبر صحة افتراضك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

الفصل التاسع:

اختبار الفرضيات حول كميات

اقتصر اهتمامنا في الفصول السابقة المتعلقة باختبارات الفرضيات المعلمية على المعلمة أو المعالم غير المعلومة في صيغة توزيع المتغير العشوائي الملاحظ ξ($F(x;\theta)$) لكن هناك معالم أخرى غير معلومة للتوزيع $\mathcal{L}(\xi)$ كالوسيط أو الربيعات أو العشيرات أو المئينات أو أي تقسيمة من التقسيمات (قيم حرجة $z_p = F(z_p) = p$ The p^th quartile of the population. وبالتالي نحتاج في مسائل عدة لاختبار فرضيات حول مثل تلك الكميات، وهنالك طرق عدة لإجراء ذلك. سنبحث فيما يلي أهم هذه الطرق.

1.9 اختبار χ^2 CHI-SQUARE TEST

لتكن $X = (X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع مستمر غير معلوم $\mathcal{L}(\xi)$ معرف على فئة الأعداد الحقيقية R، والذي قدمت بشأنه الفرضية:

$$H_0 : F_\xi(z_j) = p_{j0} \quad ; \quad ; j = 1,\dots,k-1 \qquad (1.1.9)$$

حيث إن:

$$0 < p_{10} < \dots < p_{k-1,0} < 1 \quad , \quad -\infty < z_1 < \dots < z_{k-1} < \infty$$

أعداد معطاة.

نلاحظ أن فرضية العدم H_0 مركبة وتشتمل على كل التوزيعات المستمرة التي لها نفس التقسيم (القيم الحرجة) $z_j\,;\, j=1,\dots,k-1$ ومنها التوزيع $\mathcal{L}(\xi)$. ولبناء قاعدة لاختبار هذه الفرضية نقوم بتقسيم فئة الأعداد الحقيقية R إلى عدد محدود من الفئات (الفترات) المانعة بالتبادل على النحو الآتي:

$$\zeta_j=(z_{j-1}.z_j] \quad ; \quad j=1,\dots,k \;\;,\;\; z_0=-\infty \;\;,\;\; z_k=\infty$$

ونرمز بـ v_j لعدد عناصر العينة العشوائية X المنتمية للفترة ζ_j. بذلك نحصل على تصنيف (تبويب) للمعطيات حسب الفترات $\zeta_j\,;\, j=1,\dots,k$. وعندئذٍ يخضع متجه التكرارات $v=(v_1,\dots,v_k)$ لتوزيع متعدد الحدود:

$$\mathcal{L}_{p^*}(v)=M\big(n,p^*=(p_1^*,\dots,p_k^*)\big) \qquad (2.1.9)$$

حيث إن:

$$p_j^*=p_j-p_{j-1}=P(z_{j-1}<\xi<z_j) \quad ; \quad j=1,\dots,k \;\;,\;\; p_0=0 \;\;,\;\; p_k=1$$

وعند صحة الفرضية H_0:

$$\mathcal{L}(v|H_0)=M\big(n;p_0^*=(p_{10}^*,\dots,p_{k0}^*)\big)$$

حيث إن:

$$p_{j0}^*=p_{j0}-p_{j-1,0} \quad ; \quad j=1,\dots,k \;\;,\;\; p_{00}=0 \;,\; p_{k0}=1$$

وعلى ذلك يمكن إعادة صياغة الفرضية H_0 على الصورة:

$$H_0: p_1^*=p_{10}^*,\dots,p_k^*=p_{k0}^*$$

عندما تكون $n\ge 50$ و $v_j\ge 5\,;\, j=1,\dots,k$ يمكن تطبيق اختبار جودة التوفيق χ^2 الوارد في البند (2.8) المبني على الإحصاء المعرف بالعلاقة (1.2.8). ويدعى اختبار χ^2 في هذه الحالة باختبار χ^2 للكميات أو لتقسيمة من تقسيمات (قيم حرجة) المجتمع.

فمثلاً، لدينا ثلاث قيم للمتغير العشوائي ξ هي Q_1, Q_2, Q_3 ونريد معرفة ما إذا كانت تلك الكميات تقسم المجتمع Ω_ξ (القيم الممكنة لـ ξ) إلى أربع أقسام متساوية الاحتمالات. فعندئذٍ تصاغ فرضية العدم:

$$H_0 : p^*_{10} = p^*_{20} = p^*_{30} = p^*_{40} = 0.25$$

حيث إن:

$$p^*_{j0} = P(Q_{j-1} < \xi < Q_j) \quad ; \quad j = 1,2,3,4 \quad , \quad Q_0 = -\infty \ , \ Q_4 = +\infty$$

وهذه عبارة عن فرضية حول ربيعات المجتمع. ويمكن بشكل مشابه صياغة فرضية العدم حول عشيرات ومئينات المجتمع. وعادة يتم تحديد الكميات المراد اختبارها بناءً على أهداف البحث.

مثـــال 1.1.9

أخذت عينة عشوائية من الملاحظات على متغير عشوائي مستمر ξ توزيعه غير معلوم، فكانت النتائج مرتبة تصاعدياً، حسب القيم ومقربة إلى أقرب عدد صحيح، على النحو الآتي:

1	1	4	17	18	22	22	25	25	29	42	46	47
56	59	65	66	66	70	72	76	78	83	85	87	93
100	101	102	103	105	132	134	136	137	147	150	152	154
159	171	190	210	235	246	246	250	273	407	603	604	

هل يمكن اعتبار القيم $z_1 = 28.8 , z_2 = 69.3 , z_3 = 138.6$ تقسم المجتمع Ω_ξ إلى أربع أقسام متساوية الاحتمالات، أي أن $F_\xi(z_j) = j/4 \,;\, j = 1,2,3$ ؟ اختبر صحة ذلك عند مستوى معنوية 0.10.

هنا لدينا $n = 51 , \alpha = 0.10$ والفئات:

$$\zeta_j = (z_{j-1}, z_j] \quad ; \quad j = 1,2,3,4 \quad , \quad z_0 = -\infty \ , \ z_4 = \infty$$

حيث إن:

$$p_j^* = p_j - p_{j-1} = F_\xi(z_j) - F_\xi(z_{j-1}) \quad ; \quad j = 1,2,3,4$$

وعند صحة الفرضية:

$$p_{j0}^* = 0.25 \quad ; \quad j = 1,2,3,4$$

تصنف المعطيات الإحصائية حسب الفئات $\zeta_j \,;\, j = 1,\ldots,4$ فنحصل على الجدول الآتي:

الفئات	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4
h_j	9	9	17	16
np_{j0}^*	12.75	12.75	12.75	12.75
$\lvert h_j - np_{j0}^* \rvert$	3.75	3.75	4.25	3.25
$(h_j - np_{j0}^*)^2$	14.06	14.06	18.06	10.56

وعلى ذلك فالقيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار $X_n^2(v)$:

$$X_n^2(h) = \sum_{j=1}^{4} \frac{(h_j - np_{j0}^*)^2}{np_{j0}^*} = 1.10 + 1.10 + 1.42 + 0.83 = 4.45$$

ومن جدول χ^2 بـ $k-1 = 4-1 = 3$ درجة حرية ومستوى معنوية $\alpha = 0.10$ نجد $\chi_{0.10;3}^2 = 6.25$. بما أن $X_n^2(h) = 4.46 < \chi_{0.10;3}^2 = 6.25$ نقبل فرضية العدم H_0، أي أن معطيات العينة المشاهدة متفقة مع الفرضية H_0 بشكل جيد، ومن ثم الفروقات الملاحظة بين التكرارات المشاهدة والمتوقعة، عند صحة الفرضية H_0، ليست جوهرية وتعزى لعوامل الصدفة أو العشوائية.

2.9 اختبار الوسيط MEDIAN TEST

هناك مسائل عدة في التطبيقات الإحصائية تتطلب معرفة ما إذا كان مركز (موضع) توزيع مساوٍ لقيمة معينة أم لا، وحيث إن وسيط المجتمع $\tilde{\mu}$ مقياساً لموضوع التوزيع فقد يحتاج الأمر إلى إجراء اختبار فرضية العدم $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$، حيث $\tilde{\mu}_0$ قيمة معطاة، ضد فرضية بديلة H_1 وذلك بناءً على معطيات عينة عشوائية $X = (X_1, ..., X_n)$ مأخوذة من مجتمع مستمر توزيعه الاحتمالي $\mathcal{L}(\xi)$ غير معلوم. وفي مثل تلك الحالات قد يتبادر للذهن أخذ وسيط العينة $\tilde{X}$ كإحصاء اختبار لاعتباره مقدِّر نقطي جيد لوسيط المجتمع $\tilde{\mu}$، وهذا يتطلب معرفة توزيع $\tilde{X}$. لكن، كما نعمل [راجع الفقرة (4.14.3-I)] توزيع الإحصاء $\tilde{X}$، عندما تكون n كبيرة:

$$\mathcal{L}(\tilde{X}) \approx N\left(\tilde{\mu}, \frac{1}{4nf_\xi^2(\tilde{\mu})}\right)$$

يعتمد على التوزيع المجهول $f_\xi(x)$. وبالتالي من الصعوبة بمكان استخدام وسيط العينة $\tilde{X}$ كإحصاء اختبار لبناء أي قاعدة اختبار فرضية حول وسيط المجتمع $\tilde{\mu}$. لذا لابد من اللجوء إلى اختبارات لامعلمية بديلة، أي اختبارات لا تعتمد على معرفة توزيع المجتمع $\mathcal{L}(\xi)$. وهنالك عدة اختبارات لامعلمية لاختبار فرضية العدم $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$ ضد فرضية بديلة H_1 سنتطرق لها في الفقرات الآتية.

1.2.9 اختبار الإشارة Sign Test

لتكن $X = (X_1, ..., X_n)$ عينة عشوائية من توزيع مستمر $\mathcal{L}(\xi)$ غير معلوم، ونريد اختبار فرضية العدم $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$ ضد فرضية بديلة H_1، عند مستوى معنوية معطى $0 < \alpha < 1$.

إذا كانت الفرضية H_0 صحيحة فمن المتوقع أن تقع تقريباً نصف عناصر العينة العشوائية X على كل جانب من $\tilde{\mu}_0$، أي أن:

$$|\{i : X_i < \tilde{\mu}_0\}| \approx |\{i : X_i > \tilde{\mu}_0\}| \approx \frac{n}{2}$$

وهذا يعني أن نصف عناصر العينة X تقريباً تنتمي للفترة $(-\infty,\tilde{\mu}_0]$، والنصف الآخر تقريباً ينتمي للفترة $[\tilde{\mu}_0,+\infty)$. وعلى ذلك فمن الطبيعي التفكير بأخذ v_1 كإحصاء لبناء قاعدة لاختبار H_0، حيث إن v_1 تساوي عدد عناصر العينة X المنتمية للفئة $(-\infty,\tilde{\mu}_0]$. وإذا رمزنا للفروقات بـ $d_i = X_i - \tilde{\mu}_0 \,;\, i = 1,...,n$، فإن v_1 تساوي عدد الفروقات السالبة أو عدد الإشارات السالبة ضمن فئة القيم $d_1,...,d_n$. لذا أي اختبار يبنى على الإحصاء v_1 يدعى باختبار الإشارة للفرضية H_0.

نلاحظ من تعريف الإحصاء v_1 أن القيم الكبيرة له تعني غالبية عناصر العينة العشوائية X أصغر من الوسيط المفترض $\tilde{\mu}_0$، أي واقعة في الفترة $(-\infty,\tilde{\mu}_0]$، وهذا دليل على أن وسيط العينة $\tilde{X}$ أقل من $\tilde{\mu}_0$. وإذا كانت العينة العشوائية ممثلة للمجتمع $\mathcal{L}(\xi)$، وهذا ما نتخذه دائماً، فإن $\tilde{\mu}_0 > \tilde{\mu}$. وبالتالي فإن منطقة الرفض المناسبة لاختبار فرضية العدم $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \tilde{\mu} < \tilde{\mu}_0$ هي من الشكل:

$$G_1 = \{x : h_1 \geq c\} \quad ; \quad h_1 + h_2 = n \tag{1.2.9}$$

حيث إن h_1 القيمة الملاحظة لـ v_1 و h_2 القيمة الملاحظة لـ v_2.

بينما القيم الصغيرة لإحصاء الاختبار v_1 تبين أن غالبية عناصر العينة العشوائية X أكبر من $\tilde{\mu}_0$، أي تنتمي للفترة $[\tilde{\mu}_0,\infty)$ وهذا يعني أن $\tilde{X} > \tilde{\mu}_0$، ومن ثم $\tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0$. وعندئذٍ فالاختبار الموافق لاختبار $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$ ضد $H_1 : \tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0$ يعطى بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1 = \{x : h_1 \leq c\} \tag{2.2.9}$$

أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات جانبين $H_1 : \tilde{\mu} \neq \tilde{\mu}_0$، فالاختبار يعطى بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1 = \{x : h_1 \le c_1 \ \text{ or } \ h_1 \ge c_2\} \tag{3.2.9}$$

لتعيين الثوابت c, c_1, c_2، عند مستوى معنوية α، يلزمنا معرفة التوزيع الاحتمالي لإحصاء الاختبار v_1، عند صحة الفرضية H_0. وهذا الإحصاء متغير عشوائي منقطع قيمه الممكنة $0,1,...,n$ ويخضع لتوزيع ذي الحدين $B(n,0.5)$، عند صحة الفرضية H_0.
وعلى ذلك وعند مستوى معنوية $0 < \alpha < 1$:

يتعين الحد الحرج $c = c_\alpha$ لمنطقة الرفض (1.2.9) من العلاقة:

$$P(v_1 \ge c | H_0) = \sum_{r=c}^{n} C_r^n (1/2)^n = \alpha \tag{4.2.9}$$

ويتعين الحد الحرج $c = c_\alpha$ لمنطقة الرفض (2.2.9) من العلاقة:

$$P(v_1 \le c | H_0) = \sum_{r=0}^{c} C_r^n (1/2)^n = \alpha \tag{5.2.9}$$

بينما يتعين الحدان الحرجان c_1, c_2 لمنطقة الرفض (3.2.9) من العلاقتين:

$$\begin{aligned} P(v_1 \le c_1 | H_0) &= \sum_{r=0}^{c_1} C_r^n (1/2)^n = \frac{\alpha}{2} \\ P(v_1 \ge c_2 | H_0) &= \sum_{r=c_2}^{n} C_r^n (1/2)^n = \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

نشير هنا، في حالة استخدام الاختبار المعطى بمنطقة الرفض (1.2.9)، ولا يوجد عدد صحيح غير سالب c يحقق العلاقة (4.2.9) فالاختبار عشوائي ويعطى بدلالة دالة رفض $\varphi(x)$ [راجع البند (I−3.2)]، وينطبق ذلك أيضاً على الاختبارين (2.2.9) و (3.2.9).

عندما تكون n كبيرة نسبياً، بحيث يكون الجداء $np = (n/2) \ge 5$، فيمكن استخدام التوزيع الطبيعي $N(n/2, n/4)$ كتقريب جيد لتوزيع ذي الحدين $B(n,0.5)$، وعندئذٍ يؤخذ المقدار:

$$Z = \frac{2v_1 - n}{\sqrt{n}}$$

كإحصاء اختبار بدلاً من الإحصاء v_1.

ملاحظة: لقد افترضنا منذ البداية أننا نتعامل مع متغير عشوائي مستمر ξ، وهذا يعني أن $P(\xi = \tilde{\mu}_0) = 0$، وعليه إذا كانت هناك قيمة أو أكثر من قيم العينة العشوائية المشاهدة مساوية لـ $\tilde{\mu}_0$، فإننا نقوم بإهمال هذه القيمة أو القيم، ومن ثم ينقص حجم العينة المشاهدة بعدد هذه القيم.

مثال 1.2.9

أخذت عينة عشوائية مؤلفة من 21 طالباً من إحدى المدارس الابتدائية فكانت أطوالهم بالسنتيمتر (بدقة تقريب 0.1) على النحو الآتي:

97.3	95.2	97.1	96.2	97.0	96.8	97.8
97.2	95.0	100	94.0	99.2	92.4	96.6
97.2	97.5	95.6	95.4	98.2	99.4	97.4

اختبر الفرضية $H_0 : \tilde{\mu} = 97$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \tilde{\mu} < 97$، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.02$.

نلاحظ وجود قيمة في العينة المشاهدة تساوي 97 نهملها ونعتبر حجم العينة $n = 20$.

بما أن الفرضية البديلة $H_1 : \tilde{\mu} < \tilde{\mu}_0 = 97$، فالاختبار يعطى بمنطقة رفض من الشكل (1.2.9) ويتعين الحد الحرج من العلاقة (4.2.9):

$$P(v_1 \geq c | H_0) = \sum_{r=c}^{20} C_r^{20} (1/2)^{20} = 0.02$$

ومن جدول توزيع ذي الحدين $n = 20, p = 1/2$ نجد $c_\alpha = 15$. والقيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار v_1 هي $h_1 = 9$. وبما أن $h_1 = 9 < c_\alpha = 15$ نقبل فرضية العدم $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$.

بما أن $n = 20$ كبيرة نسبياً وأن $np = n/2 = 10 > 5$، فيمكن استخدام التوزيع الطبيعي $N(10,5)$ كتقريب جيد لتوزيع ذي الحدين $B(20,0.5)$، وعندئذ القيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار Z:

$$z = \frac{2h_1 - n}{\sqrt{n}} = \frac{18-20}{\sqrt{20}} = -0.45$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد القيمة الموافقة لمستوى معنوية $\alpha = 0.02$ تساوي $z_\alpha = 2.054$. وبما أن $z = -0.45 < z_\alpha = 2.054$ نقبل الفرضية $H_0 : \tilde{\mu} = 97$، وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها باستخدام إحصاء الاختبار v_1.

نلاحظ أن اختبار χ^2 للقيم الحرجة الوارد في البند السابق (1.9)، عندما $k = 1$ و $F_\xi(\tilde{\mu}_0) = 1/2$ ما هو إلا اختبار إشارة (اختبار الوسيط). وهذا يعني أن إحصاء الاختبار (1.2.8) يؤول إلى الإحصاء:

$$X_n^2(v_1) = \frac{(v_1 - n/2)^2}{n/4} \tag{7.2.9}$$

وعندما تكون $n \geq 50$ و $v_1 \geq 5$ فإن:

$$\mathcal{L}\left(X_n^2(v_1)|H_0\right) \approx \chi^2_{(1)}$$

وبالتالي، بأخذ الإحصاء $X_n^2(v_1)$ كإحصاء اختبار بدلاً من الإحصاء v_1 نحصل على اختبار χ^2 للإشارة معطى بمنطقة الرفض (اختبار ذو جانبين):

$$G_{1\alpha} = \left\{x : X_n^2(h_1) \geq \chi_{\alpha,1}\right\} \tag{8.2.9}$$

مثـال 2.2.9

لتكن لدينا معطيات المثال (1.1.9)، ونريد اختبار فرضية العدم $H_0 : \tilde{\mu} = 69$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \tilde{\mu} \neq 69$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.10$.

نلاحظ أن $n = 51$ و $h_1 = 18$، وبالتالي القيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار

: $X_n^2(\upsilon_1)$

$$X_n^2(\upsilon_1) = \frac{(18-25.5)^2}{12.75} = 4.41$$

ومن جدول χ^2 بدرجة حرية واحدة ومستوى معنوية (دلالة) $\alpha = 0.10$ نجد $\chi^2_{0.10:1} = 2.706$. وبما أن $\chi_n^2(h_1) > \chi^2_{0.10:1}$ نرفض فرضية العدم H_0. وبمقارنة هذه النتيجة بتلك التي توصلنا إليها في المثال (1.1.9) يبدو أن هنالك تناقضاً للوهلة الأولى، لكن هذه غير صحيح. حيث في المثال (1.1.9) كانت المقارنة بين التكرارات المشاهدة والمتوقعة لأربع فئات والفرق لم يتجاوز 7 ويمكن تفسيره نتيجة لعوامل عشوائية. بينما في المثال الحالي (2.2.9) فإن المقارنة بين التكرارات المتوقعة والمشاهدة لفئتين والفرق يتجاوز 8 وبالتالي لا يمكننا تفسيره نتيجة لعوامل عشوائية.

يمكن استخدام اختبار الإشارة السابق في حالة العينات العشوائية المزدوجة أو التزاوجية Paired comparison. لنفترض لدينا أزواج المشاهدات العشوائية $((X_1,Y_1),....,(X_n,Y_n))$ من مجتمعين مستمرين بوسيطين هما $\tilde{\mu}_1$، $\tilde{\mu}_2$، أي أن العينة العشوائية $(X_1,...,X_n)$ من توزيع مستمر $\mathcal{L}(\xi_1)$ وسيطه $\tilde{\mu}_1$ والعينة العشوائية $(Y_1,...,Y_n)$ من توزيع مستمر $\mathcal{L}(\xi_2)$ وسيطه $\tilde{\mu}_2$. ونريد اختبار ما إذا كان $H_0 : \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ ضد فرضية بديلة H_1. يتم اختبار هذه الفرضية على النحو الآتي:

نشكل الفروقات $Z_i = X_i - Y_i \,; i = 1,...,n$. عندئذٍ، إذا كانت فرضية العدم H_0 صحيحة، فإن $P(Z_i < 0) = P(Z_i > 0) = 1/2$، واختبار الفرضية H_0 يؤول إلى اختبار أن العينة العشوائية $(Z_1,...,Z_n)$ مأخوذة من توزيع مستمر وسيطه $\tilde{\mu} = 0$. وفي هذه الحالة الإحصاء υ_1 عبارة عن عدد القيم السالبة (الإشارات السالبة) ضمن فئة القيم $Z_1,...,Z_n$ وبالتالي نتبع نفس الخطوات المبينة في اختبارات الإشارة السابقة.

مثال 3.2.9

لدراسة تأثير نوعين من المهدئات A, B على المرضى، أخذت عينة عشوائية مؤلفة

من 20 مريض قسموا عشوائياً إلى فئتين متساويتين، وأعطيت الفئة الأولى المهدئ A والفئة الثانية المهدئ B. ويبين الجدول التالي الزيادة في مدة النوم بالساعات (بدقة 0.1).

A :	1.9	-0.8	1.1	0.1	-0.1	4.4	3.7	1.6	4.6	2.5
B :	0.7	-1.6	-0.2	-1.2	-0.1	3.4	5.5	0.8	3.4	3.5

هل المهدئ A أفضل من المهدئ B؟ اختبر ذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

لدينا أزواج المشاهدات العشوائية:

$$(1.9,0.7) \quad (-0.8,-1.6) \quad (1.1,-0.2) \quad (0.1,-1.2) \quad (-0.1,-0.1)$$
$$(4.4,3.4) \quad (3.7,5.5) \quad (1.6,0.8) \quad (4.6,3.4) \quad (2.5,3.5)$$

لنفترض أن:

$\tilde{\mu}_1$ وسيط الزيادة في ساعات النوم الذي يسببه المهدئ A.

$\tilde{\mu}_2$ وسيط الزيادة في ساعات النوم الذي يسببه المهدئ B.

ويصبح المطلوب اختبار $H_0 : \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \tilde{\mu}_1 > \tilde{\mu}_2$. أي أن القيم الصغيرة لـ v_1 لصالح الفرضية البديلة، ومن ثم منطقة الرفض من الشكل:

$$G_1 = \{z : h_1 \le c\}$$

وحيث إن أحد الأزواج هو $(-0.1,-0.1)$ فنهمله، وبذلك يكون حجم العينة العشوائية $n = 9$.

نشكل الفروقات $Z_i = X_i - Y_i \,;\, i = 1,\dots,9$:

$$z_i : 1.2\ ,\ 0.8\ ,\ 1.3\ ,\ 1.3\ ,\ 1.0\ ,\ -1.8\ ,\ 0.8\ ,\ 1.2\ ,\ -1.0$$

نلاحظ أن عدد القيم السالبة (عدد الإشارات السالبة) $h_1 = 2$، ونرفض فرضية العدم $H_0 : \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ إذا كان $h_1 \le c$ حيث c تتحدد من العلاقة:

$$\sum_{0}^{c} C_j^9 (1/2)^9 = 0.05$$

لكن لا يوجد عدد صحيح $c = c_\alpha$ يحقق هذا الشرط، لذا فالاختبار المطلوب عشوائي ويعطى بدالة الرفض:

$$\varphi(z) = \begin{cases} 1 & ; \quad h_1 < c_\alpha \\ \gamma & ; \quad h_1 = c_\alpha \\ 0 & ; \quad h_1 > c_\alpha \end{cases}$$

وتتعين $c = c_\alpha$ من الشرط:

$$P(v_1 \le c - 1 | H_0) + \gamma P(v_1 = c) = 0.05$$

ومن جدول ذي الحدين $n = 9$ نجد أن القيمتين 2، 3 تحصران بينهما الاحتمال 0.05، وبالتالي $c_\alpha = 3$ و $\gamma \approx 0.12$. وبما أن $h_1 = 2 < c_\alpha = 3$ نرفض الفرضية $H_0 : \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ لصالح الفرضية $\tilde{\mu}_2 > \tilde{\mu}_1$، وهذا يعني أن تأثير المهدئ A أفضل من تأثير المهدئ B في زيادة عدد ساعات النوم.

نلاحظ أن اختبار الإشارة هنا يحدد أياً من المجتمعين المأخوذة منهما العينتان هو الأكبر في الوسيط، ولكنه لا يحدد مقدار الفرق بينهما.

يستخدم غالباً في التطبيق اختبار الإشارة في الحالة التالية:

لتكن $((X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n))$ عينة عشوائية من توزيع احتمالي ذي بعدين $\mathcal{L}(\xi = (\xi_1, \xi_2))$. ويطلب اختبار فرضية العدم H_0 حول استقلال المركبتين ξ_1، ξ_2 وأن لهما نفس التوزيع، أي أن:

$$H_0 : F_\xi(x, y) = F(x)F(y)$$

حيث إن $F(.)$ توزيع ما وحيد البعد. واختبار هذه الفرضية يتم على النحو الآتي: تشكيل الفروقات $Z_i = X_i - Y_i \, ; i = 1, \ldots, n$. عندئذ، إذا كانت فرضية العدم صحيحة، فإن $P(Z_i < 0) = P(Z_i > 0) = 1/2$ والفرضية H_0 تؤول إلى اختبار أن العينة

$(Z_1,...,Z_n)$ مأخوذة من توزيع وسيطه يساوي الصفر. وعندئذٍ الإحصاء v_1 عبارة عن عدد القيم السالبة ضمن فئة القيم $Z_1,...,Z_n$، ومن ثم نتبع الخطوات الواردة سابقاً.

نلاحظ مما سبق أن اختبار الإشارة بسيط للغاية، حيث لا يتطلب حسابات معقدة. لكن من سلبياته الأساسية أنه يعتمد فقط على إشارات الفروقات ولا يأخذ بالاعتبار مقدار تلك الفروقات، أي لا يستخدم إلا بعض المعلومات المتوفرة في العينة العشوائية المشاهدة.

2.2.9 اختبار الرتب Rank Test

هنالك اختبار آخر لامعلمي أكثر حساسية من اختبار الإشارة للكشف عن وجود فرق بين وسيط المجتمع $\tilde{\mu}$ والقيمة المفترضة $\tilde{\mu}_0$، حيث أنه يأخذ بالاعتبار كلاً من إشارة ومقدار الفرق. وهذا الاختبار يدعى باختبار ويلكوكسن Wilcoxon test أو اختبار الرتب Rank test.

لتكن $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع مستمر $\mathcal{L}(\xi)$ غير معلوم، ونريد اختبار فرضية العدم $H_0:\tilde{\mu}=\tilde{\mu}_0$ مقابل فرضية بديلة H_1 عند مستوى معنوية α.

يبدأ اختبار ويلكوكسن بإهمال الفروق $d_i=X_i-\tilde{\mu}_0$ المساوية للصفر، ثم ترتيب الفروق الباقية بصرف النظر عن إشاراتها، أي الترتيب حسب القيم المطلقة لهذه الفروق، فتعطى الرتبة 1 لأصغر فرق في القيمة المطلقة وتعطى الرتبة 2 للفرق المطلق التالي في الكبر وهكذا. وحين تتساوى القيم المطلقة لاثنين أو اكثر من هذه الفروق يعطى لكل منها متوسط الرتب التي كانت ستعطى لو كانت هذه الفروق مختلفة.

إذا كانت فرضية العدم H_0 صحيحة نتوقع أن يكون مجموع الرتب المناظرة للفروق الموجبة مساوياً تقريباً لمجموع الرتب المناظرة للفروق السالبة. لنرمز لهذين المقدارين بـ S^+, S^- على الترتيب، وليكن:

$$t_m = \min(S^-, S^+)$$

نظراً لأن t_m تتغير من عينة إلى أخرى من نفس الحجم ومأخوذة من مجتمع واحد فإننا ننظر إليها على أنها قيمة مشاهدة لمتغير عشوائي T (مجموع الرتب المناظرة للفروقات الموجبة أو السالبة الموافقة لعينة عشوائية X)، بحيث تأخذ T تساوي مجموع الرتب المناظرة للفروقات الموجبة عندما $t_m = S^+$ و T تساوي مجموع الرتب المناظرة للفروقات السالبة عندما $t_m = S^-$، أي T ترمز لأصغر مجموع لرتب الفروقات الموافق لأحد النوعين (سالبة أو موجبة).

إذا كانت T تمثل مجموع الرتب المناظرة للفروقات الموجبة ($S^+ < S^-$) ورمزنا بـ:

$$Z_i = \begin{cases} 1 & ; \quad X_i - \tilde{\mu}_0 > 0 \\ 0 & ; \quad X_i - \tilde{\mu}_0 < 0 \end{cases}$$

فإن المتغير العشوائي Z_i، عند صحة فرضية العدم $H_0 : \tilde{\mu} = \tilde{\mu}_0$، يخضع لتوزيع بيرنولي $B(1,0.5)$. وعندئذٍ يمكن كتابة T على الصورة:

$$T = T(X) = \sum_{i=1}^{n} iZ_i = Z_1 + 2Z_2 + ... + nZ_n \qquad (1)$$

ويكون متوسط وتباين T، عند صحة الفرضية H_0:

$$E_0T = E(T|H_0) = \sum_{i=1}^{n} iE_0Z_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{4} \qquad (2)$$

$$V_0T = \text{var}(T|H_0) = \sum_{i=1}^{n} i^2V_0Z_i = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} \qquad (3)$$

لأن المتغيرات $Z_i \, ; i = 1,...,n$ مستقلة بناءً على استقلال المتغيرات $X_i \, ; i = 1,...,n$.

وبشكل مشابه إذا كانت T تمثل مجموع الرتب المناظرة للفروقات السالبة وهذا يعني أن $S^- < S^+$، ورمزنا بـ:

$$Z_i = \begin{cases} 1 & ; \quad X_i - \tilde{\mu}_0 < 0 \\ 0 & ; \quad X_i - \tilde{\mu}_0 > 0 \end{cases}$$

فالعلاقات (1 ، 2 ، 3) صحيحة، عند صحة الفرضية H_0 .

يبنى اختبار الرتب على الإحصاء $T(X)$، ويعطى بمنطقة رفض، في حالة اختبار وحيد الجانب، من الشكل:

$$G_1 = \{x : T(x) \le c\} \qquad (9.2.9)$$

ويتعين الثابت c من العلاقة:

$$P(T(X) \le c | H_0) = \alpha \qquad (10.2.9)$$

حيث إذا كانت T تمثل مجموع الرتب المناظرة للفروقات السالبة فالرفض يكون لصالح الفرضية البديلة $H_1 = H_1^+ : \tilde{\mu} > \tilde{\mu}_0$ ، بينما إذا كانت T تمثل مجموع الرتب المناظرة للفروقات الموجبة فالرفض يكون لصالح الفرضية البديلة $H_1 = H_1^- : \tilde{\mu} < \tilde{\mu}_0$. أما إذا كانت الفرضية البديلة ذات جانبين $H_1 : \tilde{\mu} \ne \tilde{\mu}_0$ ، فالاختبار يعطى بمنطقة رفض من الشكل:

$$G_1 = \{x : T(x) \le c\} \qquad (11.2.9)$$

ويتعين الثابت c من العلاقة:

$$P(T(X) \le c | H_0) = \frac{\alpha}{2} \qquad (12.2.9)$$

حيث إن T مجموع الرتب المناظرة للفروق السالبة أو الموجبة.

إن تعيين الحد الحرج c لكل من منطقتي الرفض (9.2.9) و (10.2.9) يتطلب معرفة توزيع إحصاء الرتب T تماماً (أو تقريباً)، عند صحة الفرضية H_0 . ونظراً لصعوبة إيجاد توزيع T من أجل $n \le 30$ فقد أعدت له جداول خاصة، ومنها الجدول (6) بملحق

هذا الكتاب، تعطي قيم c المحققة للعلاقة:

$$P(T \le c|H_0) \le \alpha < P(T \le c+1|H_0)$$

والموافقة لقيم $n = 5,6,...,30$ عند مستويات المعنوية $\alpha = 0.01, 0.025, 0.05, 0.10$ للاختبارات ذات الجانب الواحد (من اليمين أو اليسار)، وكذلك قيم c المحققة للمتباينة المزدوجة:

$$P(T(X) \le c|H_0) \le \frac{\alpha}{2} < P(T(X) \le c+1|H_0)$$

من أجل $n = 5,...,30$ عند مستويات المعنوية $\alpha = 0.02, 0.05, 0.10$ للاختبارات ذات الجانبين.

وفي الحالة التي تكون فيها $n \ge 30$ يمكن إثبات، باستخدام إحدى صيغ مبرهنات النهاية المركزية، أن T يتبع تقريباً توزيع طبيعي بمتوسط E_0T وتباين V_0T، أي أن:

$$\mathcal{L}_0(T) = \mathcal{L}(T|H_0) \approx N\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}\right)$$

ومن ثم:

$$\mathcal{L}\left(Z = \frac{T - E_0T}{\sqrt{V_0T}}\right) \approx N(0,1)$$

وبالتالي تحسب c من العلاقة $\Phi\left(\frac{c - E_0T}{\sqrt{V_0T}}\right) = \alpha$ في حالة اختبار وحيد الجانب، ومن العلاقة $\Phi\left(\frac{c - E_0T}{\sqrt{V_0T}}\right) = \frac{\alpha}{2}$ في حالة اختبار ثنائي الجانب. أو يمكن استبدال إحصاء الاختبار T بالإحصاء Z، وعندئذٍ الحد الحرج يتعين من العلاقة:

$$\Phi(z_\alpha) = \alpha \quad \text{or} \quad \Phi(z_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$$

ومن ثم منطقة الرفض في حالة اختبار وحيد الجانب تعطى على النحو الآتي:

$$G_{1\alpha} = \{z : z \le z_\alpha\}$$

بينما في حالة اختبار ثنائي الجانب:

$$G_{1\alpha} = \{z : z \le z_{\alpha/2}\}$$

مثـــال 4.2.9

أخذت عينة عشوائية من 17 طالباً من طلاب إحدى الجامعات وقيست أوزانهـــــم بالكيلو غرام (مقربة إلى أقرب عدد صحيح) فكانت كما يلي:

69	61	70	72	68	78	72	82	66
64	65	76	77	71	69	68	59	

اختبر الفرضية القائلة أن وسيط أوزان طلاب تلك الجامعة $H_0 : \tilde{\mu} = 70\ kg$ ضـــد الفرضية البديلة $\tilde{\mu} < 70\ kg$، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

حيث إن هناك مشاهدة قيمتها تساوي 70 فإننا نهملها ونجري الاختبار على أســـاس $n = 16$. ولحساب القيمة المشاهدة لإحصاء الاختبار T نتبع الخطوات الآتية:

1. نحسب الفروقات المشاهدة $x_i - 70 ; i = 1,...,16$ مع الاحتفاظ بالإشارة الموجبـــة أو السالبة كما هو مبين في العمود الثاني والخامس من الجدول (1.2.9).

2. نرتب الفروق الناتجة وفقاً لقيمها المطلقة من الأصغر إلى الأكبر ونضع أمام كـــل فرق الرتبة الموافقة كما هو مبين في العمودين (3 ، 6) في الجدول (1.2.9).

3. نحسب كلاً من S^-, S^+ فنجـــد $S^+ = 64.5$ و $S^- = 71.5$ ومـــن ثم القيمـــة الملاحظة لإحصاء الاختبار $t_m(x) = \min(71.5;64.5) = 64.5$.

4. من الملحق، الجدول (6)، وعند $n = 16$ ، $\alpha = 0.05$ نجد $c_\alpha = 36$.

بما أن $t_m = 64.5 > c_\alpha = 36$ نقبل الفرضية $H_0 : \tilde{\mu} = 70\ kg$.

جدول (1.2.9)

(1) المشاهدات x_i	(2) الفروقات $x_i - 70$	(3) الرتب	(4) المشاهدات x_i	(5) الفروقات $x_i - 70$	(6) الرتب
69	- 1	2	64	- 6	10.5
61	- 9	14	65	- 5	9
72	+ 2	5.5	76	6	10.5
68	- 2	5.5	77	7	12
78	8	13	71	1	2
72	+ 2	5.5	69	- 1	2
82	12	16	68	- 2	5.5
66	- 4	8	59	- 11	15

يمكن استخدام اختبار الرتب للمقارنات التزاوجية لاختبار فرضية العدم $H_0 : \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$.

لنفترض حصلنا على n من أزواج المشاهدات (X_i, Y_i) على متغير عشوائي مستمر $\xi = (\xi_1, \xi_2)$، حيث وسيط المتغير ξ_1 هو $\tilde{\mu}_1$ ووسيط المتغير ξ_2 هو $\tilde{\mu}_2$ ونريد اختبار تساوي الوسيطين $\tilde{\mu}_2$، $\tilde{\mu}_1$. نشكل الفروقات $d_i = X_i - Y_i \,; i = 1, \ldots, n$ مع إهمال الفروقات المساوية للصفر، ثم نطبق الخطوات الواردة في اختبارات الرتب.

مثال 5.2.9

لتكن لدينا أزواج المشاهدات التالية على متغير عشوائي مستمر $\xi = (\xi_1, \xi_2)$:

(2.68,2.36) , (2.60,2.41) , (2.43,2.39) , (2.90,2.85) , (2.94,2.82)
(2.70,2.73) , (2.68,2.58) , (2.98,2.89) , (2.85,2.78) ,

ونريد اختبار فرضية العدم $H_0 : \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

بإتباع خوارزمية بناء اختبار الرتب نحصل على الجدول الآتي:

الفروقات $d_i = x_i - y_i$	الرتب	الفروقات $d_i = x_i - y_i$	الرتب
0.32	9	- 0.03	1
0.19	8	0.10	6
0.04	2	0.09	5
0.05	3	0.07	4
0.12	7		

يلاحظ $S^- = 1$ ، $S^+ = 44$ ، أي أن $t_m = 1$. ومن الجدول 6 (الملحق)، عندما $n = 9$ و $\alpha = 0.01$ ، نجد القيمة الحرجة $c_\alpha = 3$. وبما أن $t_m < 3$ نرفض فرضية العدم $H_0 : \tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_2$.

تمارين

1. أخذت عينة عشوائية من توزيع مستمر غير معلوم $\mathcal{L}(\xi)$ ، فكانت القيم الملاحظة على النحو الآتي (مرتبة تصاعدياً):

0.024	0.026	0.050	0.077	0.126	0.153	0.178	0.204
0.230	0.250	0.280	0.300	0.330	0.390	0.414	0.440
0.470	0.500	0.555	0.610	0.644	0.670	0.700	0.740
0.770	0.810	0.840	0.910	0.990	1.040	1.080	1.130
1.180	1.228	1.350	1.400	1.480	1.560	1.164	1.175
1.178	1.800	1.820	1.900	2.060	2.200	2.810	3.000
3.210	4.000						

اختبر فرضية العدم:

$$H_0 : F(0.126) = 0.55 , F(0.524) = 0.70 , F(1.282) = 0.90 , F(1.645) = 0.95$$

عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

2. إذا كانت لديك معطيات التمرين السابق، فاختبر الفرضية $H_0 : \tilde{\mu} = 0.80$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \tilde{\mu} > 0.80$ بتطبيق اختبار الإشارة عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

3. الأعداد الآتية هي 20 قياساً عشوائياً لمعدلات الأوكتين في نوع من الجازولين:

92.7	94.8	96.9	99.8	96.3	95.5	96.8	94.7	97
94.4	98.0	97.7	97.1	95.6	86.6	91.2	89.4	99.0

اختبر، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$، فرضية العدم $H_0 : \tilde{\mu} = 98$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \tilde{\mu} < 98$.

4. في إحدى التجارب المعملية نتجت 18 قيمة لمعامل الاحتكاك بين الجلد وأحد المعادن فكانت على النحو الآتي:

0.55	0.60	0.58	0.62	0.55	0.57	0.53	0.48	0.60
0.55	0.58	0.56	0.57	0.51	0.56	0.55	0.52	0.58

اختبر صحة القول أن وسيط معامل الاحتكاك هو $\tilde{\mu} = 0.55$ مقابل القول أن وسيط معامل الاحتكاك $\tilde{\mu} \neq 0.55$. وذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

5. أخذت عينة عشوائية من 15 زوج وزوجة وسجلت أوزانهم مقدرة بأقرب كيلوغرام، فكانت على النحو الآتي:

(64,64)	(66,64)	(63,62)	(61,59)	(64,62)
(69,69)	(72,65)	(60,61)	(78,70)	(68,57)
(70,70)	(80,60)	(82,66)	(92,70)	(80,85)

إذا كانت الفاصلة الأولى في كل ثنائية تعبر عن وزن الزوج، فهل يمكن القول أن أوزان الأزواج في المجتمع الذي سحبت منه تلك العينة العشوائية أكبر بشكل عام من أوزان الزوجات عند مستوى معنوية $\alpha = 0.10$.

6. لتكن لدينا معطيات التمرين (1) ونريد اختبار الفرضية $H_0 : \tilde{\mu} = 0.80$ مقابل الفرضية البديلة $H_1 : \tilde{\mu} \neq 0.80$ بتطبيق اختبار الرتب عند مستوى معنوية $\alpha = 0.10$، فما هو قرارك في هذا الشأن؟

الفصل العاشر:

اختبارات التماثل في منظومة مبوبة بازدياد عدد الفترات

1.10 اختبار التوافق χ^2 من أجل توزيعات مستمرة

لنعد إلى مسألة اختبار فرضية بسيطة:

$$H_0 : F_\xi(x) = F_0(x) \qquad (1.1.10)$$

حول شكل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الملاحظ ξ، بافتراض أن دالـــة التوزيـــع $F_0(x)$ مستمرة. وفي هذه الحالة لتطبيق اختبار χ^2 بيرسون الوارد في البند (2.8) ينصح عادة اختيار فترات التصنيف $\zeta_1,...,\zeta_k$ متساوية الاحتمالات عند فرضية العدم H_0، أي بحيث يكون $p_{j0} = P(\xi \in \zeta_j | H_0) = 1/k \ ; j = 1,...,k$. في هذه الحالة:

$$\zeta_j = (z_{j-1}, z_j] \quad ; \quad j = 1,...,k \quad , \quad z_0 = -\infty \ , \ z_k = \infty \qquad (2.1.10)$$

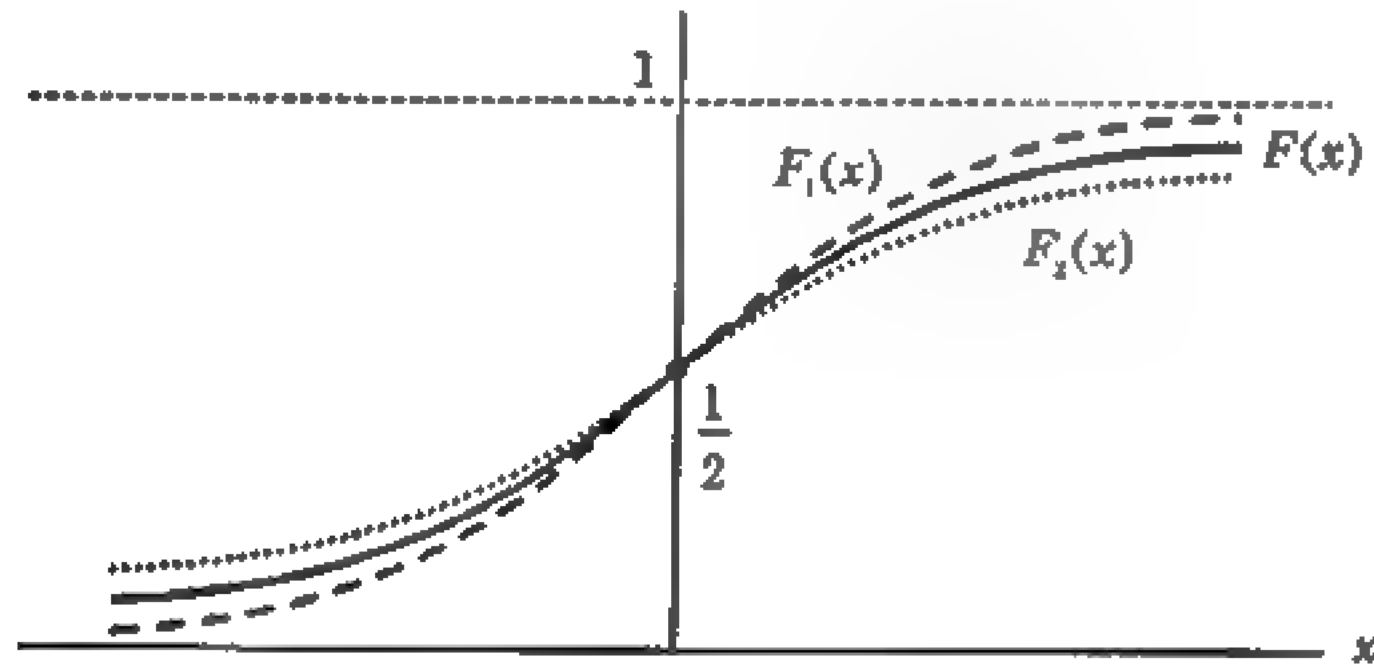
حيث إن $F_0(z_j) = j/k \ ; j = 1,...,k-1$، واختيار التوافق χ^2 يعتبر، من حيث الجوهـــر، اختبار قيم حرجة [راجع البند (1.9)]. لكن هذا الاختبـــار يـــأخذ بالاعتبـــار فقـــط احتمالات أن يفترض المتغير ξ قيمة في فترات التصنيف (التبويب)، لذا حسب اختبـــار χ^2 كل التوزيعات المستمرة، ذات القيم الحرجة المبينة، غير مختلفة. هكذا، عند اســتخدام

اختبار χ^2 فإن مسألة اختبار الفرضية البسيطة المعرفة بالعلاقة (1.1.10) تستبدل بمسألة اختبار فرضية ما مركبة، تشتمل على كل دوال التوزيع المختلفة التي لها نفس القيم الحرجة $z_1,...,z_{k-1}$، ومنها دالة التوزيع $F_0(x)$. يمكن القول إنه في حالة استخدام طريقة اختبار χ^2 في مسألة اختبار الفرضية $H_0 : F_\xi(x) \equiv F_0(x)$ نحصل على اختبار توافق لا يدرك كل تلك الانحرافات عن فرضية العدم H_0، طالما أن التوزيع $\mathcal{L}(\xi)$ يحافظ على القيم الحرجة $z_1,...,z_{k-1}$، وهذا يعني من أجل أي توزيع F_ξ محقق للشرط $F_\xi(z_j) = j/k \; ; \; j = 1,...,k-1$ فإن العلاقة:

$$P\left(X_n^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{(v_j - n/k)^2}{n/k} \geq \chi^2_{\alpha;k-1} \middle| F_\xi\right) \to \alpha$$

محققة عندما $n \to \infty$.

إن اختبار χ^2 غير متسق عند البدائل $F_\xi \neq F(x)$ التي لها نفس القيم الحرجة المعطاة (في هذا المجال، إن اختبار كالماغوروف للتوفيق، بند (1.8)، يعتبر متسقاً عند أي بديل $F_\xi \neq F$). فمثلاً، مبين على الشكل (1.1.10) منحنيات ثلاثة دوال توزيع لها نفس الوسيط وهو $x = 0$.



شكل (1.1.10)

إذا كانت $k = 2$ (فترتين متساويتي الاحتمال) واستخدمنا طريقة χ^2 لاختبار

الفرضية $H_0 : F_\xi(x) \neq F_0(x)$ ، فحسب الاختبار الموافق دوال التوزيع الثلاث المبينة على الشكل (1.1.10) لن تكون مختلفة. هذا القصور في اختبار χ^2 يمكن تقليصه بزيادة عدد الملاحظات مع ازدياد عدد فترات التصنيف، لأن ذلك يقلص صف دوال التوزيع غير المختلفة عن $F_0(x)$ وفق اختبار χ^2. لكن عندئذٍ تطبيق اختبار χ^2 يصبح صعباً؛ لأن حساب ومعالجة (عندما تكون k كبيرة) عدد كبير من التكرارات $\upsilon_1,...,\upsilon_k$ تعتبر مسألة حسابية معقدة. بالإضافة لذلك، إن المبرهنة (2.3.5)، المعرفة للتوزيع المقارب للإحصاء X_n^2 ، عند الفرضية H_0 ، صحيحة فقط عند قيم محددة للمعالم $k; p_{10},..., p_{k0}$ ، وبالتالي لا يجوز استخدام التوزيع المقارب $\chi^2_{(k-1)}$ لتعيين الحد الحرج للاختبار عندما $k \to \infty$.

إن الخروج من هذه الحالة المتناقضة يمكن إيجاده بتشكيل (تصميم) إحصاء اختبار أكثر بساطة من إحصاء الاختبار X_k^2 المعرف بالعلاقة (1.2.8)، الذي يأخذ بالاعتبار الزيادة غير المحدودة للمعلمتين n و k في آن واحد. إن النتائج الواردة أدناه تعطي الإجابة على هذه الإشكالات.

2.10 الإحصاء المتماثل لمنظومة مبوبة

لتكن الفترات $\zeta_1,...,\zeta_k$ المعرفة في العلاقة (2.1.10) متساوية الاحتمالات، عند صحة فرضية العدم H_0 ، و $\upsilon = (\upsilon_1,...,\upsilon_k)$ متجه التكرارات لوقوع عناصر العينة العشوائية $X = (X_1,..., X_n)$ في هذه الفترات.

لنرَ صف الإحصاءات من الشكل:

$$S_{nk}(g) = \sum_{j=1}^{k} g(\upsilon_j) \qquad (1.2.10)$$

حيث إن $g(x)$ دالة معطاة ومعرفة عند كل القيم الصحيحة غير السالبة $x = 0,1,2,...$.

وفي عبارة $S_{nk}(g)$ كل التكرارات $v_1,...,v_k$ متماثلة، لذا يدعى مثل هذا الإحصاء بـ "الإحصاء المتماثل".

إذا أخذنا:

$$g(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x=r\\ 0 & ; \quad x\neq r\end{cases}$$

حيث إن $r\in\{0,1,...,n\}$، فإنه من الواضح أن $S_{nk}(g)$ تساوي عدد الفترات ضمن $\zeta_1,...,\zeta_k$ التي تشتمل كل منها على r نقطة عينة (عناصر العينة X) . ومثل هذا الإحصاء سنرمز له بـ $\mu_r=\mu_r(n,k)$. هكذا، كل منظومة تبويب مرتبطة بمجموعة من الإحصاءات المتماثلة $\mu_0,\mu_1,...,\mu_n$. ومن الواضح أن هذه الإحصاءات تحقق العلاقتين الخطيتين:

$$\sum_{r=0}^{n}\mu_r(n,k)=k \quad , \quad \sum_{r=0}^{n}r\mu_r(n,k)=n \tag{2.2.10}$$

وباستخدام الإحصاءات $\mu_r\ ; r=0,...,n$ يمكن كتابة الصيغة (1.2.10) على الصورة:

$$S_{nk}(g)=\sum_{r=0}^{n}g(r)\mu_r \tag{3.2.10}$$

وينتج من ذلك أن كل إحصاء متماثل عبارة عن تركيبة خطية بالإحصاءات $\mu_0,\mu_1,...,\mu_n$. والعكس صحيح، أي كل تركيبة خطية لهذه الإحصاءات عبارة عن إحصاء متماثل. فعلاً:

$$\sum_{r=0}^{n}c_r\mu_r=\sum_{j=1}^{k}g(v_j) \quad ; \quad g(r)=c_r \quad , \quad r=0,1,...,n$$

هكذا، صف الإحصاءات المتماثلة ينطبق على صف كل التراكيب الخطية للمقادير

$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n$.

نشير هنا أن الإحصاء X_n^2 المعرف بالعلاقة (1.2.8)، في حالة فترات متساوية الاحتمالات، عبارة عن إحصاء متماثل يوافق $g(x) = kx^2/n - x$.

3.10 اختبار الصناديق الفارغة

يعتبر المقدار μ_0 أبسط إحصاء متماثل، الذي يعين عدد الفترات التي لا تشتمل على أي عنصر من عناصر العينة العشوائية X. ويدعى الاختبار المبني على هذا الإحصاء باختبار الصناديق الفارغة.

لنحسب العزم الابتدائي الأول والثاني للإحصاء μ_0 من أجل توزيع ما للمتغير العشوائي الملاحظ ξ وليكن F_ξ. لنعرف من أجل ذلك متغيرات عشوائية $\eta_1, \dots, \eta_k$ على النحو الآتي:

$\eta_j = 1; j = 1, \dots, k$ إذا كانت الفترة ζ_j لا تشتمل على أي عنصر من عناصر العينة العشوائية X (ζ_j فارغة) وأن $\eta_j = 0$ في الحالات الأخرى، أي أن η_j يخضع لتوزيع بيرنولي $B(1, P(\eta_j = 1))$. وعلى ذلك فإن المتغير العشوائي $\mu_0 = \eta_1 + \dots + \eta_k$. وبالتالي:

$$E\mu_0 = \sum_{j=1}^{k} E\eta_j = \sum_{j=1}^{k} P(\eta_j = 1) \tag{1}$$

$$V_0\mu_0 = \sum_{j=1}^{k} V\eta_j + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(\eta_i, \eta_j) \tag{2}$$

$$= \sum_{j=1}^{k} P(\eta_j = 1)(1 - P(\eta_j = 1)) + 2\sum_{i<j}\left[P(\eta_i = \eta_j = 1) - P(\eta_i = 1)P(\eta_j = 1)\right]$$

لكن المركبات $X_i; i = 1, \dots, n$ مستقلة (X عينة عشوائية). لذا، فإن:

$$P(\eta_j = 1) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \notin \xi_j) = (1-p_j)^n \quad ; \quad p_j = P(X_i \in \xi_j) \;\; ; \;\; i = 1,\dots,n$$

$$P(\eta_i = \eta_j = 1) = (1 - p_i - p_j)^n$$

وبالتعويض في (1) و (2) نجد:

$$E\mu_0 = \sum_{j=1}^{k} (1-p_j)^n$$
$$\operatorname{var}\mu_0 = 2\sum_{i<j}^{k} (1-p_i-p_j)^n + E\mu_0 - (E\mu_0)^2 \qquad (1.3.10)$$

باستخدام طريقة مضاريب لاغرانج غير المحدودة، يمكن إثبات وبسهولة أن المتوسط $E\mu_0$، كدالة في المعالم $p_1,\dots,p_k$، يبلغ نهايته الصغرى عند $p_1 = \dots = p_k = 1/k$، أي عندما $F_\xi(x) \equiv F_0(x)$.

وفي هذه الحالة تكتب الصيغتان (1.3.10) على الصورة:

$$E\mu_0 = k\left(1-\frac{1}{k}\right)^n$$
$$V\mu_0 = k(k-1)\left(1-\frac{2}{k}\right)^n + k\left(1-\frac{1}{k}\right)^n - k^2\left(1-\frac{1}{k}\right)^{2n} \qquad (2.3.10)$$

هكذا، عند أي انحراف عن فرضية العدم H_0 (احتمالات فترات التبويب ليست كلها تساوي $1/k$) فالإحصاء μ_0 يملك منحى متزايداً، أي أن القيم الكبيرة لـ μ_0 لصالح الفرضية البديلة (ضد H_0). وعلى ذلك فإن منطقة الرفض لاختبار فرضية العدم $H_0 : F_\xi(x) \equiv F_0(x)$، عند مستوى معنوية α، والمبنية على إحصاء الاختبار μ_0 هي:

$$G_{1\alpha} = \{\mu_0 \geq t_\alpha(n,k)\} \qquad (3.3.10)$$

لإيجاد الحد الحرج $t_\alpha(n,k)$ لابد من معرفة توزيع الإحصاء μ_0، عند صحة فرضية العدم H_0. إن التوزيع الحقيقي لإحصاء الاختبار μ_0 له صيغة معقدة وليس سهلاً من

أجل الحسابات التطبيقية. لكن إذا كانت n و k كبيرتين في آن واحد، فإن المتغير العشوائي μ_0 له توزيع مقارب بسيط عند أي توزيع ملاحظة مستمرة F_ξ (ليس فقط من أجل $F_\xi \equiv F_0(x)$). وهذا التوزيع تعطيه المبرهنة اللاحقة (1.3.10). يمكن اعتبار أن كل التوزيعات الاحتمالية معرفة على الفترة $[0,1]$، دون أن يؤثر ذلك على عمومية المسألة، وكتوزيع عند صحة الفرضية H_0 يمكن أخذ التوزيع المنتظم $R(0,1)$. فعلاً، إذا لم يكن ذلك، فيمكن دائماً الانتقال من المتغير العشوائي المستمر ξ إلى المتغير العشوائي $\eta = F(\xi)$ الذي يأخذ قيمه في الفترة $[0,1]$، ويخضع للتوزيع $R(0,1)$ [راجع فقرة (2.3.2-I)]. عندئذٍ $\mathcal{L}(\eta|H_0) = R(0,1)$ ومن أجل أي توزيع بديل F_ξ:

$$P(\eta \le x|F_\xi) = P(F(\xi) \le x|F_\xi) =$$
$$= P(\xi \le F^{-1}(x)|F_\xi) = F_\xi(F^{-1}(x)) \quad , \quad x \in [0,1]$$

هكذا، إذا صيغت فرضية عدم $H_0 : F_\xi(x) \equiv F_0(x)$، فباستخدام المتغير العشوائي $\eta = F_0(\xi)$ تؤول المسألة إلى اختبار فرضية العدم حول التوزيع المنتظم على الفترة $[0,1]$، في هذه الحالة الفترات (2.1.10) تأخذ الشكل:

$$\zeta_j = \left(\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right) \quad ; \quad j = 1,\dots,k$$

ونرمز بـ :

$$p_j = \int_{(j-1)/k}^{j/k} f_\xi(x)dx \quad ; \quad j = 1,\dots,k$$

إلى احتمالات وقوع الملاحظة في فترات التبويب من أجل توزيع كثافته $f_\xi(x)$. نفترض فيما يلي أن الكثافات المقترحة $f_\xi(x) > 0$ ومستمرة.

مبرهنة 1.3.10

لتكن $n,k \to \infty$ بحيث إن $n/k \to \rho > 0$. عندئذٍ:

$$\mathcal{L}\left(\mu_0(n,k)\middle|f_\xi\right) \longrightarrow N\left(km(f_\xi)\,,k\sigma^2(f_\xi)\right)$$

حيث إن:

$$m(f_\xi) = \int_0^1 e^{-\rho f_\xi(x)}dx$$

$$\sigma^2(f_\xi) = \int_0^1 e^{-\rho f_\xi(x)}\left(1-e^{-\rho f_\xi(x)}\right)dx - \rho\left[\int_0^1 f_\xi(x)\,e^{-\rho f_\xi(x)}\,dx\right]^2 \qquad (4.3.10)$$

ومن أجل فرضية العدم $H_0 : f_\xi(x) \equiv 1 ; x \in [0,1]$ ، فإن:

$$\sigma_0^2 = \sigma^2(f_\xi) = e^{-\rho}\left(1-e^{-\rho}(1+\rho)\right) \quad , \quad m(f_\xi) = e^{-\rho}$$

وبالتالي:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\mu_0(n,k)-ke^{-\rho}}{\sqrt{ke^{-\rho}\left(1-e^{-\rho}(1+\rho)\right)}}\;\middle|H_0\right) \longrightarrow N(0,1) \qquad (5.3.10)$$

هذه النتيجة تعطي إمكانية حساب تقريبي للحد الحرج لمنطقة الرفض (3.3.10)، عندما تكون n و k كبيرتين ومستوى معنوية معطاة α:

$$t_\alpha(n,k) = ke^{-\rho} + \sqrt{ke^{-\rho}\left(1-e^{-\rho}(1+\rho)\right)}\,t_\alpha \quad ; \quad \Phi(-t_\alpha) = \alpha \qquad (6.3.10)$$

تعرف العلاقتان (3.3.10) و (5.3.10) اختبار الصناديق الفارغة الذي يصاغ على النحو الآتي: إذا كان عدد الفترات الملاحظة الفارغة يحقق المتباينة $\mu_0 \geq t_\alpha(n,k)$ ، حيث $t_\alpha(n,k)$ تعين من العلاقة (6.3.10)، فإن فرضية العدم H_0 مرفوضة، وخلاف ذلك تعتبر المعطيات غير متعارضة مع فرضية العدم H_0. وفي هذه الحالة احتمال الوقوع في خطأ من النوع I يساوي تقريبا α، إذا كانت n و k كبيرتين بكفاية و $n/k = \rho > 0$.

السلوك المقارب لقوة اختبار الصناديق الفارغة

لا تمكننا المبرهنة (1.3.10) من حساب الحد الحرج $t_\alpha(n,k)$ فقط في اختبار الصناديق الفارغة، بل أيضاً بحث السلوك المقارب لدالة قوة الاختبار $W_n(f)$ عند أي بديل $f(x) \neq f_\xi(x) = 1$.

من العلاقتين (3.3.10) و (5.3.10) نجد:

$$W_n(f) = P\left(\mu_0(n,k) \geq t_\alpha(n,k) \middle| f\right) =$$
$$= P\left(\frac{\mu_0(n,k) - km(f)}{\sqrt{k}\sigma(f)} \geq -z_\alpha(k) \middle| f\right) \approx \Phi(z_\alpha(k)) \qquad (7.3.10)$$

حيث إن:

$$z_\alpha(k) = \sqrt{k}\,\frac{m(f) - e^{-\rho}}{\sigma(f)} - \frac{t_\alpha\sigma_0}{\sigma(f)} \quad ; \quad \sigma_0^2 = e^{-\rho}\left(1 - e^{-\rho}(1+\rho)\right)$$

لكن من أجل أي متغير عشوائي غير سالب η بتوقع رياضي منتهٍ، فإن $E\mu \geq \exp(E\ln\eta)$، والمساواة محققة فقط عندما $\eta = \text{const}$. وبافتراض $\eta = e^{-\rho f(\xi)}$، نجد عندما $\mathcal{L}(\xi) = R(0,1)$:

$$\int_0^1 e^{-\rho f(x)}dx \geq \exp\left[-\rho\int_0^1 f(x)dx\right] = e^{-\rho}$$

والمساواة محققة فقط في حالة $f(x) = \text{const} = 1$ (لأن $f(x)$ دالة كثافة معرفة على الفترة [0,1]). بناءً على ذلك والعلاقة (4.3.10) نجد أنه من أجل أي دالة كثافة بديلة $f(x) \neq 1$ الفرق $m(f) - e^{-\rho} > 0$، لذا $z_\alpha(k)$ في العلاقة (7.3.10)، عندما $k \to \infty$، متزايدة بلا حدود. وبالتالي هذا يعني، حسب العلاقة (7.3.10)، أن:

$$\lim_{k\to\infty} W_n(f) = 1$$

أي أن اختبار الصناديق الفارغة متسق.

هكذا، إذا تحققت شروط المبرهنة (1.3.10)، فإن قوة اختبار الصناديق الفارغة، عند أي بديل معين، ينتهي إلى 1. لكن إذا تغير البديل، عند تغير n و k، مقترباً من الفرضية الأساسية H_0، فإن قوة الاختبار ليست بالضرورة تتقارب من 1، وهذا يتعلق بسرعة اقتراب البديل من فرضية العدم H_0.

تعطي المبرهنة (1.3.10) إمكانية الإجابة على سؤال آخر: بأي سرعة يمكن اقتراب البديل من فرضية العدم H_0 لكي يبقى اختبار الصناديق الفارغة قادراً على الاستجابة لتلك الانحرافات عن فرضية العدم H_0؟. تعتبر البدائل، في الحالة المعطاة، توزيعات مستمرة على الفترة [0,1] ومختلفة عن التوزيع المنتظم $R(0,1)$. وبالتالي البديل القريب F_n يمكن إعطاؤه، فمثلاً، بدالة الكثافة:

$$f_n(x) = 1 + a(n)b(x) \qquad (8.3.10)$$

حيث إن $\lim_{n\to\infty} a(n) = 0$ و $b(x)$ دالة مستمرة محققة للشرط:

$$\int_0^1 b(x)dx = 0$$

هنا $a(n)$ تعين سرعة اقتراب دالة الكثافة البديلة $f_n(x)$ من دالة الكثافة عند فرضية العدم H_0.

وتعتبر المبرهنة التالية نتيجة بسيطة للمبرهنة (1.3.10).

مبرهنة 2.3.10

إذا وضعنا في العلاقة (8.3.10) $a(n) = 1/n^4$، وكان:

$$n,k \to \infty \quad , \quad n/k \to \rho > 0$$

فإن:

$$W_n(f_n) \to \Phi\left(\Delta(b^2,\rho) - t_\alpha\right) \qquad (9.3.10)$$

حيث إن:

$$\Delta(b^2,\rho) = \frac{b^2}{2}\rho^{\frac{3}{2}} \Big/ \sqrt{e^{-\rho}-1-\rho} = b^2\sqrt{\rho 2}e(\rho) \quad ; \quad e(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{2(e^{\rho}-1-\rho)}}$$

$$b^2 = \int_0^1 b^2(x)dx$$

وينتج عن هذه المبرهنة أن اختبار الصناديق الفارغة يدرك اختلاف البدائل عن فرضية العدم H_0، المقتربة منها بسرعة $1/n^4$. والبديل الأقرب من الشكل (8.3.10) (أي عندما $\alpha(n)n^{1/4} \to 0$) لا يدركها هذا الاختبار، أي أن $W_n(f_n) \to \alpha$، ومن أجل البدائل الأبعد (أي أن $\alpha(n)n^{-1/4} \to \infty$) الاختبار يحافظ على صفة الاتساق (أي $W(f_n) \to 1$).

4.10 اختبار التماثل العام

إن اختبار الصناديق الفارغة بسيط للغاية لاستخدامه في التطبيقات، لكن الإحصاء μ_0 لا يشتمل على كل المعلومات المتوفرة في العينة $X = (X_1,...,X_n)$. ومن الواضح لو أخذ إحصاء من الشكل التالي، سيتم استخدام معلومات إحصائية أكثر:

$$T = \sum_{r=0}^{n} c_r \eta_r$$

حيث إن $c_0, c_1, ..., c_r$ أوزان يتم اختيارها بناءً على الشرط التالي: الاختبار الموافق يجب أن تكون له أكبر قوة تقاربية ضمن صف كل الاختبارات المتماثلة.

نشير هنا إلى أنه في شروط المبرهنة (2.3.10) فالاختبار الأقوى تقاربياً ضمن صف الاختبارات المتماثلة هو اختبار χ^2 المبني على الإحصاء:

$$X_n^2 = \frac{k}{n}\sum_{j=1}^{k}\upsilon_j^2 - n = \frac{k}{n}\sum_{j=1}^{n} r^2\mu_r - n$$

ويتعين الحد الحرج لهذا الاختبار من العلاقة:

$$t_\alpha(n,k) = k + \sqrt{2k}\, t_\alpha \quad ; \quad \Phi(-t_\alpha) = \alpha$$

والقوة التقاربية لهذا الاختبار $\Phi\left(b^2\sqrt{\rho/2} - t_\alpha\right)$.

بمقارنة قوة اختبار الصناديق الفارغة بقوة اختبار χ^2 نجد:

$$\Delta(b^2,\rho) = b^2\sqrt{\rho/2}\, e(\rho)$$

وبملاحظة أن الدالة $e(\rho)$ متناقصة في ρ من 1 عندما $\rho = 0$ إلى 0 عندما $\rho = \infty$، أي أن قوة اختبار الصناديق الفارغة يساوي قوة اختبار χ^2 عندما $\rho = 0$. وهذا يعني قوة اختبار الصناديق الفارغة لا تختلف كثيراً عن قوة اختبار χ^2 عند القيم الصغيرة لــــ ρ. لكن تطبيق اختبار χ^2 أصعب نسبياً. وفيما يلي [جدول (1.4.10)] يشتمل على بعض قيم $e(\rho)$.

جدول (1.4.10)

ρ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
$e(\rho)$	0.992	0.982	0.975	0.967	0.950	0.933	0.917	0.900	0.884	0.867
ρ	0.90	1.00	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50	1.60	1.80	2.00
$e(\rho)$	0.851	0.834	0.818	0.802	0.786	0.769	0.753	0.738	0.706	0.675

الفصل الحادي عشر:

اختبارات التجانس

1.11 مقدمة

تعتبر مسألة اختبار تجانس المعطيات الإحصائية إحدى المسائل التطبيقية الهامة جداً في الاستدلال الإحصائي. لنفترض لدينا عينتين عشوائيتين مستقلتين $X=(X_1,\dots,X_{n_1})$ و $Y=(Y_1,\dots,Y_{n_2})$ تصفان عملية أو ظاهرة واحدة، لكن مأخوذتين في وقتين مختلفين أو بشكل عام في ظروف مختلفة، ويطلب الإجابة على السؤال: هي يمكننا اعتبارهما عينة عشوائية واحدة بحجم (n_1+n_2) مأخوذة من توزيع واحد؟ أو هل قانون توزيع الملاحظة لا يتغير من عينة لأخرى؟

مثل هذه المسألة يمكن ظهورها في ميادين مختلفة. فمثلاً، عند مراقبة جودة منتج ما بناءً على معطيات عينتين عشوائيتين من شحنتين مختلفتين يتم إقرار ما إذا كانت الجودة تتغير من فترة لأخرى أو نتيجة لتغيير في العملية التقنية، . . .الخ. وفي الحالة العامة يمكن بحث تجانس أي عددٍ منتهٍ من العينات العشوائية المستقلة.

يمكن -بشكل عام- صياغة المسألة عن النحو الآتي: لتكن $X=(X_1,\dots,X_{n_1})$ عينة عشوائية من توزيع $\mathcal{L}(\xi)$ غير معلوم نرمز لدالة توزيعه بـ $F_1(x)$ و $Y=(Y_1,\dots,Y_{n_2})$ عينة عشوائية من توزيع آخر $\mathcal{L}(\eta)$ غير معلوم أيضاً نرمز لدالة توزيعه بـ $F_2(x)$. ويطلب اختبار فرضية التجانس:

$$H_0: F_1(x)=F_2(x) \quad ; \quad \forall x\in R$$

سنتطرق في البنود التالية لأهم طرق بناء اختبار التوافق لهذه الفرضية.

2.11 اختبار سميرنوف للتجانس SMIRNOV TEST

يعتبر اختبار سميرنوف أحد اختبارات فرضية التجانس الذي يقتصر استخدامه على حالة التوزيعات المستمرة. هذا الاختبار مبني على الإحصاء $T(X,Y) = D_{n_1 n_2}$:

$$D_{n_1 n_2} = \sup_{-\infty<x<+\infty} \left| F^*_{n_1}(x) - F^*_{n_2}(x) \right|$$

حيث إن $F^*_{n_1}(x)\,,F^*_{n_2}(x)$ دالتي التوزيع التجريبيتين الموافقتين للعينتين العشوائيتين $X\,,Y$ على الترتيب.

إذا كانت $F^*_{n_1}(x)$ دالة التوزيع التجريبي للمتغير العشوائي المستمر ξ الموافقة للعينة X، بافتراض المركبات $X_i\,;i=1,\ldots,n_1$ مختلفة، فإن:

$$F^*_{n_1}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < X_{(1)} \\ i/n_1 & ; \quad X_{(i)} < x \le X_{(i+1)} \;\; ; \; i=1,\ldots,n_1 \\ 1 & ; \quad x > X_{(n_1)} \end{cases}$$

حيث $X_{(i)}\,;i=1,\ldots,n_1$ الإحصاء ذو الترتيب i في المتسلسلة المتغيرة للعينة X.

وكانت $F^*_{n_2}(x)$ دالة التوزيع التجريبي للمتغير العشوائي المستمر η الموافقة للعينة العشوائية Y، بافتراض المركبات $Y_j\,;j=1,\ldots,n_2$ مختلفة، فإن:

$$F^*_{n_2}(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x < Y_{(1)} \\ j/n_2 & ; \quad Y_{(j)} < x \le Y_{(j+1)} \;\; ; \; j=1,\ldots,n_2 \\ 1 & ; \quad x > Y_{(n_2)} \end{cases}$$

حيث إن $Y_{(j)}$ الإحصاء ذو الترتيب j في المتسلسلة المتغيرة للعينة Y.

كما نعلم من تعريف دالة التوزيع التجريبي [راجع البند (5.3-I)] أنها عبارة عن إحصاء، عند كل قيمة حقيقية x. هذا بالإضافة إلى أن دالة التوزيع التجريبي مقدّر جيد لدالة التوزيع النظري [راجع المبرهنة (4.14.3-I)]، حيث يتقارب بالاحتمال من دالة التوزيع النظري (التوزيع الذي سحبت منه العينة العشوائية) لجميع قيم $x \in R$. وهذا

يعني بازدياد حجم العينة العشوائية يتقارب التــوزيعان التجريبي والنظري من بعضــهما البعض. لذا، عند صحة الفرضية H_0 ، فإن F_{n_1} , F_{n_2} يقدران دالة توزيع نظري واحــدة غير معلومة ولتكن $F_0(x)$. في مثل هذه الحالة عندما تكون n_1 , n_2 كبيرتين فالإحصــاء $D_{n_1n_2}$ يجب أن لا يختلف كثيراً عن الصفر، وهذا الاختلاف غير جوهري ويعزى لعوامــل الصدفة. لكن إذا كان الاختلاف كبيراً نوعاً ما (قيمة $D_{n_1n_2}$ كبيرة)، فهذه الحقيقة يجــب اعتبارها دليلاً على عدم صحة الفرضية H_0 ، أي أن العينتين مسحوبتان مــن مجتمعــين مختلفين، وبالتــالي دالتي التــوزيع $F_1(x) \neq F_2(x)$ والاختلاف بين المجتمعين جوهــري ويعزى لعوامل نظامية وليس للعوامل العشوائية أو الصدفة.

هكذا، في الحالة المعطاة منطقياً اختيار منطقة الرفض من الشكل:

$$\Im_{1\alpha} = \{t \geq \lambda_\alpha(n_1, n_2)\} \quad ; \quad t = D_{n_1n_2}(x, y) \qquad (1.2.11)$$

ولتعيين الحد الحرج $\lambda_\alpha(n_1, n_2)$ ، الموافق لمستوى معنوية α، يلزمنا معرفة توزيع الإحصــاء $D_{n_1n_2}$ ، عند صحة فرضية العدم H_0 . لقد أثبت العالم سميرنوف أنــه في حالــة n_1 , n_2 كبيرتين واعتبار فرضية العدم H_0 صحيحة فإن [راجع المبرهنة (I-7.14.3)]:

$$P\left(D_{n_1n_2} \in \Im_{1\alpha} \middle| H_0\right) = P\left(\sqrt{\frac{n_1.n_2}{n_1+n_2}} D_{n_1n_2} \geq z_\alpha \middle| H_0\right) \approx \alpha = 1 - K(z_\alpha) \approx z_\alpha e^{-2z_\alpha^2}$$

(2.2.11)

ويمكن استخدام جــدول اختبــار كالماغوروف (الملحق، جدول 5) لإيجاد قيمــة $\lambda_\alpha = \frac{z_\alpha}{\sqrt{n}}$ الموافقة لــ n, α حيث $n = \left[\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}\right]$ و [[ ]] تعني الجزء الصحيح.

مما سبق يمكن صياغة إجراء اختبار سميرنوف للتجانس على النحو الآتي:

1. نرتب قيم العينتين المشاهدتين x و y تصاعدياً (حسب القيم).
2. نعين القيم المختلفة في العينتين ولتكن $z_1 < .... < z_k ; k \leq n_1 + n_2$ ، فنحصل علــى الفترات المانعة بالتبادل $(-\infty, z_1], ..., (z_k, +\infty]$.

3. نعين قيم $F^*_{n_1}, F^*_{n_2}$ عند القيم المختلفة $z_j\ ;\ j=1,...,k$ ، أو عند الحـدود العليـا للفئات المانعة بالتبادل $(z_{j-1}, z_j]\ ;\ j=1,...,k, z_0=-\infty, z_{k+1}=\infty$ ، ومن ثم نعين القيمة الملاحظة t لإحصاء الاختبار $D_{n_1n_2}$ أي $t=\max_z |F^*_{n_1}(z)-F^*_{n_2}(z)|$.

4. من جدول اختبار كالماغوروف (الملحق، الجدول 5) نحصل على القيمة الحرجـة $\lambda_\alpha=\lambda_\alpha(n_1,n_2)$ الموافقة لـ $n=\left[\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}\right]$ ومستوى المعنوية α.

5. نقارن القيمتين الملاحظة والجدولية t, λ_α. إذا كانت $t\ge\lambda_\alpha$ نرفض فرضية العـدم $H_0: F_1(x)\equiv F_2(x)$ ، وخلاف ذلك نقبلها.

نلاحظ عندما تكون $(n_1,n_2\ge 20)$ فاختبار سميرنوف تقريبي، وبالتالي احتمال الخطأ من النوع I يساوي تقريباً α. ونشير إلى أن اختبار سميرنوف متسق [البدائل هنا أي زوج من التوزيعات (F_1,F_2) ، بحيث $F_1\not\equiv F_2$]، لأن الإحصاء $D_{n_1n_2}$ هـو إحصـاء مـن جانبين، حيث إن انحراف $F^*_{n_1}(x)$ عن $F^*_{n_2}(x)$ من أي جانب يزيد من قيمـة $D_{n_1n_2}$ ، لذلك فالفرضية البديلة دائماً من الشكل $H_1: F_1(x)\not\equiv F_2(x)$.

إن اختبار سميرنوف يعتمد على إحصاء الاختبار $D_{n_1n_2}$ حر التوزيع، غير مرتبـط بتوزيع المتغير العشوائي الملاحظ، وهذه الخاصة مهمة في التطبيقات الإحصائية، لأن توزيع المتغير العشوائي الملاحظ -بشكل عام- غير معلوم، والاهتمام يتركز على معرفة مـا إذا كان التوزيع الملاحظ غير المعلوم لم يتغير من عينة مشاهدة لأخرى. واستخدام اختبـار سميرنوف يتطلب فقط معـرفة أن تـوزيع المتغير العشوائي الملاحظ (مجتمـع الظـاهرة المدروسة) مستمر، وهذا يمكن معرفته عادة بسهولة من خلال الطبيعة الفيزيائية للظـاهرة المدروسة ولا تتطلب اختباراً خاصاً.

مثـال 1.2.11

مخرطة لتصنيع نوع معين من القطع. أخذت عينتان عشوائيتان من إنتاجها بحجـم $n_1=150, n_2=100$. حيث أخذت الأولى في بداية واردية والثانية بعد ساعتين من عمـل المخرطة، وقيس مقدار انحراف كل قطعة عن المقياس المعياري المحدد (المتغير العشوائي ξ)، فكانت النتائج مقدرة بالميكرومتر $(10^{-1}\mathrm{m})$ كما هي واردة في الجدول الآتي:

فترات الانحراف $(z_{j-1}, z_j]$	التكرار m_{1j}	m_{2j}
(−15;−10]	10	0
(−10;−5]	27	7
(−5;0]	43	17
(0;5]	38	30
(5;10]	23	29
(10;15]	8	15
(15;20]	1	1
(20;25]	0	1
$\sum$	$n_1 = 150$	$n_2 = 100$

يطلب باستخدام قاعدة سميرنوف اختبار فرضية العدم حول أن توزيع أخطاء تصنيع المخرطة (ع) خلال الفترة الزمنية المدروسة موصوفة بدالة توزيع واحدة (لا يتغير قـــانون التوزيع)، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

هنا يجب اختبار فرضية العدم $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$ (تعتبر عملية تصنيع القطـع في المخرطة مستقرة مع الزمن).

حساب الفروقات $|F^*_{n_1}(x) - F^*_{n_2}(x)|$ واردة في الجدول التالي:

الحد الأعلى للفئة z_j	التكرار		التكرار المتجمع الصاعد		$F^*_{n_1} = m^*_{1j}/n_1$	$F^*_{n_2} = m^*_{2j}/n_2$	$\|F^*_{n_1}(x) - F^*_{n_2}(x)\|$
	m_{1j}	m_{2j}	m^*_{1j}	m^*_{2j}			
-10	10	0	10	0	0.067	0.000	0.067
-5	27	7	37	7	0.246	0.070	0.176
0	43	17	80	24	0.533	0.240	0.193
5	38	30	118	54	0.787	0.520	**0.247**
10	23	29	141	83	0.940	0.830	0.110
15	8	15	149	98	0.933	0.980	0.013
20	1	1	150	99	1.00	0.990	0.010
25	0	1	150	100	1.00	1.00	0 000

نلاحظ من العمود الأخير في الجدول أن أكبر فرق مطلق بين دالتي التوزيع التجريبيتين $F^*_{n_1}(x)$, $F^*_{n_2}(x)$ يساوي:

$$t = D_{n_1 n_2} = \sup_{-\infty<x<+\infty} \left|F^*_{n_1}(x) - F^*_{n_2}(x)\right| = 0.247$$

بما أن:

$$n = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} = \frac{150(100)}{150+100} = 60$$

و $\alpha = 0.05$، فحسب جدول اختبار كالماغوروف (الملحق، الجدول 5) نجد $\lambda_{0.05} = \frac{1.36}{\sqrt{60}} = 0.18$. وبالتالي، بما أن:

$$t = 0.247 \geq t_{0.05} = 0.18$$

نرفض فرضية العدم H_0 . وهذا يعني أن عملية التصنيع في المخرطة ليست مستقرة مع الزمن، وبعبارة أخرى أن أخطاء التصنيع خلال الفترة الزمنية المدروسة لا تخضع لتوزيع واحد.

نلاحظ هنا أن $n_1 = 150$, $n_2 = 100$ أي ليس بالضرورة $n_1 = n_2$.

مثال 2.2.11

لدراسة عدد حوادث المرور على طريقين، أخذت عينة عشوائية من 50 أسبوعاً، وسجلت حوادث المرور الأسبوعية على كل طريق، ثم أخذ المتوسط اليومي في الأسبوع x، فكانت، مقربة بدقة 0.1، كما هي واردة في الجدول الآتي. فهل يمكن القول إن التوزيع الاحتمالي للمتوسط اليومي لعدد حوادث المرور واحد على الطريقين، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.10$؟

لنحسب الفروقات $\left|F^*_{n_1}(x) - F^*_{n_2}(x)\right|$، كما هي مبينة في الجدول:

المتوسط اليومي للحوادث x	الطريق I	الطريق II	$F^*_{n_1}$	$F^*_{n_2}$	$\left\|F^*_{n_1}(x)-F^*_{n_2}(x)\right\|$
0	3	4	0	0	0
1.2	14	14	0.06	0.08	0.02
2.0	11	12	0.34	0.36	0.02
3.3	9	8	0.56	0.60	**0.04**
4.1	7	8	0.74	0.76	0.02
5.2	4	3	0.88	0.92	**0.04**
6.0	2	1	0.96	0.98	0.02
$\sum$	50	50			

نلاحظ من الجدول أن القيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار $D_{n_1n_2}$ هي $t = 0.04$.

بما أن $n = \left[\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}\right] = 25$ و $\alpha = 0.10$، فمن جدول اختبار كالماغوروف نجد $\lambda_{0.10} = 0.24$. أي أن $t = 0.04 < \lambda_{0.10} = 0.24$، وبالتالي فإن التوزيع الاحتمالي لمتوسط عدد الحوادث اليومية في الأسبوع واحد على الطريقين.

3.11 اختبار χ^2 للتجانس

CHI-SQUARE TEST OF HOMOGENEITY

غالباً الاختبار الذي يستخدم للتجانس هو اختبار χ^2. واستعماله لاختبار تجانس المعطيات ذات الطبيعة المنقطعة (المنفصلة). لكن كما هو معلوم، إذا كانت المعطيات ذات طبيعة مستمرة فباستخدام تبويب (تصنيف) المعطيات يؤول البحث في منظومة منقطعة. لذا طريقة χ^2 تستخدم في الواقع لتحليل أية معطيات (منقطعة أو مستمرة)، أي تعتبر طريقة شاملة. بالإضافة لذلك بواسطة هذه الطريقة يمكن تحليل أي عدد منتهٍ من العينات العشوائية في آن واحد، بينما في اختبار سميرنوف يمكن مقارنة عينتين فقط.

لنفترض أخذت m متسلسلة متتالية من الملاحظات المستقلة المؤلفة من $n_1,\dots,n_m$

ملاحظة على الترتيب في أوقات مختلفة، أو بشكل عام في ظروف مختلفة، علـــى متغـــير عشوائي ξ، ويطلب اختبار أن توزيع ξ لم يتغير من متتالية من الملاحظات لأخـــرى، أي أن قانون الملاحظة واحد رغم اختلاف الزمان أو الظروف. ويمكن صياغة المسألة علـــى النحو الآتي: لنفترض لدينا m عينة عشوائية مستقلة الأولى حجمها n_1، الثانية حجمـــها n_2 وهكـــذا العينة الأخـــيرة حجمها n_m. وأن هـــذه العينات العشوائية أخذت مـــن مجتمعـــات مقطعة، دوال تـــوزيعها هي $F_1(x),...,F_m(x)$ وغـــير معلومـــة. أي أن: $X_j=(X_{j1},...,X_{jn_j});\ j=1,...,m$ عينة عشـــوائية من مجتمع دالـــة توزيعـــه $F_j(x)$، والمطلوب اختبار فرضية العدم:

$$H_0: F_1(x)=F_2(x)=....=F_m(x)$$

بناءً على معطيات العينات العشوائية المستقلة $X_j;\ j=1,..,m$.

لنفترض أن كلاً من تلك المجتمعات والتي عددها m صنفت (بوبت) بطريقة واحـدة ولتكن وفق k فئة أو صنف أو مؤشر ما ولنرمز لها بـــ $A_1,...,A_k$. ومن الطبيعي لمقارنـة الواقع بالنظري لابد من تصنيف كل عينة وفق الفئات أو الأصناف ذاتها $A_1,...,A_k$. لـذا سنعرف بعض الرموز الجديدة الآتية:

υ_i : العدد الكلي للملاحظات المنتمية للفئة A_i، حيث $i=1,...,k$ و h_i القيمـــة الملاحظة لها.

υ_{ij} : عدد عناصر العينة X_j المنتمية للفئة (صنف) A_i، حيـــث إن $i=1,...,k$، $j=1,..,m$. ولنرمز بـــ h_{ij} للقيمة الملاحظة لـــ υ_{ij}.

p_{ij} : احتمال انتماء أي مفردة من المجتمع j إلى الفئة A_i.

n : المجموع الكلي للتكرارات، أي أن:

$$\upsilon_{i} = \upsilon_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{m} \upsilon_{ij} \quad , \quad n=\sum_{i=1}^{k}\upsilon_i$$

وبناءً على ذلك يمكن إعادة صياغة فرضية العدم H_0 على النحو الآتي:

$$H_0 : p_{i1} = p_{i2} = ... = p_{im} = p_i \quad ; \quad i = 1,...,k$$

حيث إن الاحتمالات $p_i \, ; i = 1,...,k$ غير معلومة $\left(\sum_{i=1}^{k} p_i = 1\right)$.

بما أن $E(v_{ij}|H_0) = n_j p_i$ [لأن توزيع v_{ij}، عند صحة الفرضية H_0، يخضع لتوزيع ذي الحدين $B(n_j, p_i)$]، فحسب مبدأ χ^2 كمقياس لانحراف المعطيات التجريبية عن القيم المتوقعة (عند صحة الفرضية H_0) يؤخذ الإحصاء:

$$X_n^2(p) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \frac{(v_{ij} - n_j p_i)^2}{n_j p_i} \quad ; \quad p = (p_1,...,p_m) \qquad (1.3.11)$$

إذا كانت كل من الحجوم $n_1,...,n_m$ كبيرة فإن المتغير العشوائي $X_n^2(p)$ عبارة عن مجموع m من المتغيرات العشوائية المستقلة ولكل منها توزيع χ^2 بـ $k-1$ درجة حرية، وبالتالي فإنه يخضع لتوزيع χ^2 بـ $m(k-1) = mk - m$ درجة حرية.

لكن هنا الاحتمالات $p_1,...,p_k$ غير معلومة، لذا لاستخدام المقدار $X_n^2(p)$ كإحصاء اختبار لابد من تقديرات لهذه المعالم، ولتقديرها تستخدم طريقة المعقولية العظمى. هنا دالة المعقولية العظمى (عند صحة الفرضية H_0) تساوي:

$$L(P) = c\prod_{i,j} P_i^{v_{ij}} = c\prod_{i} P_i^{v_i} \quad ; \quad v_i = v_{i.} = \sum_{j=1}^{m} v_{ij} \qquad (2.3.11)$$

حيث إن c غير مرتبطة بالمعلمة p_i، بتطبيق طريق مضاريب (جداءات) لاغرانج غير المحددة نجد أن تقديرات المعقولية العظمى $\hat{p}_i$ للمعالم p_i هي:

$$\hat{p}_i = \frac{v_{i.}}{n} \quad ; \quad i = 1,...,k \quad , \quad n = \sum_{j=1}^{m} n_j = \sum_{i,j} v_{ij} \qquad (3.3.11)$$

هكذا، نحصل على إحصاء الاختبار:

$$X_n^2(\hat{p}) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \frac{(v_{ij} - n_j \hat{p}_i)^2}{n_j \hat{p}_i} = n\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \frac{v_{ij}^2}{n_j v_i} - 1\right) \qquad (4.3.11)$$

بما أن $\sum_{i=1}^{k}\hat{p}_i = 1$ فنحتاج فقط إلى $(k-1)$ تقديراً، وبالتالي فإن المتغير العشـــوائي $X_n^2(\hat{p})$ يتبع تقريباً توزيع χ^2 بدرجات حرية:

$$mk - m - (k-1) = (k-1)(m-1)$$

وهذا يعني إذا كانت n كبيرة، فيمكن أخذ الحد الحرج $t_\alpha = \chi^2_{\alpha;(k-1)(m-1)}$. وبذلك يصبح اختبار التجانس χ^2 على النحو الآتي: رفض فرضية التجانس إذا كانت القيمة الملاحظة t لإحصاء الاختبار $X_n^2(\hat{p})$ محققة للمتباينة $t \geq \chi^2_{\alpha;(k-1)(m-1)}$. وفي هذه الحالـــة احتمـــال الوقوع في خطأ من النوع I يساوي تقريباً α، إذا كانت n كبيرة بكفاية.

نميز حالتين خاصتين وهامتين من الحالة العامة: حالة توزيعان مســتقلان $(m = 2)$. عندئذٍ إحصاء الاختبار (4.3.11) يكتب على الصورة:

$$X_n^2(\hat{p}) = n_1 n_2 \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{v_{i1} + v_{i2}} \left(\frac{v_{i1}}{n_1} - \frac{v_{i2}}{n_2} \right)^2 \qquad (5.3.11)$$

ويتبع تقريباً توزيع χ^2 بـــ $(k-1)$ درجة حرية.

والحالة الثانية، عندما $k = 2$ (التصنيف حسب فئتين أو صنفين $A_1 = A\, , A_2 = \overline{A}$) فإحصاء الاختبار (4.3.11) يكون:

$$X_n^2(\hat{p}) = \frac{1}{\hat{p}} \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j^2}{n_j} + \frac{1}{\hat{q}} \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_j - v_j)^2}{n_j} - n = \frac{1}{\hat{p}\hat{q}} \sum_{j=1}^{k} \frac{v_j^2}{n_j} - n\frac{\hat{p}}{\hat{q}} \qquad (6.3.11)$$

حيث إن $\hat{p} = 1 - \hat{q} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} v_{1j}$. وهذا الإحصاء يتبع تقريباً توزيع χ^2 بـــ$(m-1)$ درجة حرية.

إن اختبار التجانس χ^2 المبني على إحصاء الاختبار (4.3.11) متسق، وهذا يعني أن هـــذا الاختبار يدرك أي انحراف عن فرضية العدم H_0 باحتمال ينتهي إلى 1، عندما $n \to \infty$.

مثـــال 1.3.11

لدراسة الفرق بين أربع طرق تدريس مختلفة تم تطبيق الطريقة الأولى على 50 طالباً، الثانية على 80 طالباً، الثالثة على 100 طالباً والطريقة الرابعة على 125 طالبـــاً، حيـــث إن احتيار الطلاب كان عشوائياً، فكانت نتائجهم مصنفة (مبوبة) حســـب المســـتويات A, B, C, D, F كما يلي:

الطريقة \ المستوى	A	B	C	D	E	$\sum$
I	5	6	14	15	10	50
II	7	13	25	20	15	80
III	12	34	39	6	9	100
IV	16	39	40	20	10	125
$\sum$	40	92	118	61	44	355

هل تدل هذه المعطيات على أن مستوى الطالب (تقديره) يعتمـــد علـــى طريقـــة التدريس؟ أم أن توزيع الطلاب حسب مستوياتهم لا يعتمد على طريقة التدريس المتبعة؟

هنا نتصور أن معدلات الطلاب الـــ 50، بعد تطبيق الطريقة I عليـــهم، مـــأخوذة عشوائياً من توزيع غير معلوم $F_1(x)$، ومعدلات الطلاب الـــ 80 بعد تطبيق الطريقـــة II عليهم عبارة عن عينة عشوائية من توزيع غير معلوم $F_2(x)$، ومعدلات الطلاب الـــــــ 100 بعد تطبيق الطريقة III عليهم عينة عشوائية من توزيع غير معلوم $F_3(x)$ وأخـــيراً معدلات الطلاب الـــ 125 بعد تطبيق الطريقة IV عليهم عبارة عن عينة عشوائية مـــن توزيع غير معلوم $F_4(x)$، ويصبح المطلوب اختبار فرضية التجانس:

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x) = F_3(x) = F_4(x)$$

أي نفترض لدينا أربع عينات عشوائية من الطلاب أخذت من مجتمع واحـــد لكـــن في ظروف مختلفة (بعد تطبيق طرق تدريس مختلفة)، ونريد معرفة ما إذا كان المتغير العشوائي

الملاحظ ع (معدل الطالب) له نفس التوزيع، أي قانون توزيع الملاحظة لم يتغير من عينة عشوائية لأخرى.

لدينا في هذه المسألة $n_1 = 50, n_2 = 80, n_3 = 100, n_4 = 125$ و $m = 4, k = 5$
ومن ثم لدينا خمسة معالم غير معلومة يجب تقديرها أولاً، وذلك من العلاقة:

$$\hat{p}_i = \frac{h_i}{n} \quad ; \quad i = 1,...,5$$

$$\hat{p}_1 = \frac{40}{355} = 0.11 \ , \ \hat{p}_2 = \frac{92}{355} = 0.26 \ , \ \hat{p}_3 = 0.33 \ , \ \hat{p}_4 = 0.17 \ , \ \hat{p}_5 = 0.13$$

ثم نحسب التكرارات المتوقعة عند صحة الفرضية H_0:

$$E_{ij}^0 = E(v_{ij}|H_0) = n_j \hat{p}_i \quad ; \quad i = 1,...,5 \ , \ j = 1,...,4$$

فمثلاً:

$$E_{11}^0 = n_1\hat{p}_1 = 50(0.11) = 5.5 \quad , \quad E_{23}^0 = n_3\hat{p}_2 = 100(0.26) = 26$$

هكذا، نحصل على القيم المتوقعة E_{ij}^0 كما هي واردة في الجدول الآتي:

المستوى / الطريقة	A	B	C	D	E
I	5.5	13	16.5	8.5	6.5
II	8.8	20.8	26.4	13.6	10.4
III	11	26	33	17	13
IV	13.75	32.5	41.25	21.25	16.25

وبحساب القيمة المشاهدة لإحصاء الاختبار (4.3.11) نجد:

$$t = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4}\frac{(h_{ij} - n_j\hat{p}_i)^2}{n_j\hat{p}_i}$$

$$= \frac{(5-55)^2}{5.5} + \frac{(7-8.8)^2}{8.8} + ... + \frac{(10-16.25)^2}{16.25} = 36.381$$

وبما أن الإحصاء $X_n^2(\hat{p})$ يتبع تقريباً توزيع χ^2 بـ $(k-1)(m-1)=12$ درجة حرية، فمن جدول توزيع χ^2 بـ 12 درجة ومستوى معنوية $\alpha=0.05$ (الملحق، جدول 4) نجد القيمة الحرجة:

$$t_{0.05;12}=21.026$$

وحيث إن $t>t_{0.05;12}$ نرفض فرضية العدم H_0. وهذا يعني أن التوزيع الاحتمالي لمعدل الطالب (ξ) يعتمد على طريقة التدريس، أي أن طرق التدريس ليست جميعها متساوية من حيث تأثيرها على المستوى العلمي للطالب. هذا لا يعني أن الطرق الأربعة مختلفة التأثير، بل واحدة على الأقل مختلفة عن الطرق الأخرى. وبالتالي إذا أردنا معرفة هل الطرق الأربعة مختلفة فعلاً أم لا من حيث تأثيرها على مستوى الطالب، فيجب إجراء الاختبارات بأخذ كل عينتين معاً $(m=2)$.

مثال 2.3.11

لمعرفة رأي النساء والرجال في مجتمع حول قضية اجتماعية (فمثلاً، تنظيم النسل)، أخذت عينتان عشوائيتان مستقلتان من 1000 امرأة و 1500 رجل، وسجلت آراؤهم فكانت بعد تصنيفها كما هي واردة في الجدول الآتي:

	الرأي			$\sum$
	موافق A_1	معارض A_2	محايد A_3	
النساء	600	300	100	1000
الرجال	650	800	50	1500
$\sum$	$h_1=1250$	$h_2=1100$	$h_3=150$	2500

اختبر فرضية العدم H_0 بأن المعطيات المتوفرة من العينتين المشاهدتين لا تقدم دليلاً على وجود فروق جوهرية في الآراء بين النساء والرجال تعزى لاختلاف الوعي وإدراك الآثار المختلفة (اجتماعية، اقتصادية، . . . الخ) لهذه المشكلة الاجتماعية، عند مستوى

معنوية $\alpha = 0.005$.

نلاحظ في هذه المسألة أن $n = 2500 , n_1 = 1000 , n_2 = 1500$ و $m = 2 , k = 3$

ومن ثم لدينا ثلاث معالم p_1, p_2, p_3 غير معلومة يجب تقديرها.

$$\hat{p}_1 = \frac{h_1}{n} = \frac{1250}{2500} = 0.50 \quad , \quad \hat{p}_2 = \frac{h_2}{n} = \frac{1100}{2500} = 0.44 \quad , \quad \hat{p}_3 = 0.06$$

وعلى ذلك نحسب القيم المتوقعة:

$$E^0_{ij} = E\left(v_{ij} \middle| H_0\right) = n_j \hat{p}_i \quad ; \quad i = 1,2,3 \ , \ j = 1,2$$

فنجدها كما هي واردة في الجدول الآتي:

$\hat{p}_i$ / n_j	0.50	0.44	0.06
1000	500	440	60
1500	750	660	90

وبالتالي القيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار $X^2_n(\hat{p})$، بناءً على الجدولين السابقين تساوي:

$$t = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} \frac{(h_{ij} - n_j\hat{p}_i)^2}{n_j\hat{p}_i} = \frac{(600-500)^2}{500} + ... + \frac{(50-90)^2}{90} = 141.14$$

ومن جدول χ^2 بـــ $(k-1)(m-1) = 2$ درجة حرية ومستوى معنوية $\alpha = 0.005$ نجد القيمة الحرجة $t_{0.005;2} = 10.597$.

بما أن $t = 152.03 > t_{0.005,2} = 10.597$، فنرفض فرضية العدم H_0، وهذا يعـــني أن هنالك فرقاً جوهرياً بين آراء النساء والرجال حول هذه القضية.

مثـــال 3.3.11

لتكن لدينا معطيات المثال (1.2.11) ويطلب منا اختبار صحة فرضيـــة التجـــانس H_0، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$، وذلك باستخدام اختبار χ^2.

نلاحظ أننا أمام معطيات إحصائية ناتجة عن ملاحظة متغير عشـــوائي مســـتمر ع (انحراف القطعة عن المقياس المعياري). لكن بأخذ $A_i = \zeta_i = (z_{i-1}, z_i]$ وتعريف المتغـــير العشوائي $\eta = \eta(A_i) = i\,;\, i = 1,...,m$ فنصبح أمام متغير عشوائي منقطع، صنفت قيمـــة الملاحظة وفق $A_1,...,A_8$ على النحو الآتي:

h_{ij} \ A_i	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
h_{i1}	10	27	43	38	23	8	1	0
h_{i2}	0	7	17	30	29	15	1	1
h_i	10	34	60	68	52	23	2	1

نلاحظ أن:

$$m = 2 \ , \ k = 8 \ , \ n = 250 \ , \ n_1 = 150 \ , \ n_2 = 100$$

ولدينا ثمانية معالم $p_i = P(A_i)\,;\, i = 1,...,m$ غير معلومة يجب تقديرها، ومـــن ثم حساب التكرارات المتوقعة $E_{ij}^0\,;\, i = 1,...,8\,,\, j = 1,2$ وهي واردة في الجدول الآتي:

n_j \ $\hat{p}_i$	0.04	0.13	0.24	0.27	0.21	0.09	0.008	0.004
100	4	13	24	27	21	9	0.8	0.4
150	6	19.5	36	40.5	31.5	13.5	1.2	0.6

لنحسب القيمة الملاحظة t لإحصاء الاختبار $X_n^2(p)$:

$$t = \sum_{i=1}^{8}\sum_{j=1}^{2}\frac{(h_{ij} - n_j\hat{p}_i)^2}{n_j\hat{p}_i} = \frac{(10-4)^2}{4} + \frac{(0-6)^2}{6} + ... + \frac{(2-0.6)^2}{0.6} = 71.51$$

ومن جدول توزيع χ^2 بـــ $(k-1)(m-1) = 7$ درجة حرية ومستوى معنوية $\alpha = 0.05$ نجد القيمة الحرجة $t_{0.05;8} = \chi^2_{0.05;8} = 15.507$. وبما أن $t = 71.51 > t_{0.05;8} = 15.507$ نرفض فرضية العدم H_0، وهي نفس النتيجة التي توصلنـــا إليـــها في المثـــال الســـابق (1.2.11).

4.11 اختبارات أخرى للتجانس من أجل عينتين من توزيعين مستمرين

بالإضافة إلى الاختبارين الواردين السابقين (اختبار سميرنوف واختبار χ^2) لاختبار فرضية التجانس، هنالك طرق أخرى مبنية على مبادئ مختلفة وتستخدم في حالة عينتين عشوائيتين من توزيعين مستمرين. سنتطرق باختصار في هذا البند لبعضها.

1.4.11 اختبار الإشارة Sign Test

أبسط طريقة لاختبار فرضية التجانس، حيث لا تتطلب حسابات معقدة، هي اختبار الإشارة الواردة في الفقرة (1.2.9). والعيب الأساسي في هذا الاختبار عدم استخدامه إلا لجزء بسيط من المعلومات المتوفرة في نتائج الملاحظة (المعلومات المتوفرة في العينتين العشوائيتين)، لذا ينصح عادة باستخدامه فقط في مرحلة التحليل التمهيدي. بالإضافة إلى ذلك يقتصر استخدام هذا الاختبار على عينتين متساويتي الحجم.

2.4.11 اختبار الصفوف الفارغة

يمكن بناء صف كامل من اختبارات التجانس انطلاقاً من التصورات التالية: لتكن $X_{(1)} \le X_{(2)} \le .... \le X_{(m)}$ المتسلسلة المتغيرة للعينة العشوائية $X = (X_1,...,X_m)$ وهذه المتسلسلة تقسم المحور ox إلى فترات مانعة بالتبادل:

$$B_i = \left(X_{(i-1)}, X_{(i)}\right] \quad ; \quad i = 1,...,m+1 \;\;,\;\; X_{(0)} = -\infty \;\;,\;\; X_{(m+1)} = +\infty$$

التي تدعى بصفوف العينة العشوائية، ولنرمز بـ $s_r = s_r(m,n)\,; r = 0,1,...,n$ لعدد الصفوف B_i التي تشتمل كل منها على r عنصر من العينة العشوائية الثانية $Y = (Y_1,...,Y_n)$. عندئذٍ كإحصاء اختبار يمكن أخذ التركيبة الخطية:

$$S_l(m,n) = \sum_{r=0}^{l} c_r s_r \qquad (1.4.11)$$

حيث إن $c_0, c_1,..., c_l$ أوزان مختارة مسبقاً. وكحالة خاصة عندما $l = 0$ نحصل على

اختبـــار الصفوف الفـــارغة المبني على الإحصاء $s_0(n,m)$، حيث s_0 عدد الصفـــوف $B_i\,;\,i=1,\ldots,m+1$ التي لا تشتمل على أي عنصر من العينة الثانية Y. والتوزيع المقارب لهذا الإحصاء، عند صحة الفرضية H_0، تعطيه المبرهنة الآتية التي سنقدمها بدون إثبات.

مبـــرهنة 1.4.11

إذا كانت $m,n\to\infty$، بحيث أن $\frac{n}{m}\to\rho>0$، فإن:

$$\mathcal{L}\left(S_0(m,n)\middle|H_0\right)\longrightarrow N\left(\frac{m}{1+\rho},\frac{m\rho^2}{(1+\rho)^3}\right)$$

وعند تحقق هذه الشروط فإن اختبار الصفوف الفارغة يصاغ على النحو الآتي:

نرفض فرضية العدم H_0 (فرضية التجانس) عندمـــا تكـــون القيمـــة الملاحظـــة $s_0(m,n)$ لإحصاء الاختبار $S_0(m,n)$ محققة للمتباينة:

$$s_0(m,n)\geq\frac{m}{1+\rho}+\sqrt{m}\,\frac{\rho}{(1+\rho)^{3/2}}t_\alpha\quad;\quad\Phi(-t_\alpha)=\alpha\qquad(2.4.11)$$

3.4.11 اختبار التلاحقات Runs Test

في حالات عدة نـــولي أهميـــة خاصـــة للانحرافـــات عـــن فرضيـــة التجـــانس $H_0:F_1(x)\equiv F_2(x)$ والمتمثلة بانزياح أحد التوزيعين بالنسبة للآخـــر، أي إذا كـــانت مثلاً، $F_1(x)>F_2(x)\,;\,\forall x\in R$. ويقال في هذه الحالة أن المتغير العشـــوائي η (دالـــة توزيعه $F_2(x)$) أكبر عشوائياً من المتغير العشوائي ξ (دالة توزيعه $F_1(x)$)، وهذا يعـــني عند كل عدد حقيقي x فإن $P(\eta>x)>P(\xi>x)$. ويمكن بناء الاختبار البسيط الـــذي يدرك وبشكل جيد مثل تلك الانحرافات على النحو الآتي:

ندمج العينتين X,Y في عينة واحدة $(X_1,\ldots,X_m,Y_1,\ldots,Y_n)$ حجمها $N=m+n$. ومن ثم نقوم ببناء المتسلسلة المتغيرة لهذه العينة [راجع البنـــد (I-10.3)]. بعـــد ذلـــك نستبدل، في المتسلسلة المتغيرة للعينة المدمجة، كل عنصر من X بالرمز c وكل عنصر من Y

بالرمز $\bar{c}$ فنحصل على متتابعة من الرمزين $c,\bar{c}$، بحيث تشتمل على c (m مرة) و $\bar{c}$ (n مرة). وعدد مثل تلك المتتابعة يساوي $C_m^{m+n}=\dfrac{(m+n)!}{m!n!}$. ومن الواضح بداهة أن تكون كل المتتابعات الممكن تشكيلها والتي عددها C_m^{m+n}، عند صحة الفرضية H_0، متساوية الاحتمال ويتوزع الرمزان $c,\bar{c}$ عشوائياً. وهذا يعني أن احتمال وقوع الحرف c في أي مكان من المتتابعة يساوي احتمال وقوع الحرف $\bar{c}$ في ذلك المكان. لكن إذا كانت فرضية العدم H_0 غير صحيحة (المعلومات غير متجانسة، مأخوذة من مجتمعين مختلفين) والانحرافات عنها متمثلة بالفرضية البديلة $H_1\left(F_1(x)>F_1(x)\text{ or }F_2(x)>F_1(x)\right)$، فسنلاحظ بازدياد الانزياح أن عناصر النوع الواحد (c أو $\bar{c}$) تميل للتجمع معاً في أحد طرفي المتتابعة (فمثلاً، عندما $F_1(x)>F_2(x)$ تجمع الحرف $\bar{c}$ في الطرف الأيمن من المتتابعة).

تدعى أي متتابعة جزئية من المتتابعة، المشكلة من أحد الرمزين (c أو $\bar{c}$) والمحددة من الجانبين (أو من جانب واحد إذا كان البحث في متتابعات منتهية) برمز من النوع الآخر بالمتلاحقة Run. فمثلاً، إذا كانت لدينا المتتابعة $cc\,\bar{c}\bar{c}\bar{c}\,cccc\,\bar{c}\bar{c}$ فتشمل على 4 تلاحقات، تتألف الأولى من اثنين من c ونقول أن طولها 2، وتتألف الثانية من ثلاث $\bar{c}$ ونقول أن طولها 3، . . . الخ. هكذا، يمكن وصف كل متتابعة بعدد التلاحقات فيها ونرمز لهذا العدد بـ $W(m,n)$. وكلما كان عدد التلاحقات $W(m,n)$ كبيراً كلما كانت درجة المزج في المتتابعة أكبر والعكس صحيح، أي أن عدد التلاحقات $W(m,n)$ يصف كمياً درجة المزج في المتتابعة المشكلة من الرمزين $c,\bar{c}$. وبالتالي إذا كانت القيمة الملاحظة لعدد التلاحقات صغيراً، فهذا دليل على عدم تجانس معطيات العينتان X,Y، أي أن التلاحقات القليلة دليل على عدم صحة التجانس.

هكذا، يمكن استخدام المقدار $W(m,n)$ كإحصاء اختبار لاختبار فرضية التجانس H_0، وعندئذٍ منطقة الرفض تعطى على الصورة:

$$\Im_{1\alpha}=\{t\,;\,t\le t_\alpha(m,n)\}\qquad(3.4.11)$$

ويدعى الاختبار المبني على الإحصاء $W(m,n)$ والمعطى بمنطقة رفض من الشـــكل (3.4.11) باختبار التلاحقات Runs test للتجانس (قدم هذا الاختبار من قبل العالمـــان فالد وويلكوكسون عام 1940).

لتعيين الحد الحرج $t_\alpha(m,n)$ يلزمنا كما نعلم معرفة توزيع الإحصـــاء $W(m,n)$، عند صحة فرضية العدم H_0 . والمبرهنة التالية التي سنقدمها بدون برهان تعطي التوزيـــع المقارب لهذا الإحصاء.

مبـــرهنة 2.4.11

إذا كانت $m,n\to\infty$، بحيث $\frac{n}{m}\to\rho>0$، فإن:

$$\mathcal{L}\left(W(m,n)|H_0\right)\longrightarrow N\left(\frac{2m\rho}{1+\rho},\frac{4m\rho^2}{(1+\rho)^3}\right)=N(\mu,\sigma^2) \tag{4.4.11}$$

وعند تحقق هذه الشروط، فيمكن صياغة اختبار التلاحقات للتجانس على النحو الآتي:

نرفض فرضية التجانس H_0 إذا كانت:

$$t\le\frac{2m\rho}{1+\rho}+\sqrt{m}\,\frac{2\rho}{(1+\rho)^{3/2}}t_\alpha \quad ; \quad \Phi(-t_\alpha)=\alpha \tag{5.4.11}$$

حيث إن t القيمة الملاحظة للإحصاء $W(m,n)$. وعندما تكون $m,n\ge 10$ يمكن اعتبار:

$$\mathcal{L}\left(W(m,n)|H_0\right)\approx N\left(\frac{2m\rho}{1+\rho},\frac{4m\rho^2}{(1+\rho)^3}\right)=N(\mu,\sigma^2) \tag{6.4.11}$$

والخطأ من النوع I في هذه الحالة يساوي تقريباً α.

مثـــال 1.4.11

لمعرفة تأثر هرمون ما على أطوال براعم أحد النباتات أخذت عينة عشوائية مـــن 22 من هذا النبات وقسمت عشوائياً إلى قسمين بكل منها 11 نباتاً، ووضعت هذه النباتـــات

تحت نفس الشروط فيما عدا أن نباتات أحد القسمين عولجت بالهرمون وتركت نباتات القسم الآخر بدون معالجة (مجموعة مراقبة)، وبعد أسبوعين قيست أطوال البراعم، مقدرة بأقرب مليمتر فكانت على النحو الآتي:

مجموعة المعالجة y	122	121	80	78	67	58	57	41	37	28	26
مجموعة المراقبة x	198	141	137	135	132	103	91	65	30	30	15

أبحث ما إذا كان ذلك الهرمون له تأثير على نمو براعم هذا النبات، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$، باستخدام اختبار التلاحقات.

إذا رمزنا بـ ξ لطول البرعم بدون معالجة (دالة توزيعه $F_1(x)$) وبـ η لطول البرعم بعد المعالجة (دالة توزيعه $F_2(x)$) فتصبح فرضية العدم:

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x)$$

وهذا يعني أن المعالجة ليس لها تأثير في نمو البراعم، ويمكن اعتبار العينتين العشوائيتين الملاحظتين y , x مأخوذتين من نفس المجتمع، أما الفرضية البديلة في هذه المسألة هي:

$$H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$$

لتطبيق اختبار التلاحقات لاختبار فرضية التجانس H_0 نتبع ما يلي:

1. نضع جميع المشاهدات في العينتين y , x في عينة عشوائية واحدة.
2. نرتب مفردات العينة الموحدة تصاعدياً مع وضع رمز القيمة أسفلها، فنحصل على المتتابعة العددية:

15	26	28	30	30	37	41	57	58	65	67
x_1	y_1	y_2	x_2	x_3	y_3	y_4	y_5	y_6	x_4	y_7
78	80	91	103	121	122	132	135	137	141	198
y_8	y_9	x_5	x_6	y_{10}	y_{11}	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}

3. نستبدل كل ملاحظة لـ ξ بـ c وكل ملاحظة لـ η بـ $\bar{c}$، فنحصل على المتتابعة من الرمزين $c, \bar{c}$:

$$c\ \overline{cc}\ cc\ \overline{cccc}\ c\ \overline{ccc}\ cc\ \overline{cc}\ ccccc$$

4. حساب عدد الملاحقات، أي القيمة الملاحظة t للإحصاء $W(m,n)$ وهي $t = W(11,11) = 9$.

5. حساب المتوسط والتباين:

$$\mu = \frac{2m\rho}{1+\rho} \quad , \quad \sigma^2 = \sqrt{m}\,\frac{2\rho}{(1+\rho)^{2/3}} \quad ; \quad \rho = \frac{n}{m}$$

فنجد:

$$\mu = \frac{2m\rho}{1+\rho} = \frac{2(11)(1)}{1+1} = \frac{22}{2} = 11$$

$$\sigma^2 = \sqrt{m}\,\frac{2\rho}{(1+\rho)^{3/2}} = \sqrt{11}\,\frac{2}{2^{3/2}} = 3.52\left(\frac{2}{2.82}\right) = 2.35$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري (الملحق، الجدول 2) نحصل على القيمة $t_{0.05} = -t_{0.95} = -1.65$، وبالتالي الحد الحرج للاختبار:

$$t_{0.05}(11,11) = 11 + 3.32(0.7)(-1.65) = 7.17$$

بما أن:

$$t = 9 > t_{0.05}(11,11) = 7.17$$

نقبل فرضية التجانس H_0، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$. وهذا يعني أن الهرمون المستخدم، بناءً على معطيات التجربة، لا يؤثر على نمو براعم النباتات (زيادة أو نقصاناً).

4.4.11 اختبارات الرتب Rank Tests

يمكن أن تكون المعلومات الإحصائية الأولية معطاة أحياناً بعلاقة ترتيب بينها (من النوع أكبر-أصغر) وليست كقيم عددية للملاحظات، ونصادف ذلك غالباً في الأبحاث السيكولوجية. ويتم في مثل تلك الحالات ترتيب الملاحظات حسب درجة تأثيرها أو تفضيلها، فنحصل بالنتيجة على متابعة مرتبة. يدعى رقم الموقع الذي تشغله الملاحظة في تلك المتابعة برتبة الملاحظة The rank of observance. والطرق الإحصائية المستخدمة عندئذٍ تدعى بالطرق الرتبية The rank methods، حيث إن الإحصاءات عبارة عن دوال في الرتب فقط، وتدعى بإحصاءات الرتب، وبالتالي الاختبارات المبنية على إحصاءات الرتب تدعى باختبارات الرتب.

يمكن أيضاً استخدام الطرق الرتبية في الحالات التي تكون فيها القيم العددية للملاحظات معطاة، أي في حالة عينة عشوائية $X=(X_1,\dots,X_n)$، لأن مثل هذه العينة يمكن دائماً ترتيب عناصرها ببناء المتسلسلة المتغيرة الموافقة $X_{(1)}\le X_{(2)}\le\dots\le X_{(n)}$، وعندئذٍ رتبة الملاحظة i (المتغير العشوائي X_i) عبارة عن رقم المكان R_i^* الذي تشغله X_i في المتسلسلة المتغيرة، وحين تتساوى قيمتان أو أكثر يعطى لكل منها متوسط الرتب التي كانت ستعطى لو كانت مختلفة. تعتبر نظرية اختبارات الرتب هامة وتساهم في حل العديد من مسائل الاختبارات في ميادين مختلفة. سنتطرق فيما يلي لبعض اختبارات الرتب. ويعتبر اختبار ويلكوكسون Wilcoxon Test أحد تلك الاختبارات الذي يستخدم في مسائل اختبار فرضيات التجانس.

1. اختبار ويلكوكسون Wilcoxon Test

لتكن $X=(X_1,\dots,X_m)\,,Y=(Y_1,\dots,Y_n)$ عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين مستمرين دالتي توزيعهما $F_1(x)\,,F_2(x)$ على الترتيب. لندمج العينتين $X\,,Y$ في عينة واحدة حجمها $N=m+n$ ونشكل المتسلسلة المتغيرة لها، ولنفترض $R_1,\dots,R_n$ رتب المتغيرات العشوائية $Y_1,\dots,Y_n$ فيها و $T=R_1+\dots+R_n$. وهذا يعني أن إحصاء

الرتب T عبارة عن مجموع أرقام الأماكن التي تشغلها عناصر العينة Y في المتسلسلة المتغيرة للعينة العشوائية المدمجة (حجم N). يدعى الاختبار المبني على الإحصاء T باختبار ويلكوكسون نسبة للعالم الإحصائي ويلكوكسون الذي كان أول من صاغ هذا الاختبار (عام 1945) من أجل عينات متساوية الحجم، وعممت فيما بعد (عام 1947)، من قبل العالم مان-ويتني Mann-Whitney على حالة عينات من أي حجم (متساوية أو مختلف الحجم).

فمثلاً، إذا كانت $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$, $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ وكانت المتسلسلة المتغيرة للعينة المدمجة $(N = 4 + 3 = 7)$:

$$X_1 < Y_2 < X_2 < X_3 < Y_3 < X_4 < Y_1$$

فإن:

$$R_1 = 7 \quad , \quad R_2 = 2 \quad , \quad R_3 = 5$$

وبالتالي القيمة الملاحظة t لإحصاء الرتب T تساوي:

$$t = 7 + 2 + 5 = 14$$

وكما أشرنا سابقاً، حين تتساوى قيمتان أو أكثر في المتسلسلة العددية المدمجة يعطى لكل منها متوسط الرتب التي كانت ستعطى لو كانت هذه القيم مختلفة.

إذا كانت قيمة الإحصاء T كبيرة فهذا يعني أن عناصر العينة Y -بشكل عام- أكبر من عناصر العينة X، وهذا بدوره دليل على عدم صحة فرضية التجانس $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$، أي قبول $H_1 : F_1(x) > F_2(x) ; \forall x \in R$. وتكون منطقة الرفض من الشكل:

$$\Im_{1\alpha} = \{t \,; t \ge t_\alpha(m,n)\} \tag{7.4.11}$$

ويتعين الحد الحرج $t_\alpha(m,n)$ من العلاقة:

$$P\left(T \geq t_{\alpha}(m,n) \middle| H_0\right) = \alpha \qquad (8.4.11)$$

أما إذا كانت T صغيرة فهذا يعني أن عناصر العينة Y -بشكل عام- أصغر من عناصر العينة X، وهذا بدوره دليل على عدم صحة فرضية التجانس H_0. وبالتالي قبول الفرضية البديلة $H_1 : F_1(x) < F_2(x) \,;\, \forall x \in R$. وتكون منطقة الرفض من الشكل:

$$\Im_{1\alpha} = \{t \,;\, t \leq t_{\alpha}(m,n)\} \qquad (9.4.11)$$

ويتعين الثابت $t_{\alpha}(m,n)$ من العلاقة:

$$P\left(T \leq t_{\alpha}(m,n) \middle| H_0\right) = \alpha \qquad (10.4.11)$$

أما إذا كان الهدف اختبار فرضية العدم $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$ ضد الفرضية البديلة ذات الجانبين $H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$ فإن منطقة الرفض تأخذ الشكل:

$$\Im_{1\alpha} = \{t : |t| \geq t_{\alpha/2}(m,n)\} \qquad (11.4.11)$$

ويكون الحد الحرج $t_{\alpha/2}(m,n)$ محققاً العلاقة:

$$P\left(|T| \geq t_{\alpha/2}(m,n) \middle| H_0\right) = \alpha \qquad (12.4.11)$$

هكذا، مناطق الرفض مختلفة، وشكلها يتوقف على الهدف الذي يبنى الاختبار من أجله.

ولتعيين الحدود الحرجة لمناطق الرفض يلزمنا معرفة توزيع إحصاء الاختبار T، عند صحة الفرضية H_0.

نلاحظ عند صحة فرضية العدم (المجتمعين متجانسين)

$$H_0 : F_1(x) = F_2(x)$$

احتمال أن يكون الموضع $j = 1,\dots,N$ في المتسلسلة المتغيرة للعينة الموحدة مشغولاً بأحد عناصر العينة X يساوي m/N بينما احتمال أن يكون مشغولاً بأحد عناصر العينة Y

هو n/N. وبالتالي المتغير العشوائي T_j المعرف على النحو الآتي:

$$T_j = \begin{cases} 1 & ; \text{إذا كان الموضع رقم } j \text{ في المتسلسلة المتغيرة للعينة المدمجة مشغولا بأحد عناصر العينة } Y \\ 0 & ; \text{إذا كان الموضع رقم } j \text{ في المتسلسلة المتغيرة للعينة المدمجة مشغولا بأحد عناصر العينة } X \end{cases}$$

يكون خاضعاً للتوزيع المعطى بالجدول:

T_j	0	1
$P(T_j)$	$\frac{m}{N}$	$\frac{n}{N}$

أي خاضعاً لتوزيع بيرنولي $B(1, p = n/N)$، وأن $T = \sum_{j=1}^{N} jT_j$. وعلى ذلك فإن:

$$E_0(T_j) = E_0(T_j|H_0) = \frac{n}{N} \quad , \quad V_0(T_j) = \frac{nm}{N^2}$$

$$E_0(T) = E(T|H_0) = E_0\left(\sum_{j=1}^{N} jT_j\right) = \sum_{j=1}^{N} jE_0(T_j)$$

$$= \frac{n}{N}\sum_{j=1}^{N} j = \frac{n}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{n(N+1)}{2}$$

$$V_0(T) = V(T|H_0) = V_0\left(\sum_{j=1}^{N} jT_j\right) = \sum_{j=1}^{N} V_0(jT_j) + \sum_{i \neq j}^{N} ij \operatorname{cov}_0(T_i, T_j)$$

حيث إن:

$$\operatorname{cov}_0(T_i, T_j) = E_0\left(T_i - \frac{n}{N}\right)\left(T_j - \frac{n}{N}\right) \quad ; \quad i \neq j$$

نلاحظ هنا أن الصعوبة تكمن في إيجاد $E(T_iT_j)$، ويمكن حسابه من توزيع المتغير العشوائي ذي البعدين (T_i, T_j) الذي يمكن الحصول عليه بسهولة كما هو وارد في الجدول التالي:

T_j \ T_i	0	1
0	$\frac{m(m-1)}{N(N-1)}$	$\frac{nm}{N(N-1)}$
1	$\frac{nm}{N(N-1)}$	$\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$

فنجد $E_0(T_iT_j)=\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$ ، ومن ثم:

$$\operatorname{cov}_0(T_i,T_j)=\frac{n(n-1)}{N(N-1)}-\frac{n^2}{N^2}=\frac{mn}{N^2(N-1)}$$

وبالتالي فإن:

$$V_0(T)=\frac{mn}{N^2}\sum_{j=1}^{N}j^2-\frac{mn}{N^2(N-1)}\sum_{i\neq j}^{N}ij$$

لكن:

$$\left(\sum_{j=1}^{N}j\right)^2=\sum_{1}^{N}j^2+\sum_{i\neq j}^{N}ij \;\Rightarrow\; \sum_{i\neq j}^{N}ij=\left(\sum_{j=1}^{N}j\right)^2-\sum_{1}^{N}j^2$$

إذن:

$$\begin{aligned}V_0(T)&=\frac{mn}{N^2}\sum_{j=1}^{N}j^2-\frac{mn}{N^2(N-1)}\left[\left(\sum_{j=1}^{N}j\right)^2-\sum_{j=1}^{N}j^2\right]\\&=\frac{mn}{N(N-1)}\sum_{1}^{N}j^2-\frac{mn}{N^2(N-1)}\left(\sum_{1}^{N}j\right)^2=\\&=\frac{mn}{N(N-1)}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}-\frac{mn}{N^2(N-1)}\frac{N^2(N+1)^2}{4}\\&=\frac{mn(N+1)}{12}\end{aligned}$$

بما أن المتغيرات العشوائية $T_j\,;\,j=1,\dots,N$ مستقلة وتخضع لتوزيع احتمالي واحـــد

$B(1,n/N)$، وبالإضافة لذلك توقعاها وتبايناها موجودة وتساوي على الترتيب $n/N\ ,\ nm/N^2$، فإن المتغيرات العشوائية $jT_j\ ;\ j=1,\ldots,N$ مستقلة ولها توزيع واحد وتوقعاها وتبايناها موجودة وهي على الترتيب $j=1,\ldots,N$; $\frac{jn}{N}$, $\frac{j^2nm}{N^2}$. وبالتالي بناءً على مبرهنة النهاية المركزية [راجع الفقرة (1.6.1-I)] فإن:

$$\mathcal{L}(T|H_0) \longrightarrow N\left(\frac{n(N+1)}{2}\ ,\ \frac{mn(N+1)}{12}\right) \tag{13.4.11}$$

عندما $m,n \to \infty$. وهذا التوزيع المقارب يمكن استخدامه كتقريب جيد للتوزيع الاحتمالي لإحصاء الاختبار T، عند صحة فرضية العدم H_0. وقد وجد عندما تكون $m,n \geq 4$ و $m+n \geq 20$ فإن:

$$\mathcal{L}(T|H_0) \approx N\left(\frac{n(N+1)}{2}\ ,\ \frac{mn(N+1)}{12}\right) \tag{14.4.11}$$

وبالتالي يمكن استخدام التوزيع التقريبي $N\left(\frac{n(N+1)}{2}\ ,\ \frac{mn(N+1)}{12}\right)$ لحساب الحدود الحرجة للاختبارات الثلاث السابقة المعرفة بالعلاقات (7.4.11) ، (9.4.11) و (11.4.11).

الحد الحرج للاختبار (7.4.11):

$$t_\alpha(m,n) = \frac{n(N+1)}{2} + \sqrt{\frac{mn(N+1)}{12}}\, t_\alpha \quad ; \quad \Phi(-t_\alpha) = \alpha \tag{15.4.11}$$

والحد الحرج للاختبار (9.4.11):

$$t_\alpha(m,n) = \frac{n(N+1)}{2} - \sqrt{\frac{mn(N+1)}{12}}\, t_\alpha \quad ; \quad \Phi(-t_\alpha) = \alpha \tag{16.4.11}$$

بينما الحدين الحرجين للاختبار (11.4.11) هما:

$$t_{\alpha/2}(m,n) = \frac{n(N+1)}{2} \pm \sqrt{\frac{mn(N+1)}{12}}\, t_{\alpha/2} \quad ; \quad \Phi(-t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} \tag{17.4.11}$$

مثـــال 2.4.11

لدراسة تأثير طريقتين في التدريس، طبقت الطريقة الأولى على عينة عشوائية مؤلفة من 8 طلاب والثانية على عينة عشوائية من 12 طالب ثم أجريت لهم جميعا امتحانات مستوى، فكانت معدلاتهم مقربة إلى أقرب عدد صحيح (مقدرة من 100) كما يلي:

العينة الأولى:

50	65	66	70	65	80	75	60
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8

العينة الثانية:

61	50	62	67	70	65	75	90	40	44	77	87
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}

هل الطريقة الأولى في التدريس أفضل من الطريقة الثانية؟ اختبر ذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

يمكن أن نتصور هنا أن القيم الملاحظة من المعدلات في العينة الأولى على أنها قيم ملاحظة على متغير عشوائي ξ (يصف معدلات مجتمع طلابي طبقت عليه الطريقة الأولى) دالة توزيعه $F_1(x)$، أما لقيم الملاحظة في العينة الثانية على أنها قيم ملاحظة على متغير عشوائي η (يصف معدلات المجتمع الطلابي ذاته طبقت عليه الطريقة الثانية) ودالة توزيعه $F_2(x)$. ويصبح المطلوب اختبار فرضية العدم $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : F_1(x) < F_2(x)$ لجميع قيم x.

نلاحظ أن $m = 8 , n = 12 , N = m + n = 20 , \alpha = 0.01$ ومنطقة رفض الاختبار من الشكل:

$$\mathfrak{I}_{1\alpha} = \{t : t \leq t_\alpha(8,12)\}$$

ولإيجاد القيمة الملاحظة t لإحصاء الاختبار T نتبع الخوارزمية التالية:

1. نقوم بدمج العينتين المشاهدتين في عينة واحد ونشكل المتسلسلة العددية لها (القيم

مرتبة تصاعدياً):

$$\begin{array}{cccccccccc} 40\le & 44\le & 50\le & 50\le & 60\le & 61\le & 62\le & 65\le & 65\le & 65 \\ y_9 & y_{10} & x_1 & y_2 & x_8 & y_1 & y_3 & x_2 & x_7 & y_9 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} 66\le & 67\le & 70\le & 70\le & 75\le & 75\le & 77\le & 80\le & 87\le & 90 \\ x_3 & y_4 & x_4 & y_5 & y_7 & y_{17} & y_{11} & x_6 & y_{12} & y_8 \end{array}$$

2. نضع تحت كل قيمة في المتسلسلة السابقة رمزها في العينة المشاهدة $x_i\,;\,i=1,\dots,8$ أو $y_j\,;\,j=1,\dots,12$، كما هو مبين أعلاه. نلاحظ وجود قيم متساوية يجب أخذها بعين الاعتبار عند تعيين الرتب.

3. نسجل رتب مفردات العينة المشاهدة الثانية في المتسلسلة العددية للعينة المدمجة فنجد:

$$R_1=5\ ,\ R_2=3.5\ ,\ R_3=7\ ,\ R_4=12\ ,\ R_5=13.5\ ,\ R_6=10$$
$$R_7=15.5\ ,\ R_8=20\ ,\ R_9=1\ ,\ R_{10}=2\ ,\ R_{11}=17\ ,\ R_{12}=19$$

4. نجمع الرتب $R_j\,;\,j=1,\dots,12$ فنحصل على القيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار T وتساوي $t=125.5$

5. نعين قيمة t_α الموافقة لـ $\alpha=0.01$ باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري، حيث إن $\Phi(-t_{0.01})=0.01$ فنجد $t_{0.01}=2.326$.

6. نحسب الحد الحرج $t_\alpha(m,n)$ للاختبار وفق العلاقة (16.4.11)، فنجد:

$$t_{0.01}(12,8)=\frac{12(21)}{2}-\sqrt{\frac{8(12)(21)}{12}}(2.326)$$
$$=126-12.96(2.326)=126-30.15=95.85$$

7. بما أن $t=125.5>t_{0.01}(8,12)=95.85$ نقبل فرضية العدم H_0. وهذا يعني أن العينتين المشاهدتين متجانستان، أي أن طريقتي التدريس واحدة من حيث التأثير على مستوى الطالب، أي مأخوذتان من مجتمع واحد.

نلاحظ أن اختبار ويلكوكسن يعتمد على إحصـــاء الرتب T، الذي بدوره يعتمــد على رتب كل عناصر العينة المدمجة. وفي حالة تساوي عنصرين أو أكثر يعطى لكل منهما متوسط الرتب التي كانت ستعطى فيما لو كانت هذه العناصر مختلفة، أي نقدر الرتـــب بمتوسطها، وبازدياد ظاهرة التساوي يزداد التقدير (التقريب) في الرتب ومن ثم تـــتراكم أخطاء التقدير هذه. هذا بالإضافة إلى أن حساب القيمة الملاحظة t لإحصاء الاختبـــار T تتطلب عمليات حسابية مطولة بازدياد m,n. لتجاوز ذلك قدم العالمان مـــان وويتـــني (عام 1947) اختباراً يعتمد على إحصاء آخر يتجاوز مشكلة تساوي العنـــاصر (تقديـــر الرتب) بالإضـــافة إلى أنه أبسط تطبيقاً، أطلـــق عليـــه اســـم اختبـــار مـــان-ويتـــني Mann-Whitney Test.

2. اختبار مان - ويتني Mann-Whitney Test

لتكن $X=(X_1,\dots,X_m),Y=(Y_1,\dots,Y_n)$ عينتين عشـــوائيتين مـــن توزيعـــين مستمرين $F_1(x),F_2(x)$ على الترتيب، ولنعرف المتغيرات العشوائية:

$$Z_{ij}=\begin{cases}1 & ; \quad X_i<Y_j\\ 0 & ; \quad X_i\geq Y_j\end{cases} \qquad ; \qquad i=1,\dots,m \quad , \quad j=1,\dots,n$$

ولنأخذ:

$$U=U(m,n)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}Z_{ij} \qquad (18.4.11)$$

نلاحظ أن:

$$U=\sum_{i=1}^{m}Z_{i1}+\sum_{i=1}^{m}Z_{i2}+\dots\dots+\sum_{i=1}^{m}Z_{in}$$

حيث إن $Z_{.1}=\sum_{i=1}^{m}Z_{i1}$ عدد عناصر العينة X الأقل من Y_1، $Z_{.2}=\sum_{i=1}^{m}Z_{i2}$ عدد عناصر العينة X الأقل من Y_2، وهكذا . . . $Z_{.n}=\sum_{i=1}^{m}Z_{in}$ عدد عناصر العينة X الأقل من Y_n.

وهذا يعني أن الإحصاء U عبارة عن المجموع العام لتلك الحالات التي تكون فيها عناصر X تتقدم عنصراً من العينة Y في المتسلسلة المتغيرة للعينة المدمجة. أي أن:

$U =$ عدد عناصر X التي أقل من Y_1 + عدد عناصر X الأقل من Y_2 + . . . + عدد عناصر X الأقل من Y_n.

فمثلاً، إذا كانت $m = 3, n = 4$ وكانت المتسلسلة المتغيرة للعينة المدمجة هي:

$$X_3 < Y_4 < X_1 \le Y_2 < Y_3 < X_2 < Y_1$$

فإن:

$$Z_{.1} = 3 \quad , \quad Z_{.2} = 1 \quad , \quad Z_{.3} = 2 \quad , \quad Z_{.4} = 1$$

وهذا يعني وجود ثلاثة عناصر من X أقل من Y_1، عنصر من X أقل من Y_2، عنصران من X أقل من Y_3 وعنصر من X أقل من Y_4. وبالتالي فإن:

$$U = U(3,4) = 3+1+2+1 = 7$$

نلاحظ من تعريف الإحصاء U أن أصغر قيمة ممكنة له هي 0 (عندما $X_{(1)} \ge Y_{(n)}$) وأكبر قيمة ممكنة له هي mn (عندما $X_{(n)} < Y_{(1)}$). إي إذا رمزنا لفئة القيم الممكنة لـ U بـ Ω_U، فإن $\Omega_U = \{0,1,\dots,mn\}$ وهذا يعني إذا كانت قيمة U كبيرة (عناصر العينة Y -بشكل عام- أكبر من عناصر العينة X)، أي $F_1(x) > F_2(x)$ لجميع قيم x. بينما إذا كانت قيمة U صغيرة (عناصر X -بشكل عام- أكبر من عناصر Y) فهذا يعني أن $F_1(x) < F_2(x)$ لجميع قيم x. وعلى ذلك فمن الطبيعي أن تكون منطقة الرفض في الحالة الأولى (U كبيرة) من الشكل:

$$\Im_{1\alpha} = \{u : u \ge u_\alpha(m,n)\} \qquad (19.4.1)$$

والفرضية البديلة $H_1 : F_1(x) > F_2(x)$ لجميع قيم x. وفي الحالة الثانية (U صغيرة) فمنطقة الرفض من الشكل:

$$\Im_{1\alpha} = \{u : u \le u_\alpha(m,n)\} \qquad (20.4.11)$$

والفرضية البديلة $H_1 : F_1(x) < F_2(x)$ لجميع قيم x. وأخيراً، إذا كانت الفرضية البديلة $H_1 : F_1(x) \ne F_2(x)$، فإن منطقة الرفض تكون على الصورة:

$$\Im_{1\alpha} = \{u : |u| \ge u_{\alpha/2}(m,n)\} \qquad (21.4.11)$$

واختيار شكل منطقة الرفض يعتمد على الهدف الذي يبنى الاختبار من أجله.

لتعيين قيمة $u_\alpha(m,n)$ أو $u_{\alpha/2}(m,n)$ في الاختبارات السابقة يلزمنا معرفة توزيع إحصاء الاختبار U، عند صحة فرضية العدم H_0.

نلاحظ من تعريف الإحصاءين T و U أنهما مرتبطان بعلاقة خطية على النحو الآتي:

$$U = T - \frac{n(n+1)}{n} \qquad (22.4.11)$$

يمكن إثبات ذلك كما يلي:

$$U = Z_{.1} + Z_{.2} + ... + Z_{.n}$$

وكما بينا سابقاً أن $Z_{.1}$ = عدد عناصر العينة X التي أقل من Y_1، وهذا يساوي رتبة Y_1 في المتسلسلة المتغيرة للعينة المدمجة مطروحاً منها رتبة العنصر Y_1 في المتسلسلة المتغيرة للعينة Y (أي ترتيب العنصر Y_i في العينة المرتبة Y) ولنرمز لها بـ S_1، أي أن $Z_{.1} = R_1 - S_1$. و $Z_{.2}$ = عدد عناصر العينة X التي أقل من Y_2 وهو عبارة عن رتبة Y_2 (R_2) في المتسلسلة المتغيرة للعينة المدمجة مطروحاً منها رتبة Y_2 في المتسلسلة المتغيرة لـ Y (S_2)، أي أن $Z_{.2} = R_2 - S_2$ وهكذا . . . $Z_{.n} = R_n - S_n$. وبالتالي فإن:

$$U = \sum_{j=1}^{n} Z_{.j} = \sum_{j=1}^{n}(R_j - S_j) = \sum_{j=1}^{n} R_j - \sum_{j=1}^{n} S_j$$

$$= T - (1 + 2 + ... + n) = T - \frac{n(n+1)}{2}$$

وبناءً على صحة العلاقة (22.4.11) يمكننا إيجاد توزيع U بمعرفة توزيع T:

$$E_0U = E(U|H_0) = E_0T - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(N+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(N-n)}{2} = \frac{mn}{2}$$

$$V_0U = V_0T = \frac{mn(N+1)}{12}$$

وبناءً على صحة العلاقة (22.4.11) وإثباتنا السابق أن:

$$\mathcal{L}(T|H_0) \longrightarrow N\left(\frac{n(N+1)}{2}, \frac{mn(N+1)}{12}\right)$$

عندما $m,n \to \infty$، فإن:

$$\mathcal{L}(U|H_0) \longrightarrow N\left(\frac{mn}{2}, \frac{mn(N+1)}{12}\right)$$

عندما $n,m \to \infty$. وهذا يعني يمكننا استخدام التوزيع الطبيعي $N\left(\frac{mn}{2}, \frac{mn(N+1)}{12}\right)$ كتقريب جيد لتوزيع U، عند صحة الفرضية H_0، وعندما تكون m,n كبيرتين. ولقد وجد أن هذا التقريب جيد عندما تكون $m+n \geq 20$, $m,n \geq 4$.

وعلى ذلك فإن الحد الحرج $u_\alpha(m,n)$ لمنطقة الرفض $\mathfrak{J}_{1\alpha}$ (19.4.11) يعطى بالعلاقة:

$$u_\alpha(m,n) = \frac{mn}{2} + \sqrt{\frac{mn(N+1)}{12}}\, t_\alpha \quad ; \quad \Phi(-t_\alpha) = \alpha \qquad (23.4.11)$$

والحد الحرج لمنطقة الرفض (20.4.11):

$$u_\alpha(m,n) = \frac{mn}{2} - \sqrt{\frac{mn(N+1)}{12}}\, t_\alpha \quad ; \quad \Phi(-t_\alpha) = \alpha \qquad (24.4.11)$$

و $u_{\alpha/2}(m,n)$ في (21.4.11):

$$u_{\alpha/2}(m,n) = \frac{mn}{2} \pm \sqrt{\frac{mn(N+1)}{12}}\, t_{\alpha/2} \quad ; \quad \Phi(-t_{\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2} \qquad (25.4.11)$$

مثال 3.4.11

لتكن لدينا معطيات المثال السابق (2.4.11) ويطلب اختبار الفرضية $H_0 : F_1(x) = F_2(x)$ ضد $H_1 : F_1(x) < F_2(x)$ لجميع قيم x باستخدام اختبار مان ويتني، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

لإيجاد القيمة الملاحظة u لإحصاء الاختبار U نتبع الخطوات الآتية:

1. نشكل المتسلسلة العددية لكل عينة مشاهدة:

العينة الأولى:

50	60	65	65	66	70	75	80

العينة الثانية:

40	44	50	61	62	65	67	70	75	77	87	90
y_9	y_{10}	y_2	y_1	y_3	y_6	y_4	y_5	y_7	y_{11}	y_{12}	y_8

2. نحسب $z_{.j}\ ; j = 1,...,12$ من خلال مقارنة القيمة الملاحظة $y_j\ ; j = 1,...,12$ في العينة المشاهدة $y = (y_1,...,y_{12})$ مع القيم المشاهدة في المتسلسلة العددية للعينة المشاهدة الأولى $x = (x_1,...,x_8)$، فنجد:

$$z_{.1} = 2\ ,\ z_{.2} = 0\ ,\ z_{.3} = 2\ ,\ z_{.4} = 5\ ,\ z_{.5} = 5\ ,\ z_{.6} = 2$$
$$z_{.7} = 6\ ,\ z_{.8} = 8\ ,\ z_{.9} = 0\ ,\ z_{.10} = 0\ ,\ z_{.11} = 7\ ,\ z_{.12} = 8$$

وبالتالي القيمة المشاهدة u تساوي:

$$u = \sum_{j=1}^{12} z_{.j} = 45$$

3. نعين $u_\alpha(m,n) = u_{0.01}(8,12)$ للاختبار (20.4.11) وفق العلاقة (24.4.11)، ومن جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد $t_{0.01} = 2.326$، من ثم:

$$u_{0.01}(8,12) = \frac{8(12)}{2} - \sqrt{\frac{8(1)(21)}{12}}(2.326) = 48 - 30.15 = 17.85$$

4. مقارنة القيمة المشاهدة u لإحصاء الاختبار U بالقيمة الجدولية $u_\alpha(m,n)$.

بما أن $u = 45 > u_{0.01} = 17.85$ نقبل فرضية التجانس H_0، وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها عند تطبيق اختبار ويلكوكسون.

5.11 اختبار كروسكال–واليس KRUSKAL-WALLIS TEST

يعتبر هذا الاختبار بديلاً لامعلمياً لاختبار تحليل التباين في اتجاه واحد، أي يستخدم كبديل لطريقة تحليل التباين للتجارب ذوات العامل الواحد حين لا تتوفر شروطها. وهذا الاختبار مبني على إحصاء مجموع الرتب. وتتخلص المشكلة التي نتناولها هنا فيما يلي:

لدينا m من العينات العشوائية المستقلة أحجامها $n_1, n_2, ..., n_m$، نرمز لها بـ $X_i = (X_{i1}, ..., X_{in_i})\,; i = 1, ..., m$، مأخوذة من مجتمعات مستمرة عددها m ودوال توزيعها $F_i(x)\,; i = 1, ..., m$ وهذا يعني:

$X_1 = (X_{11}, ..., X_{1n_1})$ عينة عشوائية من توزيع مستمر $F_1(x)$.

$X_2 = (X_{21}, ..., X_{2n_2})$ عينة عشوائية من توزيع مستمر $F_2(x)$.

.

.

$X_m = (X_{m1}, ..., X_{mn_m})$ عينة عشوائية من توزيع مستمر $F_m(x)$.

ونريد اختبار فرضية العدم:

$$H_1 : F_1(x) = F_2(x) = ... = F_m(x)$$

ضد الفرضية البديلة H_1، ليست كل هذه المجتمعات لها نفس التوزيع. وهذا يعني أن كل العينات الـ m ليست مأخوذة من مجتمع واحد (غير متجانسة)، بل هناك عينة عشوائية واحدة على الأقل مأخوذة من مجتمع آخر.

إذا كـــانت فرضية العدم H_0 صحيحة فيمكن النظر إلى هذه العينات (m عينـــة) على أنهـــا عينة عشـــوائية واحـــدة حجمها $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ مأخوذة من مجتمـــع واحـــد $F(x)=F_1(x)=...=F_m(x)$ ، أي نتعامل مع عينة عشوائية واحـــدة Z حجمـــها n. نشكل المتسلسلة المتغـــيرة للعينة العشـــوائية الـــموحدة ولنرمز بـــ R_{ij} لرتبة العنصـــر (موقع العنصـــر) X_{ij} في هذه المتسلسلة المتغـــيرة، ومن ثم بـــ $R_i=R_i$ لمجموع رتـــب عنـــاصر العينة العشوائية X_i في تلك المتسلسلة المتغيرة، أي أن $R_i=\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}$ وبإعطـــاء $i=1,2,...,m$ نجد:

الرتب R_{ij}	مجموع الرتب R_i
R_{11} R_{12} . . R_{1n_1}	R_1
R_{21} R_{22} . . R_{2n_2}	R_2
. .	.
R_{k1} R_{k2} R_{kn_k}	R_m

نلاحظ أن $R_{ij}=r_{ij}\,;\,r_{ij}=1,...,n$. وإذا كانت فرضية العدم H_0 صحيحة، فـــإن المجاميع $R_1,...,R_m$ (مجموع رتب عناصر كل عينة على حدة) تكون ذات قيم متقاربـــة، أما إذا كانت الفرضية H_0 غير صحيحة فإن العناصر ذات الرتب الكبرى في المتسلســـلة المتغيرة للعينة المدمجة (حجمها n) تميل أن تقع في العينـــات العشـــوائية المـــأخوذة مـــن المجتمعات التي لها أكبر وسطاء η_i. وعلى ذلك نكون في حاجـــة إلى إحصـــاء اختبـــار يكشف عن وجـــود أو عدم وجود واحد أو أكثر من مجاميع الرتـــب $R_i\,;\,i=1,...,m$ كبير بدرجة لا نتوقع حدوثها عن طريق الصدفة.

وقد وجد أن أحد الإحصاءات التي تصلح لذلك هو ذاك الـــذي قدمـــه العالمـــان كروسكال وواليس والمعطى بالصيغة:

$$K=K(Z)=\sum_{i=1}^{m}\frac{(R_i-ER_i)^2}{VR_i} \qquad (1.5.11)$$

وعلى ذلك فإن القيم الكبيرة لإحصاء الاختبار K ضد الفرضية H_0 ولصالح الفرضيـــــة البديلة H_1 (ليست كل المجتمعات $F_i(x); i=1,...,m$ لها نفس التوزيع الاحتمـــــالي).
وبالتالي منطقة الرفض تكون على الصورة:

$$G_1=\{z:k(z)\geq c\} \quad ; \quad z=(x_{11},...,x_{1n_1},...,x_{m1},...,x_{mn_m}) \qquad (2.5.11)$$

ولتعيين قيمة الثابت c يلزمنا معـــرفة توزيع الإحصاء K، عند صحة H_0، الـــذي يمكن اشتقاقه بسهولة، عند شروط معينة، كما يلي:

إذا كانت الفرضية H_0 صحيحة، فإن R_{ij} يمكن أن تأخذ أي قيمة $r_{ij}=1,2,...,n$ باحتمال يساوي $1/n$ أي أن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي R_{ij} هو:

$R_{ij}=r_{ij}$	1	2	...	n
$P(r_{ij})$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$		$\frac{1}{n}$

وعلى ذلك:

$$E_0(R_{ij})=E(R_{ij}|H_0)=\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}P(r_{ij})=\frac{1}{n}(1+2+....+n)=\frac{n+1}{2}$$

$$V_0(R_{ij})=V(R_{ij}|H_0)=E_0R_{ij}^2-(E_0R_{ij})^2=\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}^2P(r_{ij})-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n}(1+2^2+....+n^2)=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)=\frac{n^2-1}{12}$$

وحيث إن:

$$R_i=\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij} \quad ; \quad i=1,...,m$$

فإن:

$$E_0(R_i)=E(R_i|H_0)=\sum_{j=1}^{n_i} E(R_{ij})=\sum_{j=1}^{n_i}\frac{n+1}{2}=n_i\,\frac{n+1}{2} \quad ; \quad i=1,...,m$$

$$V_0(R_i)=V\left(R_i|H_0\right)=\sum_{j=1}^{n_i}V_0R_{ij}=\sum_{j=1}^{n_i}\frac{n^2-1}{12}=n_i\frac{n^2-1}{12}\quad;\quad i=1,\dots,m$$

لأن المتغيرات العشوائية $R_{ij}\,;\,j=1,\dots,n_i$ مستقلة.

بما أن $R_i=R_{i1}+\dots+R_{in_i}$ مجموع n_i من المتغيرات العشوائية المستقلة توقعاتها متساوية وموجودة وتساوي $n_i\frac{n+1}{2}$ وكذلك تبايناتها متساوية وموجودة وتساوي $n_i\frac{n^2-1}{12}$ فإن [راجع الفقرة (1.6.1-I)] التوزيع المقارب للمتغير العشوائي R_i، عند صحة الفرضية H_0:

$$\mathcal{L}(R_i|H_0)\longrightarrow N\left(\frac{n+1}{2}n_i\,,\frac{n^2-1}{12}n_i\right)$$

عندما $n\to\infty$. أي إذا كانت n كبيرة بكفاية، فإن:

$$\mathcal{L}(R_i|H_0)\approx N\left(\frac{n+1}{2}n_i\,,\frac{n^2-1}{12}n_i\right)$$

ومن ثم:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\left(R_i-\left(n_i(n+1)/2\right)\right)}{\sqrt{n_i(n^2-1)/12}}\right)\approx N(0,1)$$

وعلى ذلك [راجع المبرهنة (7.3.2-I)]:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\left(R_i-\left(n_i(n+1)/2\right)\right)^2}{\left(n_i(n^2-1)/12\right)}|H_0\right)\approx\chi^2_{(1)}$$

وبالتالي [راجع نتيجة المبرهنة (7.3.2-I)]:

$$\mathcal{L}\left(K|H_0\right)\approx\chi^2_{(m-1)}\qquad(3.5.11)$$

نلاحظ أن درجات الحرية نقصت بمقدار واحد لأن هنالك علاقة خطية واحدة

بين المتغيرات $R_1,\ldots,R_m$ وهي:

$$\sum_{i=1}^{m} R_i = (1+2+\ldots+n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

اقترح العالمان كروسكان ووواليس لتبسيط العمليات الحسابية استبدال n^2+1 بالمقدار $n(n+1)$، وهذا لا يؤثر على الجوانب التطبيقية لهذا الاختبار؛ لأن التغير في قيمة إحصاء الاختبار K عند عينات مشاهدة $[n=(n_1+\ldots+n_m)\geq 30]$ طفيف جداً. وبذلك يصبح إحصاء اختبار كروسكال وواليس:

$$K = \sum_{i=1}^{m} \frac{(R_i - E_0 R_i)^2}{V_0 R_i} = \frac{12}{n^2-1} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i} \left(R_i - n_i \frac{n+1}{2} \right)^2$$

$$= \frac{12}{n^2-1} \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1) \approx \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{m} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(n+1) \qquad (4.5.11)$$

هكذا، إذا كانت $n \geq 30$ و $n_i \geq 5\,;\, i=1,\ldots,m$ فإن الحد الحرج c، عند مستوى معنوية α، لمنطقة الرفض (1.5.11) هو $\chi^2_{\alpha;m-1}$. وبالتالي يصبح اختبار كروسكال وواليس معطى بمنطقة الرفض:

$$G_{1\alpha} = \left\{ x : k(x) \geq \chi^2_{\alpha;m-1} \right\} \qquad (5.5.11)$$

وعلى ذلك، عند مستوى معنوية α، نرفض فرضية العدم H_0 إذا كانت القيمة المشاهدة k لإحصاء الاختبار K أكبر أو تساوي $\chi^2_{\alpha;m-1}$ ونقبلها عندما $k < \chi^2_{\alpha;m-1}$.

لإجراء اختبار كروسكال وواليس نتبع الخطوات الآتية:

1. نقوم بدمج العينات المشاهدة $x_1,\ldots,x_m$ في عينة واحدة حجمها $n = \sum_{1}^{m} n_i$.
2. نشكل المتسلسلة العددية للعينة المدمجة (ترتيب القيم المشاهدة تصاعدياً من الأصغر إلى الأكبر).
3. نضع تحت كل قيمة في المتسلسلة العددية رمزها في العينة المشاهدة x_i ومن ثم

نعين ترتيبها R_{ij}.

4. نجمع رتب عناصر كل عينة مشاهدة على حدة فنحصل على $R_i\ ;i=1,...,m$.

5. نحسب القيمة المشاهدة k لإحصاء الاختبار K وذلك بالتعويض في (4.5.11).

6. من جدول χ^2 بـــ $(m-1)$ درجة حرية ومستوى معنوية α نحصل على $\chi^2_{\alpha;m-1}$.

7. بمقارنة القيمتين المشاهدة k والجدولية $\chi^2_{\alpha;k-1}$ نتخذ أحد قرارين:

إذا كانت $k \geq \chi^2_{\alpha;m-1}$ نرفض فرضية العدم H_0.

إذا كانت $k < \chi^2_{\alpha;m-1}$ نقبل فرضية العدم H_0.

مثـــال 1.5.11

لدراسة تأثير ثلاثة أنواع من الأسمدة A , B , C على إنتاج القمح، أخذت عشـوائياً 34 قطعة مزروعة بالقمح ومتشابهة تماماً (نوع القمح واحد، طريقة الري واحدة، نـــوع التربة واحدة، . . . الخ) وقسمت عشوائياً إلى ثلاث عينات عشوائية جزئيـــة بحجـــوم $n_1=10\,, n_2=13\,, n_3=11$. وأعطيت كل عينة عشوائية جزئية نوعـــاً واحـــداً مـــن السماد، وفي نهاية الموسم كان الإنتاج مقدراً بأقرب طن كما يلي:

نوع السماد	إنتاج القطع المزروعة													n_i
A	60	90	56	50	78	70	84	78	88	80				10
B	68	59	51	82	85	49	89	65	57	77	93	77	91	13
C	67	61	52	75	83	79	58	66	92	87	94			11

اختبر عند مستـــوى معنوية $\alpha = 0.10$ أن تأثير أنواع السماد متساوٍ (H_0) ضـــد الفرضية البديلة أنها ليست جميعها متساوية (H_1). أي إذا رمزنا بـــــ $F_i(x)\,; i=1,2,3$ لـــدالة توزيع ξ_i = محصـــول القمح النـــاتج مـــن قطعـــة الأرض المســـمدة بـــالنوع A_i $(A_1=A\,, A_2=B\,, A_3=C)$ فيصبح المطلوب اختبار فرضية العدم:

$$F_1(x) \equiv F_2(x) \equiv F_3(x)$$

لاختبار هذه الفرضية بتطبيق اختبار كروسكان ووليس ندمج العينات الثلاث في عينة واحدة ونرتبها تصاعدياً، حسب القيم، ونضع رمز العنصر تحت كل رقم فنحصل على المتسلسلة العددية:

49	<50	<51	<52	<56	<57	<58	<59	<60	<61	<65	<66
y_6	x_4	y_3	z_3	x_3	y_9	z_2	y_2	x_1	z_2	y_8	z_8
<67	<68	<70	<73	<75	<76	<77	<78	<79	<80	<82	<83
z_1	y_1	x_6	y_{12}	z_4	x_8	y_{10}	x_5	z_6	x_{10}	y_4	z_5
<84	<85	<87	<88	<89	<90	<91	<92	<93	<94		
x_7	y_5	z_{10}	x_9	y_7	x_2	y_{13}	z_9	y_{11}	z_{11}		

بناءً على هذه المتسلسلة نحسب R_1, R_2, R_3:

$$R_1 = \sum_{j=1}^{10} R_{1j} = 9+30+5+2+20+15+25+18+28+22 = 174$$

$$R_2 = \sum_{j=1}^{13} R_{2j} = 14+8+3+23+26+1+29+11+6+19+33+16+31 = 220$$

$$R_3 = \sum_{j=1}^{11} R_{3j} = 13+10+4+17+24+21+7+12+32+27+34 = 201$$

وعلى ذلك فالقيمة المشاهدة لإحصاء الاختبار K:

$$k = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{3} \frac{(R_i)^2}{n_i} - 3(n+1) = 105.12 - 105 = 0.12$$

وحيث إن $n_i > 5 ; i = 1,2,3$ فالقيمة الحرجة $\chi^2_{0.10;2}$ تؤخذ من جدول χ^2 بـ 2 درجة حرية ومستوى معنوية $\alpha = 0.10$ فنجد $\chi^2_{0.10;2} = 4.605$.

بما أن $k = 0.12 < \chi^2_{0.10;2}$ نقبل فرضية العدم H_0، أي أن تأثير الأنواع الثلاثة من الأسمدة متساوٍ، وما نلاحظه من تفاوت في الإنتاج يعزى لعوامل الصدفة وليس لاختلاف الأسمدة المستخدمة.

تمارين

1. لدراسة تأثير نوعين من السماد A , B على إنتاج نوع معين من القمح، أخذت عشوائياً من 15 قطعة مزروعة بالقمح ومتشابهة تماماً (المساحة، طريقة الري، وكافة الظروف الأخرى) وقسمت عشوائياً على عينتين بحجم $n_1 = 8 , n_2 = 7$. أعطيت العينة الأولى السماد A والعينة الثانية السماد B، فكان المحصول لكل قطعة مقرباً إلى أقرب طن كما هو وارد في الجدول الآتي:

إنتاج القطعة المسمدة بالنوع A	80	78	90	82	84	83	75	60
إنتاج القطعة المسمدة بالنوع B	76	79	80	79	65	91	50	

اختبر صحة القول: أن تأثير السماد واحد على إنتاج القمح، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.10$، باستخدام اختبار سميرنوف.

2. مصنع ينتج ثلاثة أنواع من فرامل الدراجات، أخذت عينة عشوائية من 60 دراجة متشابهة تماماً وقسمت عشوائياً إلى ثلاث فئات تشتمل على الترتيب $n_1 = 20 , n_2 = 15 , n_3 = 25$ دراجة. ووزعت عشوائياً الأنواع الثلاثة من الفرامل A , B , C على الفئات الثلاث. ولنفترض النوع A على الفئة الأولى، النوع B على الفئة الثانية والنوع C على الفئة الثالثة. المتغير الذي نقارن به الفرامل هو العمر الذي يمضي حتى يتطلب الأمر إصلاحاً أساسياً فيها، وقد سجلت هذه الأعمار بالشهور بدقة 0.1، فكانت كما يلي:

فئات العمر / نوع العوامل	(0,3]	(3,6]	(6,9]	(9,12]	(12,15]	(15,18]
A	1	2	5	8	2	2
B	0	2	6	4	2	1
C	2	3	6	10	3	1
$\sum$	3	7	17	22	7	4

اختبر، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$، صحة القول أن أعمار الأنواع الثلاثة من العوامل لها نفس التوزيع الاحتمالي، أي نفس الجودة.

3. في دراسة لمعرفة تأثير نظام جديد في المرور، أخذ عشوائياً 30 تقاطعاً من التقاطعات الخطرة، وسجل عدد الحوادث خلال 3 شهور في كل نقطة قبل النظام الجديد و 3 شهور بعده، فكانت النتائج كما يلي:

قبل النظام الجديد:

1	3	4	5	7	2	7	8	3	9
6	4	2	9	11	7	3	10	1	4
3	10	2	7	10	3	6	8	12	3

بعد النظام الجديد:

1	3	2	5	2	4	7	8	6	9
2	1	3	4	4	8	5	6	2	10
7	3	2	2	4	1	5	3	2	1

اختبر تجانس العينتين عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

4. لمقارنة مستوى الذكاء بين طلاب مدرستين A , B أخذت عينة عشوائية واحدة من طلاب كل منهما وأجري اختبار ذكاء لهم فكانت النتائج مقربة إلى أقرب عدد صحيح كما يلي:

طلاب المدرسة A	47	51	63	60	62	70	72	69	62	67	90	
طلاب المدرسة B	52	64	59	60	71	70	65	61	49	48	80	79

اختبر صحة القول أن طلاب المدرسة A أذكى من طلاب المدرسة B باستخدام اختبار التلاحقات عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$. وما هي الفرضية البديلة في هذه المسألة.

5. لتكن لدينا معطيات التمرين (4) والمطلوب اختبار تجانس العينتين عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ بتطبيق:

أ. اختبار ويلكوكسون.

ب. اختبار مان ويتني.

ج. اختبار التلاحقات.

6. ليكن ع متغيراً عشوائياً مستمراً توزيعه $\mathcal{L}$(ع) غير معلوم. أخذت أربع عينات عشوائية مستقلة في أوقات مختلفة من قيم هذا المتغير، فكانت على النحو الآتي:

العينة المشاهدة x_i	القيم الملاحظة	حجم العينة n_i
x_1	51 48 56 60 66 64 45	8
x_2	61 72 48 49 67 43 76 74 71	9
x_3	80 41 52 67 71 40 75 81	8
x_4	39 83 64 73 44 68 84 79 87 82	10

اختبر، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ، تجانس العينات الأربع.

الفصل الثاني عشر:

اختبارات الاستقلال واختبارات العشوائية

1.12 مقدمة

في حالات عدة يكون لدينا مجتمع موصوف بمتغير عشوائي ذو بعدين $\xi = (\xi_1, \xi_2)$، ونريد معرفة ما إذا كان هذان المتغيران مستقلين أم لا. وعندئذٍ يقوم الباحث في سحب عينة عشوائية بحجم n من المجتمع ثم يقوم بقياس كل من ξ_1، ξ_2 عند كل وحدة من وحدات العينة العشوائية، فيحصل على عينة عشوائية بحجم n من أزواج القيم $((X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n))$. فمثلاً، لمعرفة ما إذا كان طول الذراع (المتغير ξ_1) وطول الرجل (المتغير ξ_2) لمجتمع الأطفال مستقلين أم لا، يختار الباحث عينة عشوائية بحجم n من مجتمع الأطفال ثم يقوم بقياس كل من المتغيرين ξ_1، ξ_2 عند كل طفل في العينة العشوائية المسحوبة فيحصل على عينة عشوائية من الأزواج العددية من توزيع ξ. كذلك عند دراسة الاستقلال بين محتوى الكلسترول (ξ_1) في الدم ووزن الجسم (ξ_2) في مجتمع المرضى بمرض معين نأخذ عينة عشوائية بحجم n من هؤلاء المرضى ثم نقيس كل من هذين المتغيرين (ξ_1, ξ_2). في مثل هاتين الحالتين نكون أمام متغيرين عشوائيين ξ_1، ξ_2، لكل منهما توزيع احتمالي، ونريد اختبار فرضية العدم H_0 حول استقلال هذين المتغيرين مقابل الفرضية البديلة H_1 حول ارتباط المتغيرين.

كما أشرنا سابقاً، إن جميع طرق الاستدلال الإحصائي التي نوقشت في الفصـــول السابقة بنيت على افتراض أن العينة أو العينات عشوائية. غير أن هناك حالات يصعـــب فيها مدى تحقق هذا الافتراض، أي لدينا شك في صحته، وبالتالي ينبغي اختبار عشـــوائية العينة أو العينات قبل البدء في البحث المطلوب.

سنتطرق في هذا الفصل لأهم اختبارات الاستقلال واختبارات العشوائية.

2.12 اختبارات الاستقلال INDEPENDENCE TEST

لنفترض لدينا عينة عشوائية $Z = ((X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n))$ من توزيع احتمـــالي ذي بعدين $\mathcal{L}(\xi = (\xi_1, \xi_2))$ غير معلوم، نرمز لدالة توزيعه بـــ $F_\xi(x,y)$. ونريـــد اختبـــار فرضية الاستقلال:

$$H_0 : F_\xi(x,y) = F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(y)$$

حيث إن $F_{\xi_1}(x)$, $F_{\xi_2}(y)$ دالتا توزيع المتغيرين الحقيقيين ξ_1, ξ_2، وغير معلومتين أيضـــاً. مقابل الفرضية البديلة:

$$H_1 : F_\xi(x,y) \neq F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(y)$$

1.2.12 اختبار χ^2 للاستقلال Chi-Square Test of Independence

اختبار التوافق البسيط للفرضية H_0 يمكن بناؤه على أساس قاعدة χ^2. وكما هـــو معلوم تستخدم هذه القاعدة في حالة النماذج المنفصلة (المقطعة) ذات العدد المنتهي مـــن النهايات (النتائج)، لذا نفترض أن المتغير العشوائي ξ_1 يأخذ عدداً منتهياً k من القيم، الـــتي سنرمز لها بـــ $a_1, ..., a_k$، وكذلك المتغير العشوائي الثاني ξ_2 يأخذ s قيمة $b_1, ..., b_s$.

إذا كان النموذج مستمـــراً، أي أن التجربة موصوفة بمتغير عشـــوائي $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ مستمر، فنصنف أولاً القيم الممكنة لكل من المتغيرين العشوائيين ξ_1 , ξ_2 على حـــدة. في

هذه الحالة نقسم فئة قيم ξ_1 (Ω_{ξ_1}) إلى k فترة $\zeta_1^{(1)},...,\zeta_k^{(1)}$ مانعة بالتبادل وكذلك فئة قيم ξ_2 (Ω_{ξ_2}) إلى s فئة مانعة بالتبادل $\zeta_1^{(2)},...,\zeta_s^{(2)}$، بحيث إن:

$$\zeta_i^{(l)} \cap \zeta_j^{(l)} = \varnothing \quad ; \quad i \neq j \ , \ l = 1,2$$
$$\bigcup_{i=1}^{k} \zeta_i^{(1)} = \Omega_{\xi_1} \quad , \quad \bigcup_{j=1}^{s} \zeta_j^{(2)} = \Omega_{\xi_2}$$

وبذلك يتم تقسيم (تجزئة) فئة القيم الممكنة للمتغير العشوائي $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ إلى $N = ks$ مستطيل $\zeta_i^{(1)} \times \zeta_j^{(2)} \ ; \ i = 1,...,k \ , j = 1,...,s$. وعندئذٍ، إذا رمزنا بـ:

$$\eta_1(\zeta_i^{(1)}) = i = a_i \ ; \ i = 1,...,k \quad , \quad \eta_2(\zeta_j^{(2)}) = j = b_j \ ; \ j = 1,...,s$$

فيصبح لدينا المتغير العشوائي المنقطع $\eta = (\eta_1, \eta_2)$، وتؤول المسألة إلى حالة نموذج منفصل. من ثم تصاغ فرضية العدم H_0 على النحو الآتي:

$$H_0 : F_\eta(x, y) = F_{\eta_1}(x) F_{\eta_2}(y) \tag{1.2.12}$$

وفي حالة صحة فرضية العدم H_0، أي المتغيرين η_1 ، η_2 مستقلين، فإن المتغيرين المستمرين ξ_1 ، ξ_2 مستقلان. وهذا يعني أن الفرضية:

$$H_0 : F_\xi(x, y) = F_{\xi_1}(x) F_{\xi_2}(y)$$

صحيحة.

لنرمز بـ v_{ij} لتكرار (a_i, b_j) في العينة Z (حالة توزيع ξ منقطع) ولعدد الملاحظات الزوجية (a_i, b_j) (عدد عناصر العينة العشوائية Z المنتمية للمستطيل $\zeta_i^{(1)} \times \zeta_j^{(2)}$ في حالة معطيات مصنفة)، حيث إن $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{s} v_{ij} = n$. من المفيد وضع نتائج الملاحظة على هيئة جدول يدعى بجدول المقارنات التزاوجية كالجدول (1.2.12):

جدول (1.2.12)

ξ_1	ξ_2				$\sum$
	b_1	b_2	....	b_s	
a_1	v_{11}	v_{12}	....	v_{1s}	$v_{1.}$
a_2	v_{21}	v_{22}	....	v_{2s}	$v_{2.}$
.	.	.		.	.
.	.	.		.	.
a_k	v_{k1}	v_{k2}	....	v_{ks}	v_k
$\sum$	$v_{.1}$	$v_{.2}$	....	$v_{.s}$	n

حيث إن:

$$v_i = v_{i.} = \sum_{j=1}^{s} v_{ij} \quad ; \quad i = 1,\dots,k$$

$$v_j = v_{.j} = \sum_{i=1}^{k} v_{ij} \quad ; \quad j = 1,\dots,s$$

وإذا رمزنا بـــ h_{ij} للقيمة الملاحظة لـــ v_{ij}، فإن:

$$h_{i.} = \sum_{j=1}^{s} h_{ij} \quad , \quad h_{.j} = \sum_{i=1}^{k} h_{ij} \quad ; \quad i = 1,\dots,k \quad , \quad j = 1,\dots,s$$

القيمة الملاحظة لـــ $v_{i.}\, , v_{j.}$ على الترتيب.

ليكن:

$$p_{ij} = P(\xi_1 = a_i \, , \xi_2 = b_j) \quad ; \quad i = 1,\dots,k \ , \ j = 1,\dots,s$$

عندئذٍ فرضية الاستقلال H_0 تعني وجود $(k+s)$ من الأعداد $p_{i.}\, , p_{.j}$ بحيث أن:

$$H_0 : p_{ij} = p_{i.}\, p_{.j} \quad ; \quad \sum_{i=1}^{k} p_{i.} = \sum_{j=1}^{s} p_{.j} = 1$$

أي أن:

$$\mathcal{L}(\upsilon_{ij}: i=1,\dots,k\,,\, j=1,\dots,s|H_0) = M\big(n; p=(p_{i.}p_{.j}\,; i=1,\dots,k, j=1,\dots,s)\big) \quad (2.2.12)$$

بذلك تؤول فرضية التجانس H_0 إلى العبارة "أن التكرارات υ_{ij} (عددها يساوي $N = ks$)، تخضع لقانون التوزيع المتعدد (2.2.12)". إن متجه الاحتمالات $p = (p_{i.}p_{.j}\,; i=1,\dots,k\,, j=1,\dots,s)$ يتعين بمعرفة قيم $r = k+s-2$ من المعالم المستقلة $p_{1.},\dots,p_{k-1.}, p_{.1},\dots,p_{.s-1}$، لأن $\sum_1^k p_{i.} = 1, \sum_1^s p_{.j} = 1$.

لاختبار هذه الفرضية يمكن استخدام طريقة χ^2 الواردة في البند (2.8). لنحدد تقديرات طريقة المعقولية العظمى للمعالم غير المعلومة $p_{i.}, p_{.j}$ (عددها $r = k+s-2$).

إذا كانت فرضية العدم H_0 صحيحة، فإن دالة المعقولية تكتب على الصورة:

$$L(p) = c\prod_{i,j}(p_{i.}p_{.j})^{\upsilon_{ij}} = c\prod_i^k p_{i.}^{\upsilon_{i.}}\prod_j^s p_{.j}^{\upsilon_{.j}}$$

حيث إن المضروب c مستقل عن المعالم المجهولة. وبناءً على طريقة مضاريب لاغرانج غير المحددة نجد أن المقدِّرات المطلوبة من الشكل:

$$\hat{p}_{i.} = \frac{\upsilon_{i.}}{n}\;;\; i=1,\dots,k \qquad , \qquad \hat{p}_{j.} = \frac{\upsilon_{.j}}{n}\;;\; j=1,\dots,s \qquad (3.2.12)$$

وبالتالي إحصاء الاختبار (1.3.8) يكتب على الصورة:

$$\hat{X}_n^2 = n\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k}\frac{(\upsilon_{ij}-\upsilon_{i.}\upsilon_{.j}/n)^2}{\upsilon_{i.}\upsilon_{.j}} = n\left(\sum_{i,j}\frac{\upsilon_{ij}^2}{\upsilon_{i.}\upsilon_{.j}} - 1\right) \qquad (4.2.12)$$

وحسب المبرهنة (1.3.8)، فإن:

$$\mathcal{L}(\hat{X}_n^2|H_0) \longrightarrow \chi^2_{((k-1)(s-1))}$$

عندما $n \to \infty$. حيث إن عدد درجات الحرية للتوزيع المقارب χ^2 يساوي:

$$N-1-r = ks-(k+s-2) = (k-1)(s-1)$$

هكذا، عندما يكون الحجم n كبيراً $(n \geq 50)$ و $v_{ij} \geq 5 ; i=1,...,k , j=1,...,s$ فمنطقة رفض فرضية العدم H_0 ، عند مستوى معنوية (دلالة) α تكون:

$$\Im_{1\alpha} = \left\{t : t \geq \chi^2_{\alpha;(k-1)(s-1)}\right\}$$

ويتعين الحد الحرج من العلاقة:

$$P\left(\hat{X}^2_n \geq \chi^2_{\alpha;(k-1)(s-1)} \middle| H_0\right) = \alpha$$

وهذا الاختبار تقريبي، وبالتالي احتمال الخطأ من النوع I الموافق له يساوي تقريباً مستوى المعنوية المعطى α، ويدعى باختبار χ^2 للاستقلال، وهو اختبار ذو جانبين (واضح من تعريف $\hat{X}^2_n$)، أي أن الفرضية البديلة H_1 من الشكل:

$$H_1 : F_\xi(x,y) \neq F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(y)$$

مثال 1.2.12

لدراسة ما إذا كان لون العينين ولون الشعر لأفراد مجتمع ما مستقلين أم لا، أخذت عينة عشوائية من 6800 فرد. وصنف هؤلاء الأفراد حسب المؤشر أو العامل الأول (لون العينين) إلى أربع أنواع (مستويات). فمثلاً، لون العينين: أسود (c_1)، بني (c_2)، أزرق (c_3) وأخضر (c_4). وصنف الأفراد حسب المؤشر أو العامل الثاني (لون الشعر) إلى ثلاثة أنواع (مستويات). فمثلاً، أسود (d_1)، أشقر (d_2) وخرنوبي (d_3).

إذا عرفنا المتغيرين العشوائيين ξ_1, ξ_2 على النحو الآتي:

$$\xi_1(c_i) = a_i \ ; \ i=1,2,3,4 \quad , \quad \xi_2(d_j) = b_j \ ; \ j=1,2,3$$

حيث إن a_i , b_j أعداد حقيقية مختلفة متفق عليها مسبقاً. (فمثلاً، $a_i = i ; i=1,2,3,4$ و $b_j = j ; j=1,2,3$)، فكانت نتائج الملاحظة كما هي واردة في جدول الاقتران التالي:

جدول الاقتران

ξ_2	ξ_1				$\sum$
	c_1	c_2	c_3	c_4	
d_1	1768	807	189	47	$h_1 = 2811$
d_2	946	1387	746	53	$h_2 = 3132$
d_3	115	438	288	16	$h_3 = 857$
$\sum$	$h_{1.} = 2829$	$h_{2.} = 2632$	$h_{3.} = 1223$	$h_{4.} = 116$	$n = 6800$

اختبر، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.001$، فرضية استقلال المتغيرين ξ_2 ، ξ_1:

$$H_0 : F_{\xi}(x,y) = F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(y)$$

لنحسب القيمة المشاهدة t لإحصاء الاختبار $\hat{X}_n^2$ (4.2.12):

$$t = n\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{k}\frac{(h_{ij} - h_{i.}h_{.j}/n)^2}{h_{i.}h_{.j}} = 6800\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4}\frac{(h_{ij} - h_{i.}h_{.j}/n)^2}{h_{i.}h_{.j}}$$

$$= 6800\left[\frac{(1768 - ((2829)(2811)/6800))^2}{(2829)(2811)} + ... + \frac{(16 - ((116)(857)/6800))^2}{(116)(857)}\right]$$

$$= 1075.2$$

ومن جدول توزيع χ^2 بـ $(k-1)(s-1) = 3(2) = 6$ درجات حرية ومستوى معنوية $\alpha = 0.001$ نجد القيمة الحرجة $\chi^2_{0.001;6} = 22.5$. وبمقارنة القيمة الملاحظة t مع القيمة الجدولية $\chi^2_{0.001;6}$ نجد $t > \chi^2_{0.001;6}$ وبالتالي نرفض فرضية العدم H_0. وهذا يعني أن المتغيرين ξ_2 ، ξ_1 غير مستقلين، أي أن هنالك علاقة ما بين لون العينين ولون الشعر لأفراد المجتمع قيد الدراسة. واحتمال الخطأ من النوع I في هذه المسألة أصغر بكثير من 0.001.

مثـال 2.2.12

لدراسة إن كانت هنالك علاقة ما بين درجة الطالب في مقرر الاحتمالات (ξ_1)

ودرجته في الإحصاء الرياضي (ξ_2). أخذت عينة عشوائية من 354 طالب مـــن مجتمـــع الطلاب الذين اجتازوا هذين المقررين وسجلت نتائجهم (الدرجة من 100). وبعد تصنيف القيم المـــلاحظة لـــ ξ_1 حسب الفئات $\zeta_i^{(1)} = (20(i-1),20i]; i = 1,...,5$ ، وكذلـــك تصنيف القيم المـــلاحظة لـــ ξ_2 حسب الفئــــات $\zeta_j^{(2)} = (25(j-1),25j]; j = 1,...,4$ فكانت النتائج على النحو الآتي:

جدول الاقتران

$\zeta_i^{(1)}$	$\zeta_j^{(2)}$				$\sum$
	$\zeta_1^{(2)}$	$\zeta_2^{(2)}$	$\zeta_3^{(2)}$	$\zeta_4^{(2)}$	
$\zeta_1^{(1)}$	10	20	25	15	$h_{1.} = 70$
$\zeta_2^{(1)}$	8	12	30	30	$h_{2.} = 80$
$\zeta_3^{(1)}$	6	13	25	20	$h_{3.} = 64$
$\zeta_4^{(1)}$	7	11	40	25	$h_{4.} = 83$
$\zeta_5^{(1)}$	5	6	32	14	$h_{5.} = 57$
$\sum$	$h_{.1} = 36$	$h_{.2} = 62$	$h_{.3} = 152$	$h_{.4} = 104$	$n = 354$

في هذه المسألة المتغيران العشوائيان ξ_1, ξ_2 مستمران، وبالتالي يمكن بسهولة الانتقال إلى متغيرين منقطعين η_1, η_2 بأخذ $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ ، بحيث إن:

$$\eta_1 = \eta_1(\zeta_i^{(1)}) = i \quad ; \quad i = 1,2,3,4,5$$
$$\eta_2 = \eta_2(\zeta_j^{(2)}) = j \quad ; \quad j = 1,2,3,4$$

وبذلك يصبح المطلوب اختبار فرضية التجانس:

$$H_0 : F_\eta(x,y) = F_{\eta_1}(x) = F_{\eta_2}(y)$$

لنحسب القيمة الملاحظة t لإحصاء الاختبار $\hat{X}^2$ (4.2.12) فنجد:

$$t = 345\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{4}\left[\frac{(h_{ij})^2}{h_i h_j}-1\right] = \left[\left(\frac{100}{70(36)}+\frac{64}{80(36)}+\ldots+\frac{400}{70(62)}+\ldots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{625}{70(152)}+\ldots\frac{225}{70(104)}+\ldots+\frac{164}{57(104)}\right)-1\right]$$

$$= 75.1$$

بما أن درجات الحرية $(k-1)(s-1) = 4(3) = 12$، فمن جدول توزيع χ^2 بـ 12 درجة حرية واتخاذ مستوى المعنوية $\alpha = 0.005$ نجد $\chi^2_{0.005,12} = 28.3$. وبملاحظة أن $t > \chi^2_{0.005,12}$ نرفض فرضية الاستقلال H_0. وهذا يعني وجود علاقة ما بين درجتي الطالب في مقرري الاحتمالات والإحصاء الرياضي.

2.2.12 اختبار سبيرمان Spearman Test

في التطبيقات ومن أجل اختبار فرضية الاستقلال تستخدم كثيراً اختبارات الرتب الواردة في الفصل السابق [البند (4.4.11)]، وعلى الخصوص عندما تكون المعطيات رتبية، أي إذا كانت البيانات معطاة على هيئة أزواج من الرتب. وأهمها اختبار سبيرمان الذي يبنى على النحو الآتي:

لنرمز بـ R_i لرتبة X_i ضمن العناصر $X_1,\ldots,X_n$ (أي أن R_i رقم الموقع الذي تشغله X_i في المتسلسلة المتغيرة $(X_{(1)} \le X_{(2)} \le \ldots \le X_{(n)})$. وبشكل مشابه لنرمز بـ S_i لرتبة Y_i (موقع) ضمن العناصر $Y_1,\ldots,Y_n$. بذلك تولد العينة العشوائية $Z = ((X_1,Y_1),\ldots,(X_n,Y_n))$ فئة من أزواج الرتب $\{(R_1,S_1),\ldots,(R_n,S_n)\}$.

لنرتب هذه الثنائيات حسب قيم المركبة الأولى بدءاً من أصغر قيمة، ولنرمز لفئة الثنائيات التي نحصل عليها بـ $(1,T_1),(2,T_2),\ldots,(n,T_n)$، بافتراض أن $X_i \ne X_j\,;i \ne j$، أي أن $X_{(1)} < \ldots < X_{(n)}$ وكذلك $Y_i \ne Y_j\,;i \ne j$.

لنرَ الآن إحصاء الرتب (معامل ارتباط الرتب):

$$\rho = \sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})(S_i - \overline{S}) \Big/ \left[\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})\sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S})\right]^{1/2} \qquad (5.2.12)$$

الذي يمثل معامل ارتباط فئتي الرتب $(R_1,...,R_n)$ و $(S_1,...,S_n)$، حيث إن:

$$\overline{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i \quad , \quad \overline{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$$

لكن $(R_1,...,R_n)$ و $(S_1,...,S_n)$ ترتيبين ما لعناصر الفئة $\{1,...,n\}$، لذا:

$$\overline{R} = \overline{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n+1}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(R_i - \overline{R})^2 = \sum_{i=1}^{n}(S_i - \overline{S})^2 = \sum_{i=1}^{n} S_i^2 - n\overline{S}^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 - n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{n(n^2-1)}{12}$$

وعلى ذلك فإن:

$$\rho = \frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(R_i - \frac{n+1}{2}\right)\left(S_i - \frac{n+1}{2}\right) =$$

$$= \frac{12}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(i - \frac{n+1}{2}\right)\left(T_i - \frac{n+1}{2}\right) \qquad (6.2.12)$$

هكذا، فإن الإحصاء ρ دالة خطية في الرتب T_i. وغالباً في التطبيقات تستخدم الصيغة:

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i - S_i)^2$$

أو (7.2.12)

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}(i - T_i)^2$$

المتطابقة مع الصيغة (6.2.12)، إذا لم توجد قيم مكررة لـ R_i أو S_i نتيجة لتساوي قيمتين ملاحظتين أو أكثر لـ ξ_1 أو ξ_2، ويمكن التأكد من ذلك بسهولة.

يدعى المقدار ρ بإحصاء سبيرمان، من ثم يدعى الاختبار المبني على هذا الإحصاء باختبار سبيرمان **Spearman Test**.

عند التوافق التام للرتب $(R_i = S_i \,;\, i = 1,\dots,n)$ فإن $\rho = 1$، بينما في الوضع المتعاكس للرتب $\rho = -1$ $(T_i = n - i + 1 \,;\, i = 1,\dots,n)$، وبشكل عام القيمة المطلقة لـ ρ لا تزيد عن الواحد $(-1 \le \rho \le 1)$. وبما أن ρ مقياساً لدرجة الارتباط بين متغيرين ξ_1, ξ_2، فإننا نقول إن ξ_1, ξ_2 غير مرتبطين (مستقلين) إذا كانت $\rho = 0$ وكلما اقتربت ρ من الواحد كلما أوحى ذلك بوجود علاقة بين هذين المتغيرين (غير مستقلين). وهذا يعني أن قيم ρ القريبة من ± 1 ينظر إليها كدليل على عدم صحة فرضية الاستقلال H_0 وبالتالي منطقياً أن تكون منطقة الرفض الموافقة لاختبار سبيرمان من الشكل:

$$\mathfrak{I}_{1\alpha} = \{\rho : |\rho| \ge t_{\alpha/2}(n)\} \tag{8.2.12}$$

ويتعين الحد الحرج $t = t_{\alpha/2}(n)$ من العلاقة:

$$P\left(|\rho| \ge t_{\alpha/2}(n) \,\middle|\, H_0\right) = \alpha$$

وفي هذه الحالة تصاغ فرضية الاستقلال والفرضية البديلة لها على النحو الآتي:

$$H_0 : \rho = 0 \quad , \quad H_1 : \rho \ne 0$$

لتعيين الحد الحرج $t_{\alpha/2}(n)$ يلزمنا معرفة توزيع الإحصاء ρ، عند صحة الفرضية H_0.

لنحسب الآن متوسط وتباين إحصاء الاختبار ρ، عند صحة الفرضية H_0. إن $(T_1,\dots,T_n)$ ترتيب ما لعناصر الفئة $\{1,2,\dots,n\}$، وعدد مثل هذه التراتيب يساوي $n!$، وعند صحة الفرضية H_0، فإن هذه التراتيب متساوية الاحتمال وتساوي $\frac{1}{n!}$. وعلى ذلك:

$$E_0(T_i) = E\left(T_i \middle| H_0\right) = \sum_{j=1}^{n} j\,\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2}$$

$$E_0(T_i^2)=\sum_{j=1}^{n} j^2\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V_0(T_i\ )=V_0(T_i|H_0)=E_0T_i^2-(E_0T_i)^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}=\frac{n^2-1}{12}$$

$$E_0(iT_i)=E_0(i)E_0(T_i)=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

لأن $i\ ,T_i$ مستقلان. وعلى ذلك:

$$E_0\rho=1-\frac{6}{n(n^2-1)}E_0\left[\sum_{i=1}^{n}(i-T_i)^2\right]=1-\frac{6}{n(n^2-1)}E_0\left(2\sum_{i=1}^{n}i^2-2\sum_{i=1}^{n}iT_i\right)$$

$$=1-\frac{6}{n(n^2-1)}\left(2\sum_{i=1}^{n}i^2-2\sum_{i=1}^{n}E_0(iT_i)\right)=$$

$$=1-\frac{6}{n(n^2-1)}\left(2.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-2n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\right)$$

$$=1-\frac{6}{n(n^2-1)}\frac{n(n^2-1)}{6}=0$$

$$V_0\rho=\frac{6^2}{n^2(n^2-1)^2}V_0\left(2\sum_{i=1}^{n}i^2-2\sum_{i=1}^{n}iT_i\right)=\frac{144}{n^2(n^2-1)2}V_0\left(\sum_{i=1}^{n}iT_i\right)=$$

$$=\frac{144}{n^2(n^2-1)^2}\left(\sum_{i=1}^{n}V_0(iT_i)+\sum_{i\neq j}\text{cov}(iT_i\ ,jT_j)\right)\qquad(1)$$

لكن:

$$\sum_{i\neq j}\text{cov}(iT_i\ ,jT_j)=n(n-1)\text{cov}(iT_i\ ,jT_j)$$

$$=n(n-1)\left[E_0(iT_ijT_j)-E_0(iT_i)E_0(jT_j)\right]$$

$$=n(n-1)\left[E_0(ij)E_0(T_iT_j)-(E_0i)^2(E_0T_j)^2\right]\qquad(2)$$

وحيث إن:

$$E_0(ij)-E_0(T_iT_j)=\sum_{i\neq j} ij\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\sum_1^n i\right)^2-\sum_1^n i^2\right]=$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}\left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

لأن:

$$\left(\sum_{i=1}^n i\right)^2=\sum_{i=1}^n i^2-\sum_{i\neq j} ij$$

$$E_0(iT_j)=E_0(jT_i)=E_0(j)E_0(T_i)=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

وبالتعويض في العلاقة (1) وإجراء بعض الإصلاحات الجبرية نجد:

$$V_0\rho=\frac{1}{n-1}$$

إن توزيع إحصاء الاختبار ρ متماثل حول الصفر، ويمكن إثبات أنه إذا كانت فرضية العدم H_0 (فرضية الاستقلال) صحيحة فإن هذا التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين $1/n$ عندما $n\to\infty$، أي أن:

$$\mathcal{L}\left(\sqrt{n}\rho|H_0\right)\longrightarrow N(0,1)$$

عندما $n\to\infty$. وعلى ذلك عندما يكون حجم العينة كبيراً $(n>30)$ يمكن اعتبار التوزيع الطبيعي المعياري تقريباً جيداً لتوزيع $\sqrt{n}\rho$، عند صحة الفرضية H_0. وينتج من ذلك، أنه إذا اخترنا:

$$t_{\alpha/2}(n)=\frac{c_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \Phi(-c_{\alpha/2})=\frac{\alpha}{2}$$

عند صحة الفرضية H_0، فإن:

$$P\left(\rho\in\Im_{1\alpha}|H_0\right)=P\left(\sqrt{n}|\rho|\geq c_{\alpha/2}|H_0\right)\approx 2\Phi(-c_{\alpha/2})=\alpha$$

أي أن مستوى معنوية الاختبار تساوي تقريباً α.

أما إذا كان حجم العينة صغيراً $(n \leq 30)$، وعند صحة فرضية العدم H_0، فـهنالك جدول خاص (الملحق، جدول 7) يعطي القيم الحرجة $t_{\alpha/2}(n)$، عند مستويات الدلالـة $\alpha = 0.005; 0.01; 0.025; 0.05$ والموافقة لـ $n = 5,6,...,30$.

وكما أشرنا سابقاً، إذا كان لمفردتين أو أكثر نفس القيمة العددية تعطى لكل منـها رتبة تساوي المتوسط الحسابي للرتب التي كانت ستأخذها هذه المفردات لو أنها كـانت مختلفة.

مثـال 3.2.12

في دراسة لكمية القار والنيكوتين في أنواع السجائر، أخذت عينة عشـوائية مـن عشرة أنواع ووجدت المقادير الآتية بالمليغرام من القار والنيكوتين (بدقة 0.1):

النوع	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
كمية القار ξ_1	14	17	28	17	16	13	24	25	18	31
كمية النيكوتين ξ_2	09	1.1	1.6	1.3	1.0	0.8	1.5	1.4	1.2	2.0

اختبر الفرضية القائلة بعدم وجود ارتباط بين كمية القـار وكميـة النيكوتـين في السجائر، أي أن المتغيرين العشوائيين ξ_1, ξ_2 مستقلان، متخذاً $\alpha = 0.05$ وذلك بتطبيـق اختبار سبيرمان.

هنا فرضية العدم والفرضية البديلة:

$$H_0 : \rho = 0 \quad , \quad H_1 : \rho \neq 0$$

لاختبار هذه الفرضية باستخدام اختبار سبيرمان نتبع ما يلي:

نرتب القيم الملاحظة لـ ξ_1 تصاعدياً وكذلك قيم ξ_2 ومن ثم نستبدل كل قيمـة مشاهدة بترتيبها فنحصل على الجدول الآتي:

R_i	2	4.5	9	4.5	3	1	7	8	6	10
S_i	2	4	9	6	3	1	8	7	5	10
$(R_i - S_i)^2$	0	0.25	0	2.25	0	0	1	1	1	0

وبالتعويض في العلاقة (7.2.12) نجد أن:

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{10}(R_i - S_i)^2 = 1 - \frac{6}{10(99)}(5.5) = 1 - \frac{33}{990} = 0.9667$$

ومن جدول القيم الحرجة لمعامل ارتباط الرتب (الملحق، الجدول 7) نجد القيمة الحرجة الموافقة لـ $n = 10$ ومستوى معنوية $\alpha = 0.05$ تساوي $t_{\alpha/2}(n) = t_{0.025}(10) = 0.648$.

وحيث إن $\rho > 0.648$ نرفض فرضية العدم $H_0 : \rho = 0$، وهذا يعني أن هناك ارتباطاً بين كمية القار والنيكوتين في السجائر.

نورد فيما يلي مثالاً لبيانات على هيئة أزواج من الرتب (R_i, S_i).

مثـال 4.2.12

أخذت عينة من 15 طالباً، فكانت تراتيبهم في مادتي الفيزياء (R_i) والرياضيات (S_i) على النحو الآتي:

R_i	6	2	5	8	13	10	4	1	12	9	7	11	15	3	14
S_i	9	2	14	7	3	13	6	1	11	8	5	10	4	12	15

إذا رمزنا بـ ξ_1 و ξ_2 لدرجتي الطالب في الفيزياء والرياضيات على الترتيب، فاختبر فرضية العدم H_0 حول استقلال هذين المتغيرين، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

بما أن الرتب $R_i\,; i = 1,...,15$ مختلفة؛ فنرتب الثنائيات (R_i, S_i) حسب قيم R_i، فنحصل على الثنائيات $(1, T_1),...,(15, T_{15})$. ومن ثم نحسب مربع الفروقات $(i - T_i)^2$ كما هي واردة في الجدول الآتي:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
T_i	1	2	12	6	14	9	5	7	8	13	10	11	3	15	4
$(i-T_i)^2$	0	0	81	4	81	9	4	1	1	9	1	1	100	1	121

وبالتعويض في العلاقة الثانية في (7.2.12) نجد القيمة الملاحظة لإحصاء الرتب ρ:

$$\rho = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)}\sum_{i=1}^{n}(i-T_i)^2 = 1 - \frac{6}{3360}(414) = 1 - 0.74 = 0.26$$

ومن الملحق، جـدول 7، نجد القيمة الحرجة $t_{\alpha/2}(n)$ الموافقة لـ $\frac{\alpha}{2} = 0.025$ تساوي $t_{0.025}(15) = 0.525$. وبما أن $\rho > t_{0.025}(15)$ نرفض فرضية استقلال المتغيرين ξ_1, ξ_2، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

3.2.12 اختبار كيندل Kendall Test

هناك اختبار رتب آخر، قدم من قبل العالم كيندل، مبني على الإحصاء:

$$\tau = \frac{1}{C_2^n}\sum_{i<j}\text{sign}(T_j - T_i) \quad , \quad C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

حيث إن الدالة:

$$\text{sign}\,a = \begin{cases} 1 & ; \quad a > 0 \\ -1 & ; \quad a < 0 \end{cases}$$

وأن متوسط وتباين الإحصاء τ، عند صحة الفرضية H_0:

$$E_0\tau = E(\tau|H_0) = 0 \quad , \quad V_0\tau = V_0(\tau|H_0) = \frac{2(2n+5)}{9n(n-1)}$$

وأن التوزيع المتقارب للإحصاء τ، عند صحة الفرضية:

$$\mathcal{L}(\tau|H_0) \longrightarrow N(0, 4/9n)$$

عندما $n \to \infty$، وهذا يعني عندما تكون n كبيرة فإن منطقة الرفض تأخذ الشكل:

$$\tau_{1\alpha} = \left\{ |\tau| \geq \frac{2c_\alpha}{3\sqrt{n}} \right\} \quad ; \quad \Phi(-c_\alpha) = \frac{\alpha}{2}$$

إن الإحصاءين τ, ρ لهما صيغتان مختلفتان، لكن بينهما ارتباط قوي. إذا كانت الفرضية H_0 صحيحة، فإن:

$$\text{corr}(\rho, \tau) = k_n = \frac{2(n+1)}{\sqrt{2n(2n+5)}}$$

والدالة k_n متناقصة من 1، عندما $n = 2$، إلى القيمة الصغرى 0.98 عندما $n = 5$، وبعدئذٍ تتزايد إلى 1، عندما $n \to \infty$. أي أن اختباري سبيرمان وكندل متكافئان تقاربياً.

3.12 اختبارات العشوائية

إن المعطيات الأولية $X = (X_1, ..., X_n)$ في مسائل إحصائية مختلفة، ينظر إليها غالباً كعينة عشوائية من توزيع ما $\mathcal{L}(\xi)$، وهذا يعني اعتبار المركبات X_i (لمتجه المعطيات X) متغيرات عشوائية مستقلة ولها توزيع احتمالي واحد هو $\mathcal{L}(\xi)$. وهذا الافتراض -بشكل عام- محقق ويظهر من طبيعة المسألة ذاتها، لكن في حالات عدة نحتاج لاختبار صحتها، قبل بحث المسألة المطروحة. ويمكن صياغة المسألة رياضياً على النحو الآتي: اختبار الفرضية:

$$H_0 : F_X(x) = F(x_1)...F(x_n) \quad ; \quad x \in R^n$$

حيث إن $F(x)$ دالة توزيع المجتمع الذي سحبت منه العينة X و $x = (x_1, ..., x_n)$.

تدعى مثل هذه الفرضية بفرضية العشوائية Hypothesis of random. ويمكن بناء اختبار التوافق لمثل هذه الفرضية انطلاقاً من التصور الآتي (فيما يلي نفترض أن المتجه X

له توزيع مستمر):

إذا كانت فرضية العشوائية صحيحة، فإن مركبات المتجه X متكافئة، لذا لا يجب أن تكون المعطيات ذات ترتيب ما. وبعبارة أخرى، الحالة الموافقة للفرضية H_0 يمكن وصفها بـ "الفوضى التامة" أو "عدم الترتيب التام". وعند انحراف المعطيات عن الفرضية H_0 فنكون أمام ترتيب ما يظهر الارتباط. وبالتالي، يمكن بناء اختبار فرضية العدم على أساس إحصاءات تقيس درجة "عدم الترتيب" للمعطيات الأولية (معطيات العينة المشاهدة). ويعتبر عدد الاستبدالات أو المعكوسات Inverses في العينة إحدى هذه الإحصاءات، ويدعى الاختبار المؤسس على هذا الإحصاء باختبار المعكوسات Inverses Test أو الاستبدالات Transpositions، وهو نوع من اختبارات الرتب.

1.3.12 اختبار المعكوسات Inverses Test

يعين إحصاء المعكوسات، ونرمز له بـ $T_n(X)$، على النحو الآتي:

نقوم ببناء المتسلسلة المتغيرة $X_{(1)} \le .... \le X_{(n)}$ للعينة $X=(X_1,...,X_n)$. ويقال إن المركبتين X_i , X_j تشكلان معكوساً Inverse إذا كانت:

$$X_i > X_j \quad ; \quad i<j$$

أي الملاحظة ذات الرقم الأقل توافق قيمة أكبر، وهذا يعني أن X_i تقع على يمين X_j في المتسلسلة المتغيرة.

لنرمز بـ $\eta_i ; i=1,...,n-1$ لعدد المعكوسات التي تشكلها المركبة X_i (يقع في المتسلسلة المتغيرة η_i عنصر من العينة X على يسار X_i بأرقام أكبر من i). عندئذٍ:

$$T_n = T_n(X) = \eta_1 + \eta_2 + ... + \eta_{n-1} \qquad (1.3.12)$$

العدد العام للمعكوسات في العينة X. ويعتبر الإحصاء T_n مقياساً طبيعياً لـ "عدم الترتيب" بين الملاحظات، ويمكن استخدامه لاختبار فرضية العدم H_0. نلاحظ عندما

تكون المتسلسلة المتغيرة من الشكل $X_1 < X_2 < ... < X_n$ فإن $T_n = 0$، بينما إذا كانت المتسلسلة المتغيرة من الشكل $X_n < ... < X_2 < X_1$ فإن T_n تأخذ أكبر قيمة ممكنة لها وهي $T_n = (n-1) + (n-2) + ... + 2 + 1 = n(n-1)/2$. وهما حالتان حديتان توافقان ترتيب كامل "غياب تام لعدم الترتيب"، أي تتعارضان مع الفرضية H_0 (دليل على عدم صحة الفرضية H_0). هكذا، القيم الصغيرة جداً والقيم الكبيرة جداً لـ T_n ينظر إليها كدلائل على عدم صحة الفرضية H_0.

إذا كانت الفرضية H_0 صحيحة، فإن أي موقع في المتسلسلة المتغيرة يمكن أن يكون لأي عنصر من عناصر العينة X. أي لدينا $n!$ ترتيب ممكن لعناصر العينة X، ولكل ترتيب نفس الاحتمال وهو $1/n!$. إن المتغير العشوائي η_i يتعين بموضع المركبة X_i بالنسبة لـ $X_{i+1},...,X_n$ في المتسلسلة المتغيرة وغير مرتبط بتوزع المركبات الأخرى، أي أن $i = 1,...,n-2$؛ η_i مستقل عن $\eta_{i+1},...,\eta_{n-1}$. بذلك، فالمتغيرات $\eta_1,...,\eta_{n-1}$ مستقلة بالتبادل. بالإضافة إلى ذلك يأخذ المتغير العشوائي η_i القيم $0,1,...,n-i$ باحتمالات متساوية وتساوي $1/(n-i+1)$. وبالتالي الدالة المولدة لـ η_i تكون:

$$\varphi_i(z) = \sum_{r=0}^{n-i} z^r P(\eta_i = r) = \frac{1}{n-i+1}(1 + z + ... + z^{n-i})$$

حيث إن $e^{it} = z^t$. والدالة المولدة لـ T_n:

$$\Phi_n(z) = \sum_r z^r P(T_n = r) = \prod_{i=1}^{n-1} \varphi_i(z) = \frac{1}{n!} \prod_{r=1}^{n-1} (1 + z + ... + z^r)$$

وعلى ذلك نجد:

$$E_0\eta_i = E(\eta_i | H_0) = \varphi_i'(1) = \frac{1}{n-i+1}(1 + ... + (n-i))$$

$$= \frac{1}{n-i+1} \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} = \frac{n-i}{2}$$

$$V_0\eta_i = V(\eta_i | H_0) = \varphi_i''(1) + E_0\eta_i - (E\eta_i)^2 = \frac{(n-i)(n-i+2)}{12}$$

$$E_0T_n = E(T_n|H_0) = \sum_{i=1}^{n-1} E_0\eta_i = \frac{n(n-1)}{4}$$

$$V_0T_n = \sum_{i=1}^{n-1} V_0\eta_i = \frac{2n^2+3n^2-5n}{72}$$

هكذا، عند صحة الفرضية H_0، فإن القيمة المتوسطة للإحصاء T_n تنطبق على متصف الفترة $[0, n(n-1)/2]$، أي الوسيط، وبالتالي منطقة الرفض يجب أن تشتمل على كل القيم الصحيحة في هذه الفترة والبعيدة بكفاية عن منتصفها (القيم القريبة نسبياً من المنتصف $(n(n-1)/4)$ تشكل منطقة القبول)، وهذا يعني يجب أن تكون منطقة الرفض على الصورة:

$$\Im_{1\alpha} = \{t = T_n(x) : |t - n(n-1)/4| > t_{\alpha/2}(n)\} \quad (2.3.12)$$

حيث إن t القيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار T_n ويمكن أن تأخذ أية قيمة من القيم $0,1,...,n(n-1)/2$. ويتعين الحد الحرج $t_{\alpha/2}(n)$ الموافق لمستوى معنوية α من العلاقة:

$$P(T_n \in \Im_{1\alpha}|H_0) \le \alpha \quad (3.3.12)$$

أو من العلاقة المكافئة:

$$P(T_n \in \overline{\Im}_{1\alpha}|H_0) = P\left(\frac{n(n-1)}{4} - t_{\alpha/2}(n) \le T_n \le \frac{n(n-1)}{4} t_{\alpha/2}(n) \middle| H_0\right) \ge 1-\alpha \quad (4.3.12)$$

حيث إن $t_{\alpha/2}(n)$ أصغر عدد يحقق العلاقة (3.3.12) أو (4.3.12):

يمكن استخدام الدالة المولدة $\Phi_n(z)$ لإثبات أن الدالة المميزة للإحصاء:

$$T_n^* = (T_n - n(n-1)/4)\left(6/n^{3/2}\right)$$

تنتهي إلى الدالة $e^{-t^2/2}$، عندما $n \to \infty$ و t عدد منتهٍ. وهذه الأخيرة ما هي إلا الدالة المميزة للتوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$، أي أن:

$$\mathcal{L}(T_n^*|H_0) \longrightarrow N(0,1)$$

عندما $n \to \infty$. وبالتالي عندما تكون n كبيرة نسبياً (تطبيقياً $n > 10$) يمكن استخدام التوزيع الطبيعي $N(0,1)$ كتقريب جيد لتوزيع الإحصاء T_n^*، عند صحة الفرضية H_0.

وعلى ذلك تبنى قاعدة اختبار H_0، عندما $n > 10$، على النحو الآتي: نعين، من أجل مستوى معنوية معطى $0 < \alpha < 1$، الحد الحرج $t_{\alpha/2}$ من العلاقة $\Phi(-t_{\alpha/2}) = \alpha/2$، ونحسب القيمة الملاحظة $t = T_n(x)$ للإحصاء T_n (عدد المعكوسات في العينة) بناءً على معطيات العينة المشاهدة $x = (x_1, ..., x_n)$، ومن ثم نحسب القيمة الملاحظة $t^*(x)$:

إذا كانت $|t^* = T_n^*(x)| > t_{\alpha/2}$ نرفض الفرضية H_0.

إذا كانت $|t^*| \le t_{\alpha/2}$ نقبل الفرضية H_0.

أي أن فرضية الاستقلال والتوزيع الواحد للملاحظات تتفق مع المعطيات المشاهدة، حيث إن:

$$t^* = T^*(x) = \left(t - \frac{n(n-1)}{4}\right)\left(\frac{6}{n^{3/2}}\right)$$

إن احتمال الخطأ من النوع I (احتمال رفض الفرضية H_0 وهي صحيحة) يساوي:

$$P\left(\left|T_n - \frac{n(n-1)}{4}\right| \frac{6}{n^{3/2}} \ge t_{\alpha/2} \Big| H_0\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 2\Phi(-t_{\alpha/2}) = \alpha$$

نلاحظ مما سبق أن فرضية العشوائية عبارة عن تحقق فرضيتين في آن واحد وهما: فرضية الاستقلال للمركبات $X_i \,; i = 1, ..., n$ (عناصر X) وفرضية التوزيع الواحد لها $F(x_1) = ... = F(x_n) \;;\; F_i(x) = F_{X_i}(x) \,; i = 1, ..., n$.

نلاحظ أن اختبار المعكوسات يعتمد على الترتيب الذي سحبت به عناصر العينة، ويهدف هذا الاختبار إلى الكشف عما إذا كان هذا الترتيب عشوائياً أم يتخذ نمطاً معيناً لا يمكن أن نعزوه للصدفة.

مثـــال 1.3.12

ضبطت آلة لكي تصب مقداراً معيناً من سائل في كل وعاء يمر تحتـــها. أخـــذ 15 وعـــاءً متتالياً مر تحت الآلة، فكانت كميات السائل فيها مقدرة باللترات (بدقـــة 0.1) كالآتي:

القيم الملاحظة	4.0	3.9	4.1	3.6	3.8	3.7	3.4	3.6
رمز الملاحظة	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
القيم الملاحظة	3.8	4.1	3.9	4.0	3.8	4.2	4.1	
رمز الملاحظة	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	

هل يمكن اعتبار هذه العينة عشوائية، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟ أي هـــل المقادير التي توزعها الآلة تتغير عشوائياً أم خاضعة لنمط معين Pattern؟

نقوم بترتيب القيم الملاحظة تصاعدياً مع وضع رمز الملاحظة الموافق، كما هو مبـــين في الجدول الآتي:

القيم الملاحظة	3.4	3.6	3.6	3.7	3.8	3.8	3.8	3.9
رمز الملاحظة	x_7	x_8	x_4	x_6	x_5	x_9	x_{13}	x_2
القيم الملاحظة	3.9	4	4	4.1	4.1	4.1	4.2	
رمز الملاحظة	x_{11}	x_1	x_{12}	x_3	x_{10}	x_{15}	x_{14}	

نعين الآن القيم الملاحظة للمتغيرات $\eta_i \,;\, i = 1,\ldots,14$:

$$\eta_1 = 9 \;,\; \eta_2 = 7 \;,\; \eta_3 = 9 \;,\; \eta_4 = 2 \;,\; \eta_5 = 3 \;,\; \eta_6 = 2 \;,\; \eta_7 = 0$$
$$\eta_8 = 0 \;,\; \eta_9 = 0 \;,\; \eta_{10} = 3 \;,\; \eta_{11} = 1 \;,\; \eta_{12} = 1 \;,\; \eta_{13} = 0 \;,\; \eta_{14} = 1$$

وعلى ذلك:

$$t = T_n(x) = \sum_{i=1}^{m} \eta_i = 38$$

$$t^* = \left(38 - \frac{15(14)}{4}\right)\frac{6}{15^{3/2}} = -14.5(0.103) \approx -1.5$$

بما أن $n > 10$ يمكن استخدام التوزيع الطبيعي $N(0,1)$ كتقريب جيد لتوزيع $T_n^*(X)$. لذا $t_{\alpha/2} = t_{0.025} = 1.96$، وهذا يعني أن $|t^*| = 1.5 < t_{0.025} = 1.96$، وبالتالي نقبل فرضية العشوائية H_0، أي أن المقادير ع التي توزعها الآلة تتغير عشوائياً. نلاحظ هنا أن الاختبار ذو اتجاهين.

2.3.12 اختبار التلاحقات Runs Test

يقتصر، كما أشرنا في الفقرة السابقة، اختبار المعكوسات على اختبار عشوائية العينة المأخوذة من مجتمع مستمر $\mathcal{L}(\xi)$. هنالك اختبار آخر أعم يعتمد بدوره على الترتيب الذي سحبت به عناصر العينة $X = (X_1,...,X_n)$ ويهدف لكشف عما إذا كان هذا الترتيب عشوائياً أم يتخذ نمطاً Pattern معيناً لا يمكن تفسيره كنتيجة لعوامل الصدفة. ويبنى هذا الاختبار على مفهوم التلاحقات Runs [أنظر الفقرة (3.4.11)]، وبعبارة أخرى على إحصاء التلاحقات الذي يشكل على النحو الآتي:

تقسم بيانات العينة المشاهدة (نوعية أم كمية) إلى صنفين متنافيين: ذكور أو إناث، وحدة معينة أو سليمة، ناجح أو راسب، مريض أو غير مريض، أكبر من الوسيط أو أقل من الوسيط . . . وهكذا. وإذا رمزنا بـ c للصنف الأول و $\bar{c}$ للصنف الثاني، فنحصل على متتابعة من الرمزين $c, \bar{c}$. وهذا يعني كل عينة مشاهدة توصف بمتتابعة من الحرفين $c, \bar{c}$. وتشتمل كل متتابعة على عدد من التلاحقات نرمز له بـ $W(n_1, n_2)$، حيث إن $n_1 =$ عدد مرات ظهور الحرف c في المتتابعة ومن ثم $n_2 = n - n_1$ عدد مرات ظهور الحرف $\bar{c}$ فيها. بذلك نحصل على إحصاء التلاحقات $W(n_1, n_2)$. والاختبار المؤسس على هذا الإحصاء للكشف عن عشوائية عينة يدعى باختبار التلاحقات لاختبار عشوائية عينة Runs test، ومؤسس على التصور الآتي:

إذا كانت المتابعة من الحرفين $c, \bar{c}$، الموافقة للعينة تشتمل على عدد قليــــل مــن التلاحقات ($W(n_1, n_2)$ صغيرة)، فإننا نشك في وجود تجمعات معينة أو نمط معــين في العينة، إذ تشير هذه الحالة إلى أن عملية اختيار العينة لم تكن عشوائية. فمثلاً، إذا كــانت لدينا عينة مؤلفة من 14 شخصاً وكان الحرف c يرمز إلى الشخص "ذكر" والحرف $\bar{c}$ إلى الشخص "أنثى"، وكــانت لدينا المتــابعة حسب رقم الملاحظة $cccccccc\bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}$، فيكون لدينا $W(8,6) = 2$. وكذلك إذا كان هناك عدد كبير من التلاحقات في المتابعــة من الحرفين $c, \bar{c}$ ($W(n_1, n_2)$ كبيرة)، فإننا نشك في وجود نوع من النمط الذي يتكرر دورياً (أو شبه دوري)، وتشير هذه الحالة أيضاً إلى أن سحب العينة لم يكن عشوائياً بــل متحيزاً. فمثلاً، إذا كانت لدينا المتابعة $c\bar{c}c\bar{c}c\bar{c}c\bar{c}c\bar{c}c\bar{c}c\bar{c}$ فإن $W(7,7) = 14$. وعندئــذٍ نشك في وجود نمط معين يتكرر دورياً وتشير إلى أن سحب العينة لم يكن عشوائياً.

هكذا، القيم الصغيرة أو الكبيرة للإحصاء $W(n_1 n_2)$ تفسر كدليل على عدم صحــة فرضية عشوائية العينة (فرضية العدم H_0). وبالتالي منطقياً اختيار منطقة الرفض لاختبــار التلاحقات على النحو الآتي:

$$\Im_{1\alpha} = \{t : t \le c_1 \text{ or } t \ge c_2\} \tag{5.3.12}$$

ويتعين الحدين الحرجين من العلاقتين:

$$P\big(W(n_1, n_2) \le c_1 | H_0\big) = \frac{\alpha}{2} \quad , \quad P\big(W(n_1, n_2) \ge c_2 | H_0\big) = \frac{\alpha}{2}$$

حيث إن فرضية العــدم H_0 "العينة عشوائية" والفرضية البديلة ذات جانبين "العينة غــير عشوائية".

لتعيين الحدين الحرجين c_1, c_2 في العــلاقة (5.3.12) يلزمنا معرفة توزيع إحصــاء الاختبار $W(n_1, n_2)$، عند صحة الفرضية H_0، وهذا ما تعطيه المبرهنة (2.4.11) وذلك بوضع $m = n_1$ و $n = n_2$ في تلك المبرهنة فنجد:

$$\mathcal{L}\left(W(n_1,n_2)|H_0\right)\xrightarrow[n_1,n_2\to\infty]{} N\left(\frac{2n_2\rho}{1+\rho},\frac{4n_2\rho^2}{(1+\rho)^2}\right)$$

حيث إن t القيمة الملاحظة لإحصاء الاختبار $W(n_1,n_2)$. هكـذا، إذا كـانت $n_1,n_2\geq 10$ يمكن اعتبار:

$$\mathcal{L}\left(W(n_1,n_2)|H_0\right)\approx N\left(\frac{2n_2\rho}{1+\rho},\frac{4n_2\rho^2}{(1+\rho)^2}\right)\quad;\quad \frac{n_2}{n_1}=\rho \qquad (6.3.12)$$

واحتمال الخطأ من النوع I يساوي تقريباً α. وعندئذٍ يتعـين الحـدان الحرجـان $c_1\,,c_2$ من العلاقتين:

$$c_i=\frac{2n_2\rho}{1+\rho}+(-1)^i\sqrt{n_2}\,\frac{2\rho}{(1+\rho)^{3/2}}t_{\alpha/2}\quad;\quad \Phi(-t_{\alpha/2})=\frac{\alpha}{2}\quad;\quad i=1,2 \qquad (7.3.12)$$

هكذا، عند تحقق شروط المبرهنة (2.4.11) فيمكن صياغـة خوارزميـة اختبـار التلاحقات للعشوائية على النحو الآتي:

1. نصنف العينة المشاهدة إلى صنفين.
2. نرمز لعنصر أحد الصنفين بـ c وللصنف الآخر بـ $\bar{c}$ فنحصل على المتتابعة مـن الحرفين $c\,,\bar{c}$ (حسب رقم الملاحظة).
3. نحسب عدد التلاحقات في المتتابعة (2)، أي القيمة الملاحظة t لإحصاء الاختبـار $W(n_1,n_2)$.
4. إذا كـانت $n_1,n_2\geq 10$، فمـن جـدول التوزيـع الطبيعـي نجـد $t_{\alpha/2}\,;\,\Phi(-t_{\alpha/2})=\alpha/2$، ومن ثم، حسب العلاقتـين (7.3.12)، نحصـل علـى الحدين الحرجين $c_1\,,c_2$.
5. نقارن القيمة الملاحظة t بالحدين الحرجين $c_1\,,c_2$. إذا كانت $c_1<t<c_2$ نقبـل فرضية العشوائية H_0 وبخلاف ذلك نرفضها.

نلاحظ أن اختبار التلاحقات لاختبار عشوائية العينة يتمتع بميزة هامة وهي عموميته

في التطبيق، بمعنى يمكن استخدامه في اختبار عشوائية العينة سواء كانت العينة مأخوذة من مجتمع مستمر أم متقطع وكذلك إذا كانت البيانات كمية أم نوعية.

مثـــال 2.3.12

لدراسة إصابة نوع من الأشجار المزروعة بمرض معين أخذت عينة من ذات النـــوع مؤلفة من 30 شجرة فوجدت المتتابعة الآتية:

$$ccccccccc\ \bar{c}\bar{c}\bar{c}\ ccccc\ \bar{c}\bar{c}\ cc\ \bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}\ cccc$$

حيث إن c ترمز للشجرة "مصابة" و $\bar{c}$ للشجرة "غير مصابة". وبناءً علـــى هـــذه المتتابعة لدينا شك في عشوائية العينة المأخوذة من الأشجار $(n = 30)$، لذا قبل البـــدء في دراسة إصابة تلك النوع من الأشجار لابد من اختبار عشوائية العينة. اختبر ذلك عنـــد مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

لدينا $n_1 = 20$ (عدد الأشجار المصابة بالمرض المعين) و $n_2 = 10$ (عدد الأشـــجار غير المصابة بذلك المرض) و $t = W(20,10) = 7$ عدد التلاحقات في المتتابعة.

بما أن $n_1, n_2 \geq 10$ فيمكننا تعيين الحدين الحرجين c_1, c_2 لاختبار التلاحقات مـــن العلاقتين (7.3.12) فنجد:

$$c_1 = \frac{2 \times 10 \times 2}{1+2} - \sqrt{10}\,\frac{2 \times 2}{3^{3/2}}(2.58) = 7.05$$

$$c_2 = \frac{2 \times 10 \times 2}{1+2} + \sqrt{10}\,\frac{2 \times 2}{3^{3/2}}(2.58) = 19.61$$

بما أن $t < c_1$ نرفض فرضية العـــدم H_0، عند مستوى الدلالـــة $\alpha = 0.01$. أي أن العينة المسحوبة من الأشجار غير عشوائية وإنما تقع في تجمعات غير عشوائية.

مثـــال 3.3.12

أخذت عينة بحجم $n = 40$ من توزيع مستمر غير معلوم $\mathcal{L}(\xi)$ فكانت حسب رقم

المشاهدة كما يلي (من اليسار إلى اليمين):

27	26	35	30	18	21	28	33	27	27	24	19	24	26
28	28	31	19	23	32	29	24	24	13	23	21	17	28
23	22	23	22	14	17	10	21	21	18	20	28		

هل هذه العينة عشوائية عند مستوى دلالة $\alpha = 0.05$؟

الوسيط في هذه العينة $\tilde{x} = (23+24)/2 = 23.5$. وبوضع الرمز c بدلاً عن أي قيمة مشاهدة تزيد عن $\tilde{x} = 23.5$ والرمز $\bar{c}$ بدلاً عن أي عدد يقل عن 23.5 نحصل على المتابعة الآتية:

$$cccc\ \bar{c}\bar{c}\ ccccc\ \bar{c}\ ccccc\ \bar{c}\bar{c}\ cccc\ \bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}\ c\ \bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{c}\ c$$

فرضية العدم H_0: العينة عشوائية (لا يوجد أي نمط للتجمع).

الفرضية البديلة H_1: العينة غير عشوائية (يوجد نمط تجمع).

لدينا $n_1 = n_2 = 20$، $\rho = \frac{n_2}{n_1} = 1$ و $t = W(20,20) = 11$ (عدد التلاحقات في العينة المشاهدة). وبما أن $n_1, n_2 > 10$ فيمكن تعيين الحدين الحرجين c_1, c_2 بتطبيق العلاقتين (7.3.12):

$$c_1 = \frac{2\times 20\times 1}{2} - \sqrt{20}\,\frac{2\times 1}{3^{3/2}}(1.96) = 20 - 6.22 = 13.18$$

$$c_2 = \frac{2\times 20\times 1}{2} + \sqrt{20}\,\frac{2\times 1}{3^{3/2}}(1.96) = 20 + 6.22 = 26.22$$

وحيث إن $t = 11 < c_1 = 13.18$ نرفض فرضية العدم H_0، عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.01$، وهذا يعني أن العينة المسحوبة ليست عشوائية بل هناك نمط تجمع (تحيز ما في سحب العينة). وتبدو هذه النتيجة متفقة مع المتابعة، حيث نلاحظ أن القيم الأكبر من الوسيط ($\tilde{x} = 23.5$) تميل للتجمع في الطرف الأيسر بينما القيم الأصغر من الوسيط تميل للتجمع في الطرف الأيمن من المتابعة، أي أن هناك نمط تجمع.

إذا كان أحد العددين n_1 , n_2 أو كلاهما أصغر من عشرة، فلا يجـــود اســـتخدام التوزيع الطبيعي $N\left(\frac{2n_2\rho}{1+\rho}, \frac{4n_2\rho^2}{(1+\rho)^2}\right)$ كتقريب جيد لإحصاء الرتب $W(n_1,n_2)$ عنـــد صحة الفرضية H_0. وفي هذه الحالة تستخدم جداول خاصة كالجدول 8 بملحـــق هـــذا الكتـــاب، الذي يعطي احتمال أن تقل عدد التـــلاحقات $W(n_1,n_2)$ عن عدد معـــين t^* على أساس صحة فرضية العدم H_0 عن عشوائية العينة عند زوج مرتب من الأعـــداد (n_1,n_2)، أي يعطي الاحتمال:

$$P\left(W(n_1,n_2) \le t^* \middle| H_0\right)$$

عند (n_1,n_2) بحيث أن $n_1 \le n_2$.

وقد أعد هذا الجدول بحيث يكون الإحداثي الأول n_1 في الزوج المرتـــب (n_1,n_2) أصغر من الإحداثي الثاني n_2، أي أننا نرمز بـــ n_1 لعدد مرات ظهور الحـــرف الـــذي يتكرر أقل سواء كان هذا الحرف c أو $\bar{c}$. وفي حالة تساوي $n_1 = n_2$ فنأخذ n_1 لتشـــير إلى عدد مرات ظهور الحرف c (أو $\bar{c}$).

وفي هذه الحالة نعين عدد التلاحقات t في العينة، ومن الجدول 8 نجد:

$$P\left(W \ge t \middle| H_0\right) = 1 - P\left(W \le (t-1) \middle| H_0\right) \quad \text{و} \quad P\left(W \le t \middle| H_0\right)$$

إذا تبين أن:

$$P\left(W \le t \middle| H_0\right) \le \frac{\alpha}{2} \quad \text{or} \quad P\left(W \ge t \middle| H_0\right) \le \frac{\alpha}{2}$$

فهذا يعني أن:

$$t \le c_1 \quad \text{or} \quad t \ge c_2$$

أي أن القيمة الملاحظة t لعدد التلاحقات تنتمي لمنطقة الرفض $\mathfrak{I}_{1\alpha}$ (5.3.12)، وبالتـــالي نرفض فرضية العدم H_0 حول عشوائية العينة، عند مستوى الدلالة المتخذ α، وخـــلاف

ذلك نقبل فرضية العدم H_0.

مثـــال 4.3.12

لتكن لدينا معطيات المثال السابق (1.3.12) ونريد اختبار فرضية العدم H_0 حـول عشوائية العينة باستخدام اختبار التلاحقات.

لدينا الوسيط $\tilde{x} = 3.9$. وبوضع c بدلاً من كل عدد يزيد عن الوسيط $\tilde{x} = 3.9$ و $\bar{c}$ بدلاً من كل عدد يقل عن 3.9 وإهمال العددين المساويين للوسيط نحصل على المتابعة التالية:

$$cc\ \overline{cccccc}\ cc\ \bar{c}\ cc$$

نلاحظ عدد التلاحقات في هذه المتابعة هو $t = 5$ و $n_1 = 6, n_2 = 7$. وبما أن $n_1 < n_2$ وكل منهما أصـــغر من 10، فمن الملحق، جدول 8، نجـــد عندمـــا $(n_1, n_2) = (6,7)$ و $t = 8$ أن:

$$P\left(W(6,7) \le 5 \middle| H_0\right) = 0.121 > \frac{\alpha}{2} = 0.025$$
$$P\left(W(6,7) \ge 5 \middle| H_0\right) = 1 - P\left(W(6,7) \le 4 \middle| H_0\right) = 1 - 0.043 = 0.957$$

وهذا يعني أن $t = 5$ لا تقع في منطقة الرفض (5.3.12)، ومن ثم نقبل فرضيـــة العـــدم H_0 حول عشوائية العينة، أي حدود المتابعة تتغير عشوائياً. وبالتالي، فالمقـــادير الـــتي توزعها الآلة تتغير عشوائياً، وهي نفس النتيجة التي توصلنـــا إليـــها بتطبيـــق اختبـــار المعكوسات في المثال (1.3.12).

مثـــال 5.3.12

تعبر المتابعة الآتية عن عدد الوحدات المعيبة c والوحدات غير المعيبة $\bar{c}$ التي صنعتـها آلة ما بالترتيب:

$$cc\ \overline{ccc}\ cccc\ \bar{c}\ c\ \overline{ccccc}$$

اختبر، عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.10$، ما إذا كان بالإمكان اعتبار هذه المعطيات على أنها عينة عشوائية.

نلاحظ عدد التلاحقات $t = 6$ و $n_1 = 7, n_2 = 9$. وبما أن كلاً من n_1, n_2 أصغر من عشرة، فمن الجدول 8 (الملحق) نجد:

$$P(W(7,9) \leq 6) = 0.108 > \frac{\alpha}{2} = 0.05$$

$$P(W(7,9) \geq 6) = 1 - P(W(7,9) \leq 5) = 1 - 0.035 = 0.965 > \frac{\alpha}{2} = 0.05$$

وهذا يعني أن القيمة الملاحظة لا تقع في منطقة الرفض المعرفة بالعلاقة (5.3.12)، وبالتالي نقبل فرضية العدم H_0، أي اعتبار العينة المأخوذة من إنتاج الآلة عشوائية، عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.10$.

تمارين

1. إذا كانت لدينا المعطيات كما هي واردة في الجدول الآتي:

ξ_1	ξ_2			$\sum$
	b_1	b_2	b_3	
a_1	3009	2832	3008	8849
a_2	3047	3051	2997	9095
a_3	2974	3038	3018	9030
$\sum$	9030	8921	9023	26974

اختبر فرضية استقلال المتغيرين ξ_1, ξ_2، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

2. لدراسة إن كانت هناك علاقة بين طول جسم طفل (ξ_1) حديث الولادة وطول

محيط رأسه (ξ_2)، أخذت عينة عشوائية من 32 طفل حديثي الولادة، وقيست ξ_1,ξ_2 عند كل منهم فكانت مقدرة إلى أقرب سنتيمتر على النحو الآتي (حسب رقم الملاحظة):

ξ_1	52	48	50	51	47	51	52	52	53	48	50
ξ_2	36	34	34	34	35	35	36	36	37	34	34
ξ_1	52	47	46	45	44	52	50	50	49	48	48
ξ_2	37	32	31	32	34	36	35	34	34	34	33
ξ_1	48	50	50	48	51	54	49	48	54	52	
ξ_2	35	35	33	34	36	38	37	35	38	36	

هل المتغيران ξ_1,ξ_2 مستقلان؟ اختبر صحة ذلك عند مستوى دلالة $\alpha = 0.01$.

3. طلب من اثنين من المحكمين ترتيب 10 أشخاص متقدمين لشغل وظيفة ما، فكانت النتائج كما يلي:

المحكم الأول	9	4	6	5	3	1	10	8	2	7
المحكم الثاني	8	4	9	6	1	2	7	10	3	5

هل قرار الحكمين مستقل؟ اختبر صحة ذلك عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

4. لدراسة ما إذا كانت هناك علاقة بين عدد الساعات التي استذكر فيها الطالب لامتحان ما والدرجة المتحصل عليها في هذا الامتحان، أخذت عينة عشوائية مؤلفة من 10 طلاب ممن تقدموا لذلك الامتحان، وسجلت نتائج الملاحظة، فكانت كما هي واردة في الجدول الآتي:

عدد ساعات الدراسة ξ_1	7	5	12	13	9	5	18	15	3	8
درجة الامتحان ξ_2	56	45	79	72	69	57	92	85	33	65

اختبر فرضية الاستقلال:

$$H_0 : F_\xi(x,y) = F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(y)$$

عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$.

5. أخذت عية بحجم 42 من إنتاج مصنع ما، فكانت المتابعة الآتية تعبر عن الوحدات المعيبة (c) والوحدات غير المعيبة $(\bar{c})$:

$$cccc\ \bar{c}\ cccccc\ \bar{c}\bar{c}\ ccccccc\ \bar{c}\ ccccccccc\ \bar{c}\ cccccccccc\ \bar{c}$$

اختبر عند مستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ ما إذا كانت تلك العينة عشوائية.

6. لدراسة ظاهرة غياب الطلاب في مدرسة معينة، سجل غياب الطلاب خلال 24 يوماً متتالياً، فكانت النتائج على النحو الآتي:

34	33	29	33	31	35	28	30	29	30	25	29	27
32	28	27	38	31	30	36	26	33	35	28	28	35

اختبر عشوائية هذه العينة، عند مستوى دلالة $\alpha = 0.05$.

7. لدراسة ما إذا كانت هناك علاقة بين وزن الزوج ووزن الزوجة، أخذت عينة من 13 زوجاً، وقيست أوزانهم مقدرة إلى أقرب كيلوجرام، فكانت على النحو الآتي:

وزن الزوج ξ_1	66	62	78	71	63	72	65	69	70	80	90	86	76
وزن الزوجة ξ_2	64	63	72	75	45	73	66	69	70	72	80	52	71

اختبر، عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$، الفرض القائل أن أوزان الأزواج مستقلة عن أوزان الزوجات، أي اختبار الفرضية:

$$H_0 : F_\xi(x,y) = F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(y)$$

الفصل الثالث عشر:

مبادئ نظرية القرار

يعتبر هذا الفصل عرضاً مختصراً لأحد الاتجاهات الهامة في الأبحاث الإحصائية المعاصرة، وهو نظرية دوال القرارات الإحصائية أو اختصاراً نظرية القرار Decision Theory. حيث يشتمل العرض على بعض المفاهيم الأساسية Basic concepts والنتائج لهذه النظرية وذلك في إطار مدخلين منطقيين لاتخاذ القرارات: مبدأ بيز Bayes principle، ومبدأ أصغر (أقل) الكبريات Minimax principle.

1.13 مفاهيم أساسية Basic Concepts

1.1.13 دالة القرار أو قاعدة القرار

Decision Function or Decision Rule

إن الهدف النهائي، في حالات عدة، للتحليل الإحصائي يمكن التعبير عنه بصيغة قرار Decision بشأن هذا أو ذاك السلوك أو الفعل، فمثلاً، عند مراقبة إنتاج بطريقة المعاينة يتطلب الأمر اتخاذ أحد حلين أو إجراءين Action:

d_1 قبول شحنة المنتج.

d_2 رفض شحنة المنتج.

والطبيب بناءً على تشخيص المريض يجب أن ينتهي إلى واحدة من عدد منتهٍ من

الحالات المعيارية، أي يختار واحدة من عدد منتهٍ من الحلول الممكنة. وفي مسائل أخـــرى قد يكون اختيار الإجراء من فئة غير منتهية من الإجراءات الممكنة. في كل هذه الحـــالات يتخذ الحل على أساس تحليل الملاحظة x المأخوذة على المتغير العشوائي الموافق X، وبالتالي ذلك الحل يمثل بدالة $\delta(x)$ معرفة على فضـــاء العينــــة $\Omega_X = \{x\}$ وتـــأخذ قيمـــها في $D = \{d\}$ ، حيث إن D فئة الحلول (الإجراءات) الممكنة في الحالة المفروضة، وتدعـــى D بفضاء الإجراءات Space actions. هكذا، $\delta(x)$ عبارة عن قاعدة تُخصص إجراء مـــن الإجراءات $d = \delta(x)$ الممكنة لكل ملاحظة $x \in \Omega_X$. تدعى الدالة $\delta(X)$ بقاعدة القرار Decision rule أو بدالة القرار، أي أن $\delta(X)$ دالة معرفة على Ω_X وتأخذ قيمها في D. ويجب أن يكون اختيار $\delta(X)$ مناسباً للمسألة قيد الدراسة وذلك وفق متطلبات الأمثليـــة. فمثلاً، إذا كانت X نسبة المعطب في شحنة الإنتاج فقاعدة القرار $\delta(X)$ يمكن أن تكون:

$d_1 = \delta(x)$ قبول الشحنة إذا كانت $x \le 0.01$

$d_2 = \delta(x)$ رفض الشحنة إذا كانت $x > 0.01$.

والسؤال الذي يطرح الآن: ما هو عدد دوال القرار في مسألة ما؟.

والجواب بشكل عام هناك عدد من دوال القرار المختلفة في كل مسألة اتخاذ قـــرار. فمثلاً، إذا كان لدينا في مسألة معينة k إجـــراء أو حل مختلف، أي أن $D = \{d_1,...,d_k\}$ و $\Omega_X = \{x_1,...,x_r\}$، فيكون k^r دالة قرار مختلفة، لأن لدينا k إجراءً ممكناً لكل قيمـــة من القيم $x_1,...,x_r$، أي أننا أمـــام تجربة ذات r من المراحل، وكل مرحلة تنجز بـــــ k طريقة مختلفة، وبالتالي حسب قاعدة الجداء:

$$k.k...k = k^r$$

وهذا يعني أنه يمكن إنجاز التجربة بـــ k^r طريقة مختلفة. وبازدياد k أو r أو كليهما معاً يزداد عدد دوال القرار الممكنة في المسألة المدروسة. ومهمة الإحصائي هي اختيـــار دالة القرار $\delta(X)$ المناسبة (تعطي الإجراء الأفضل) من مجموعة دوال القـــرار الخاصـــة بالمسألة المفروضة.

2.1.13 دالة المخاطرة Risk Function

ليكن صف التوزيعات $F=\{F(x;\theta),\theta\in\Theta\}$ الذي ينتمي إليه توزيع المتغير العشوائي الملاحظ X معطى و $D=\{d\}$ مجموعة الحلول الممكنة التي يمكن اتخاذها بناءً على ملاحظة على X. للحصول على قاعدة لاختيار دالة قرار لابد من مقارنة نتائج استخدام دوال القرار المختلفة δ في المسألة المدروسة، حيث إن اختيار إجراء (حل) من مجموعة من الإجراءات (الحلول) مرتبط منطقياً بنتائج أو عواقب هذا الإجراء. وهذه تعتبر من أهم الصعوبات العملية في تطبيق نظرية القرار، وبالتالي يجب تقييم نتائج اختيار القرارات على مقياس كمي ولو بالتقريب حتى يكون هناك أساس منطقي معقول لنظرية القرارات.

لذا سنعرف دالة جديدة غير سالبة $L(\theta,d)$ معرفة على $\theta\times D$، حيث من أجل كل توليفة $(\theta,d);\theta\in\Theta,d\in D$ فالعدد $L(\theta,d)\geq 0$ يفسر الخسارة عند اتخاذ القرار (الإجراء) d بفرض أن توزيع المتغير X هو $F(x;\theta)$، أي أن القيمة الحقيقية للمعلمة هي θ. تدعى الدالة $L(\theta,d)$ بدالة الخسارة Loss function، وهي لا تعتمد على θ فقط بل أيضاً على قيم X المتغيرة، لذا فإن الخسارة تكون متغيرة. وبالتالي سنبني تحليلنا على القيمة المتوقعة لدالة الخسارة $L(\theta,\delta(X))$ بالنسبة لتوزيع X، وللإشارة لذلك سنرمز للتوقع بـ E_X:

$$R(\theta,\delta)=E_X L(\theta,\delta(X))=\begin{cases}\int L(\theta,\delta(x))f(x;\theta)dx\\ \sum_x L(\theta,\delta(x))f(x;\theta)dx\end{cases}\qquad(1.1.13)$$

وتدعى الدالة $R(\theta,\delta)$ بدالة المخاطرة. هكذا، فإن $R(\theta,\delta)$ عبارة عن متوسط الخسارة الناجمة عن استخدام دالة القرار $\delta(X)$ عندما يكون التوزيع الحقيقي للمتغير العشوائي الملاحظ X هو $F(x;\theta)$.

نلاحظ من تعريف دالة المخاطرة ما يلي:

1. دالة المخاطرة تعتمد على دالة القرار δ والمعلمة θ.

2. لكل دالة قرار دالة مخاطرة وحيدة كدالة في θ.

3. إن دالة المخاطرة عند كل دالة قرار δ وكل $\theta \in \Theta$ تأخذ قيمة عددية.

وعلى ذلك، إن دوال المخاطرة الموافقة لدوال القرار في مسألة ما، عند قيمة معينة $\theta \in \Theta$، تمثل أعداداً. وبالتالي يمكن ترتيب دوال القرار حسب تلك الأعداد.

3.1.13 دالة القرار المسيطرة والمقبولة

Dominance and Admissibility Decision Function

إن دوال المخاطرة تعطي قاعدة لمقارنة دوال القرار المختلفة لمسألة مفروضة. فعلاً، إذا كانت لدينا دالتا قرار δ, δ'، بحيث إن:

$$R(\theta,\delta') \le R(\theta,\delta) \quad , \quad \forall \theta \in \Theta$$
$$R(\theta,\delta') < R(\theta,\delta) \qquad (2.1.13)$$

من أجل قيمة واحدة على الأقل لـ θ. فمن الواضح أن دالة القرار δ' أفضل من δ لأن استعمال δ' يؤدي في المتوسط إلى خسائر أقل. وعندئذٍ يقال أن دالة القرار δ' مسيطرة Dominance على دالة القرار δ. ويقال أن دالة القرار δ' مقبولة Admissibility إذا لم يكن مسيطَراً عليها بأي دالة قرار أخرى، وخلاف ذلك يقال غير مقبولة.

هناك دوال قرار لا يمكن مقارنتها وفق القاعدة (2.1.13)، فمثلاً، يمكن وجود دالتي قرار δ_1, δ_2 بحيث $R(\theta,\delta_1) < R(\theta,\delta_2)$ من أجل بعض قيم $\theta \in \Theta$، بينما من أجل القيم الأخرى لـ θ تتحقق المتباينة المعاكسة $R(\theta,\delta_1) > R(\theta,\delta_2)$. لاختيار أحد القرارين، في مثل هذه الحالة، لابد من معطيات أو تصورات إضافية.

مثال 1.1.13

ليكن X متغيراً عشوائياً خاضعاً لتوزيع بيرنولي $B(1,\theta)$، بحيث إن احتمال النجاح θ يمكن أن يكون $\theta_1 = 1/3$ أو $\theta_2 = 1/2$. ولنفترض فئة الحلول الممكنة $D = \{d_1, d_2\}$

ودالة الخسارة معطاة في الجدول الآتي:

$L(\theta,d)$:

θ \ d	d_1	d_2
θ_1	0	2
θ_2	3	1

والمطلوب:

1. إيجاد دوال القرار المختلفة.
2. حساب دالة المخاطرة لدوال القرار المختلفة.
3. حساب الدوال المقبولة وغير المقبولة.

في هذه المسألة $\theta=\theta_1,\theta_2$ و $x=0,1$; $f(x|\theta)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}$. وبما أن:

$$D=\{d_1,d_2\} \quad , \quad \Omega_X=\{0,1\}$$

فإن عدد دوال القرار المختلفة يساوي $2^2=4$ $(\delta_k;k=1,2,3,4)$، حيث إن:

$$\delta_1(x)=d_1 \;;\; x=0,1 \qquad \delta_4(x)=d_2 \;;\; x=0,1$$

$$\delta_2(x)=\begin{cases} d_1\;; x=0 \\ d_2\;; x=1 \end{cases} \qquad \delta_3(x)=\begin{cases} d_2\;; x=0 \\ d_1\;; x=1 \end{cases}$$

وحسب العلاقة (1.1.13) فإن دوال المخاطرة تعطى بالعلاقة:

$$R(\theta,\delta_k)=L(\theta,\delta_k(0))(1-\theta)+L(\theta,\delta_k(1))\theta \quad ; \quad \theta=\theta_1,\theta_2$$

عندما $k=1$:

$$R(\theta_1,\delta_1)=L(\theta_1,\delta_1(0))(1-\theta_1)+L(\theta_1,\delta_1(1))\theta_1$$

$$=L(\theta_1,d_1)(1-\theta_1)+L(\theta_1,d_1)\theta_1=0(2/3)+0(1/3)=0$$

$$R(\theta_2,\delta_1)=L(\theta_2,d_1)(1-\theta_2)+L(\theta_2,d_1)\theta_2=3(1/2)+3(1/2)=3$$

عندما $k = 2$:

$$R(\theta_1, \delta_2) = L(\theta_1, d_1)(1-\theta_1) + L(\theta_1, d_2)\theta_1 = 0 + 2(1/3) = 2/3$$

$$R(\theta_2, \delta_2) = L(\theta_2, d_1)(1-\theta_2) + L(\theta_2, d_2)\theta_2 = 3(1/2) + 1(1/2) = 2$$

وبشكل مشابه عندما $k = 3,4$ نجد:

$$R(\theta_1, \delta_3) = 4/3 \quad , \quad R(\theta_2, \delta_3) = 2$$

$$R(\theta_1, \delta_4) = 2 \quad , \quad R(\theta_1, \delta_4) = 1$$

هنا دالة القرار δ_3 غير مقبولة لأن الدالة δ_2 مُسيطرة عليها. والدوال الثلاث الأخرى $\delta_1 , \delta_2 , \delta_4$ مقبولة ولا يمكننا معرفة الأفضل منها ضمن المعلومات المتوفرة. ونلاحظ أن كل دالة قرار موصوفة بعددين (قيمتين لدالة المخاطرة R). فمثلاً، دالة القرار δ_1 موصوفة بـ:

$$\left(R(\theta_1, \delta_1) \ , \ R(\theta_2, \delta_1)\right) = (0,3)$$

هكذا، دوال القرار المتوفرة حول مسألة ما يمكن تصنيفها إلى: مقبولة وغير مقبولة. ومن الطبيعي استبعاد فئة دوال القرار غير المقبولة، واقتصار البحث في فئة الدوال المقبولة. إذا كانت فئة دوال القرار المقبولة تتألف من دالة قرار واحدة، فيكون لدينا القرار الأمثل. لكن عادة هذه الفئة واسعة بكفاية، لذا من أجل ترتيب دوال القرار المقبولة واختيار الأفضل منها لابد من معلومات إضافية. ولحل هذه المسألة يستخدم في الإحصاء مدخلين منطقيين: بييز، وأصغر الكبريات.

2.13 مبدأ بييز BAYES PRINCIPLE

إن مبدأ بييز يعتمد على معلومات إضافية حول المعلمة غير المعلومة θ تبين أنها متغيرة (غير ثابتة)، أي اعتبارها قيمة لمتغير عشوائي Θ، وهذا المتغير العشوائي له توزيع احتمالي قبلي معطى بدالة كثافة (أو دالة احتمال في حالة المتقطع) $g(\theta)$ [راجع التعريف

[(1.2.8-I)]. في هذه الحالة يمكن تماماً حساب متوسط الخسارة بالنسبة للتوزيـع $g(\theta)$،
نتيجة لاستخدام دالة قرار δ، ونرمز له بـــ $r(\delta)=E_{\theta}[R(\theta,\delta)]$ ويعطى بالعلاقة:

$$r(\delta)=E_{\theta}[R(\theta,\delta)]=\begin{cases}\int R(\theta,\delta)g(\theta)d\theta\\ \sum_{j}R(\theta_j,\delta)g(\theta_j)\end{cases} \qquad (1.2.13)$$

تسمى $r(\delta)$ بمخاطرة بييز Bayes risk، وهي لا تعتمد على θ بل على δ فقط.

هكذا، في تلك الحالة كل دالة قرار موصوفة بعدد واحدة (مخاطرة بييز)، وبالتـــالي كل دوال القرار يمكن ترتيبها حسب تلك الأعداد، وأفضل قاعدة قرار δ^* هي عبارة عن دالة القرار الموافقة لأقل قيمة لمخاطرة بييز $r(\delta)$. وبعبارة أخرى دالة قرار بييز δ^* هـــي الدالة التي تعطي أقل قيمة لمخاطرة بييز $r(\delta)$، أي أن:

$$r(\delta)\le r(\delta^*) \qquad (2.2.13)$$

لأي دالة قرار أخرى δ. وعندئذٍ الإجراء $\delta^*(x)=d^*$ يدعى بإجراء بييز Bayes action.

نلاحظ من تعريف دالة قرار بييز δ^*، أنها مرتبطة بالتوزيع القبلي $g(\theta)$. لذا مـــن أجل توزيعات قبلية مختلفة للمعلمة θ فدوال قرار بييز مختلفة بشكل عام.

عندما تكون المعلمة θ متغيرة سنرمز لتوزيع المتغير العشوائي X بـــ $f(x|\theta)$ للتمييز عن $f(x;\theta)$ (عندما تكون θ ثابتة) ومن ثم نرمز بـــ$f(x,\theta)$ للتوزيع المشترك للمتغـــورين العشوائيين X و Θ [راجع البند (2.8-I)].

مثـــال 1.2.13

في المثال السابق (1.1.13)، إذا علمت أن التوزيع القبلي للمعلمة θ هو:

θ	$\theta_1=1/3$	$\theta_2=1/2$
$g(\theta)$	1/4	3/4

فأوجد مخاطرة بييز الموافقة لكل من الدوال $\delta_k ; k = 1,2,4$ ، ثم عين دالة قرار بييز.

رأينا في المثال السابق أن دوال القرار المقبولة هي δ_4 ، δ_2 ، δ_1 ، والجدول الآتي يعطي دالة المخاطرة لكل منها:

$\delta \backslash \theta$	$\theta_1 = 1/3$	$\theta_2 = 1/2$
δ_1	$R(\theta_1,\delta_1) = 0$	$R(\theta_2,\delta_1) = 3$
δ_2	$R(\theta_1,\delta_2) = 2/3$	$R(\theta_2,\delta_2) = 2$
δ_4	$R(\theta_1,\delta_4) = 2$	$R(\theta_2,\delta_4) = 1$

وبتطبيق العلاقة (1.2.13) نجد مخاطرة بييز لكل دالة قرار:

$$r(\delta_1) = R(\theta_1,\delta_1)g(\theta_1) + R(\theta_2,\delta_1)g(\theta_2) = 0\left(\frac{1}{4}\right) + 3\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$r(\delta_2) = R(\theta_1,\delta_2)g(\theta_1) + R(\theta_2,\delta_2)g(\theta_2) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{12} + \frac{6}{4} = \frac{20}{12} \approx 1.67$$

$$r(\delta_4) = R(\theta_1,\delta_4)g(\theta_1) + R(\theta_2,\delta_4)g(\theta_2) = 2\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = 1.25$$

وعلى ذلك، فإن دالة القرار δ_4 توافق أصغر قيمة لمخاطرة بييز وهي 1.25، ومن ثم فـإن δ_4 تكون دالة قرار بييز.

مثـال 2.2.13

فيما يلي التوزيع الاحتمالي لـ $X \; [f(x|\theta)]$ ودالة الخسارة $L(\theta,d)$:

$f(x|\theta)$:

$x \backslash \theta$	θ_1	θ_2
0	0.7	0.2
1	0.2	0.3
2	0.1	0.5

$L(\theta,d)$:

$\theta \backslash d$	d_1	d_2
θ_1	0	3
θ_2	4	0

والمطلوب:

1. تعيين دوال القرار المختلفة.
2. حساب دالة المخاطرة لدوال القرار (1).
3. إذا كان التوزيع القبلي للمعلمة θ هو:

θ	θ_1	θ_2
$g(\theta)$	1/3	2/3

فأوجد دالة قرار بيز، ومن ثم إجراء بيز عند $x = 0,1,2$.

حيث يوجد إجراءان (حلان) d_1 , d_2 وثلاث قيم لـ X هي 0,1,2، فيكون هنالك $2^3 = 8$ دوال قرار مختلفة هي:

x \ δ	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8
$x_1 = 0$	d_1	d_1	d_1	d_1	d_2	d_2	d_2	d_2
$x_2 = 1$	d_1	d_1	d_2	d_2	d_2	d_2	d_1	d_1
$x_3 = 2$	d_1	d_2	d_1	d_2	d_2	d_1	d_2	d_1

ونحسب المخاطرة $R(\theta_j,\delta_k)$ من العلاقة (1-1.13):

$$R(\theta_j,\delta_k) = E_X L(\theta_j,\delta_k(X)) = \\ = \sum_i L(\theta_j,\delta_k(x_i)) f(x_i|\theta_j) \quad ; \quad i = 1,2,3 \ , \ j = 1,2 \ , \ k = 1,2,\dots,8$$

$$R(\theta_1,\delta_1) = L(\theta_1,\delta_1(x_1))f(x_1|\theta_1) + L(\theta_1,\delta_1(x_2))f(x_2|\theta_1) + L(\theta_1,\delta_1(x_3))f(x_3|\theta_1) \\ = L(\theta_1,\delta_1(0))f(0|\theta_1) + L(\theta_1,\delta_1(1))f(1|\theta_1) + L(\theta_1,\delta_1(2))f(2|\theta_1) = \\ = L(\theta_1,d_1)f(0|\theta_1) + L(\theta_1,d_1)f(1|\theta_1) + L(\theta_1,d_1)f(2|\theta_1) = \\ = 0+0+0=0$$

$$R(\theta_1,\delta_2) = L(\theta_1,\delta_2(0))f(0|\theta_2) + L(\theta_1,\delta_2(1))f(1|\theta_1) + L(\theta_1,\delta_2(2))f(2|\theta_1) \\ = L(\theta_1,d_1)f(0|\theta_1) + L(\theta_1,d_1)f(1|\theta_1) + L(\theta_1,d_2)f(2|\theta_1) = \\ = 0+0+3(0.1) = 0.3$$

$$R(\theta_2,\delta_1) = L(\theta_2,d_1)f(0|\theta_2) + L(\theta_2,d_1)f(1|\theta_2) + L(\theta_2,d_1)f(2|\theta_2) =$$
$$= 4(0.2) + 4(0.3) + 4(0.5) = 4$$

$$R(\theta_2,\delta_2) = L(\theta_2,d_1)f(0|\theta_2) + L(\theta_2,d_1)f(1|\theta_2) + L(\theta_2,d_2)f(2|\theta_2) = 2$$

وبشكل مشابه نجد:

$$R(\theta_1,\delta_3) = 0.6 \quad ; \quad R(\theta_2,\delta_3) = 2.8$$
$$R(\theta_1,\delta_4) = 0.9 \quad ; \quad R(\theta_2,\delta_4) = 0.8$$
$$R(\theta_1,\delta_5) = 3 \quad ; \quad R(\theta_2,\delta_5) = 0$$
$$R(\theta_1,\delta_6) = 2.7 \quad ; \quad R(\theta_2,\delta_6) = 2$$
$$R(\theta_1,\delta_7) = 2.4 \quad ; \quad R(\theta_2,\delta_7) = 1.2$$
$$R(\theta_1,\delta_8) = 2.1 \quad ; \quad R(\theta_2,\delta_8) = 3.2$$

ويمكن تقديم النتائج السابقة في الجدول التالي:

θ \ δ	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8
θ_1	$R(\theta_1,\delta_1) = 0$	0.3	0.6	0.9	3	2.7	2.4	2.1
θ_2	$R(\theta_2,\delta_1) = 4$	2	2.8	0.8	0	2	1.2	3.2

نلاحظ أن دوال القرار δ_8 , δ_7 , δ_6 , δ_3 غير مقبولة (مُسيطر عليها من دوال قرار أخرى)، فالدالة δ_2 مسيطرة على الدالتين δ_3 , δ_8، والدالة δ_4 مسيطرة على الدالتين δ_7 , δ_8 . وبالتالي يمكن استبعادها، فيبقى دوال القرار المقبولة δ_1 , δ_2 , δ_4 , δ_5 . وللمقارنة بينها واختيار الأفضل نحسب مخاطرة بيز لكل منها (بناء على معرفة التوزيع القبلي للمعلمة θ)، وذلك بتطبيق العلاقة (1.2.13):

$$r(\delta_k) = \sum_{j=1}^{2} R(\theta_j,\delta_k)g(\theta_j) \quad ; \quad k = 1,2,4,5$$

فنجد:

$$r(\delta_1) = R(\theta_1,\delta_1)g(\theta_1) + R(\theta_2,\delta_1)g(\theta_2) = 0(1/3) + 4(2/3) = 8/3 \approx 2.67$$
$$r(\delta_2) = R(\theta_1,\delta_2)g(\theta_1) + R(\theta_2,\delta_2)g(\theta_2) = 0.3(1/3) + 2(2/3) \approx 1.43$$

$$r(\delta_4) = R(\theta_1,\delta_4)g(\theta_1) + R(\theta_2,\delta_4)g(\theta_2) = 0.9(1/3) + 0.8(2/3) \approx 0.83$$
$$r(\delta_5) = R(\theta_1,\delta_5)g(\theta_1) + R(\theta_2,\delta_5)g(\theta_2) = 3(1/3) + 0(2/3) = 1$$

نلاحظ أن أقل قيمة لمخاطرة بييز توافق دالة القرار δ_4، وبالتالي فإن الدالة δ_4 هي دالة قرار بييز، وإجراء بييز عند الملاحظة $x = 0$ هو d_1، وعند $x = 1$ هو d_2 ومن ثم عند $x = 2$ هو d_2.

نلاحظ أن المعلومات المتوفرة حول θ (معرفة التوزيع القبلي $g(\theta)$) أعطتنا إمكانية مقارنة دوال القرار المقبولة $\delta_1, \delta_2, \delta_4, \delta_5$ واختيار أفضلها وفق مخاطرة بييز.

يمكن استخدام التوزيع الاحتمالي البعدي للمعلمة θ، عند $X = x$، في إيجاد دالة قرار بييز بدلاً من التوزيع القبلي $g(\theta)$، ونرمز للتوزيع البعدي بـ $g(\theta|x)$، وحسب تعريف التوزيع البعدي كتوزيع شرطي لـ Θ عند $X = x$ [راجع التعريف (2.2.8-I)] نجد أن:

$$f(x,\theta) = f(x)g(\theta|x) = g(\theta)f(x|\theta)$$
$$g(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)g(\theta)}{f(x)} \qquad (3.2.13)$$

ومن ثم:

$$f(x) = E_\theta\left[f(X,\Theta)\right] = \begin{cases} \int f(x|\theta)g(\theta)d\theta \\ \sum_j f(x|\theta)g(\theta_j) \end{cases} \qquad (4.2.13)$$

بناءً على ذلك، إذا كانت Θ متغيراً مستمراً (متصلاً) وكانت X متغيراً مستمراً، فالعلاقة (1.2.13) يمكن كتابتها على الصورة:

$$\begin{aligned} r(\delta) &= E_\theta\left[R(\theta,\delta(X))\right] = E_\theta\left[\int L(\theta,\delta(x))f(x|\theta)dx\right] \\ &= \int\left[\int L(\theta,\delta(x))f(x|\theta)dx\right]g(\theta)d\theta \\ &= \int\left[\int L(\theta,\delta(x))g(\theta|x)d\theta\right]f(x)dx \qquad (1) \end{aligned}$$

$$= \int E\left[L(\Theta,\delta(X))\middle|X = x\right]f(x)dx$$

$$= \int E_{\Theta|x}L(\theta,\delta(x))f(x)dx \qquad (5.2.13)$$

وبشكل مشابه، في حالة Θ متغير متقطع وكذلك X، فإن:

$$r(\delta) = \sum_i\left[\sum_j L(\theta_j,\delta(x_i))g(\theta_j|x_i)d\theta\right]f(x_i) \qquad (2)$$

$$= \sum_i E\left[L(\Theta,\delta(X))\middle|X = x_i\right]f(x_i)$$

$$= \sum_i E_{\Theta|x}L(\theta,\delta(x_i))f(x_i) \qquad (6.2.13)$$

الدليل $\Theta|x$ في الرمز $E_{\Theta|x}$ يشير إلى أن التوقع مأخوذ بالنسبة للتوزيع الشرطي $g(\theta|x)$.

نلاحظ أن المقدار بين القوسين [.] في (1) و (2) عبارة عن القيمة المتوقعة للخسارة بالنسبة للتوزيع الاحتمالي البعدي $g(\theta|x)$، والتي تسمى بالخسارة البعدية المتوقعة Expected posterior loss. وأن تلك القيمة المتوقعة تعتمد على القيمة المشاهدة x وعلى الإجراء المخصص لهذه القيمة باستخدام دالة القرار $\delta(X)$، أي $d = \delta(x)$، لذا نرمز لها بـ $r_x(d)$.

وعلى ذلك فإن مخاطرة بييز تكتب على الصورة:

$$r(\delta) = \begin{cases} \int r_x(d)f(x)dx \\ \sum_i r_{x_i}(d)f(x_i) \end{cases} \qquad (7.2.13)$$

وتكون هذه المخاطرة أقل ما يمكن إذا كانت الخسارة البعدية المتوقعة أقل ما يمكن من أجل كل قيمة x (x_i). وهذا يعني لكل قيمة x (x_i) نحدد الإجراء d الذي يعطي أقل خسارة بعدية متوقعة. وهذا يعني إذا كانت δ^* هي دالة القرار الموافقة للقيمة الصغرى لمخاطرة بييز $r(\delta)$ (أي δ^* دالة قرار بييز)، فإن الإجراء $d^* = \delta^*(x)$ الذي خصصته دالة القرار δ^* للقيمة x يكون هو الإجراء الذي يعطي القيمة الصغرى للخسارة البعدية المتوقعة.

هكذا، من أجل توزيع قبلي $g(\theta)$ معطى للمعلمة θ فإن خوارزمية إيجاد إجراء (حل) بيز هي على النحو الآتي:

1. من أجل كل $X = x$ نجد التوزيع البعدي $g(\theta|x)$ وفق العلاقة (3.2.13).
2. بعد ذلك من أجل كل إجراء ممكن $d \in D$ نحسب الخسارة البعدية المتوقعة $r_x(d)$.
3. والإجراء الأفضل (إجراء بيز) هو الذي يوافق أقل خسارة بعدية متوقعة (هنا نفترض أن مثل ذلك الإجراء ينتمي إلى الفئة D).

نشير أخيراً إلى أن دالة قرار بيز المبنية على أي توزيع $g(\theta) > 0$ تعتبر مُسيطرة. فعلاً، لتكن δ^* دالة قرار بيز ولنفترض وجود دالة قرار أخرى δ مسيطرة على δ^*، أي أن:

$$R(\theta,\delta) \le R(\theta,\delta^*)$$

وتتحقق المتباينة الصارمة من أجل بعض قيم θ ذات احتمالات موجبة (بالنسبة للتوزيع القبلي $g(\theta)$). عندئذٍ، من الواضح أن $r(\delta) < r(\delta^*)$. وهذا يتعارض مع حقيقة أن دالة قرار بيز تجعل مخاطرة بيز أقل ما يمكن.

مثال 3.2.13

أوجد إجراء بيز في المثال (1.2.13) مستخدما التوزيع البعدي.

كما نعلم أن دالة الخسارة والتوزيع الاحتمالي لـ X:

$L(\theta,d)$:

θ \ d	d_1	d_2
θ_1	0	2
θ_2	3	1

$f(x|\theta)$:

x \ θ	$\theta_1 = \frac{1}{3}$	$\theta_2 = \frac{1}{2}$
$x_1 = 0$	2/3	1/2
$x_2 = 1$	1/3	1/2

أما التوزيع القبلي $g(\theta)$ فهو:

θ	$\theta_1 = 1/3$	$\theta_2 = 1/2$
$g(\theta)$	1/3	2/3

نتبع الخطوات الواردة سابقاً:

1. تعيين التوزيع البعدي $g(\theta|x)$ عند قيم X المختلفة:

$$g(\theta_j|x_i) = \frac{g(\theta_j)f(x_i|\theta_j)}{f(x_i)} \quad ; \quad i = 1,2 \quad , \ j = 1,2$$

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{2} g(\theta_j)f(x_i|\theta_j)$$

$$f(x_1 = 0) = g(\theta_1)f(x_1|\theta_1) + g(\theta_2)f(x_1|\theta_2)$$
$$= (1/3)(2/3) + (2/3)(1/2) = \frac{5}{9}$$

$$f(x_2 = 1) = g(\theta_1)f(x_2|\theta_1) + g(\theta_2)f(x_2|\theta_2)$$
$$= (1/3)(1/3) + (2/3)(1/2) = \frac{4}{9}$$

ومن ثم:

$$g(\theta_1|x_1 = 0) = \frac{g(\theta_1)f(x_1|\theta_1)}{f(x_1)} = \frac{(1/3)(2/3)}{5/9} = \frac{2}{5}$$

$$g(\theta_2|x_1 = 0) = \frac{g(\theta_1)f(x_2|\theta_1)}{f(x_2)} = \frac{(2/3)(1/2)}{5/9} = \frac{3}{5}$$

$$g(\theta_1|x_2 = 1) = \frac{g(\theta_2)f(x_1|\theta_2)}{f(x_1)} = \frac{(1/3)(1/3)}{4/9} = \frac{1}{4}$$

$$g(\theta_2|x_2 = 1) = \frac{g(\theta_2)f(x_2|\theta_2)}{f(x_2)} = \frac{(2/3)(1/2)}{4/9} = \frac{3}{4}$$

أي أن:

$g(\theta|x)$:

x \ θ	$\theta_1=1/3$	$\theta_2=1/2$
$x_1=0$	2/5	3/5
$x_2=1$	1/4	3/4

2. حساب الخسارة البعدية المتوقعة لكل إجراء عند كل قيمة من قيم X المختلفة.

عندما $x=x_1=0$:

$$r_{x_1}(d_1)=r_0(d_1)=\sum_{j=1}^{2}L(\theta_j,d_1)g(\theta_j|x_1)=$$

$$=L(\theta_1,d_1)g(\theta_1|x_1)+L(\theta_2,d_1)g(\theta_2|x_1)=0(2/5)+3(3/5)=\frac{9}{5}$$

$$r_{x_1}(d_2)=r_0(d_2)=L(\theta_1,d_2)g(\theta_1|x_1)+L(\theta_2,d_2)g(\theta_2|x_1)=2(2/5)+1(3/5)=\frac{7}{5}$$

وعلى ذلك فإن إجراء بييز هو d_2.

عندما $x=x_2=1$:

$$r_{x_2}(d_1)=r_1(d_1)=\sum_{j=1}^{2}L(\theta_j,d_1)g(\theta_j|x_2)=$$

$$=L(\theta_1,d_1)g(\theta_1|x_2)+L(\theta_2,d_1)g(\theta_2|x_2)=0(1/4)+3(3/4)=\frac{9}{4}$$

$$r_{x_2}(d_2)=r_1(d_2)=L(\theta_1,d_2)g(\theta_1|x_2)+L(\theta_2,d_2)g(\theta_2|x_2)=2(1/4)+1(3/4)=\frac{5}{4}$$

وبالتالي فإجراء بييز يكون d_2 أيضاً. هكذا نجد:

عندما $x=0$ فإجراء بييز d_2.

عندما $x=1$ فإجراء بييز d_2.

وهذان الإجراءان يوافقان دالة القرار δ_4، أي أن دالة قرار بييز هي δ_4، وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها في المثال (1.2.13).

بمقارنة أسلوب استخدام التوزيع القبلي $g(\theta)$ للوصول إلى دالة قرار بييز ومن ثم إلى إجراء بييز، بأسلوب استخدام التوزيع البعدي $g(\theta|x)$ لنفس الغاية، نجد أن الأسلوب الثاني أبسط بكثير، حيث لا نحتاج إلى حساب دالة المخاطرة ومن ثم حساب المخاطرة لكل دالة قرار. وهذا الأخير يأخذ وقتاً أكبر بكثير من الوقت الذي تأخذه عملية إيجاد التوزيع البعدي.

ونلاحظ أن الأسلوب الأول كان يضم المشاهدات مع دالة الخسارة ليحصل على دالة المخاطرة ثم يستخدم التوزيع القبلي $g(\theta)$ مع دالة المخاطرة لتحديد دالة قرار بييز. أما الأسلوب الثاني فيضم المشاهدات مع التوزيع القبلي $g(\theta)$ ليحصل على التوزيع البعدي $g(\theta|x)$ ثم يستخدمه مع دالة الخسارة لتحديد إجراء بييز، وطبعاً النتائج متكافئة في الأسلوبين.

مثال 4.2.13

أوجد إجراء بييز في المثال (2.2.13) باستخدام التوزيع البعدي.

نحسب:

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^{2} g(\theta_j) f(x_i|\theta_j) \quad ; \quad i = 1,2,3$$

فنجد:

$$f(0) = (0.7)/3 + 2(0.2)/3 = \frac{11}{30}$$

$$f(1) = (0.2)/3 + 2(0.3)/3 = \frac{8}{30}$$

$$f(2) = (0.1)/3 + 2(0.5)/3 = \frac{11}{30}$$

وعلى ذلك نجد التوزيع البعدي $g(\theta|x)$ وفق العلاقة:

$$g(\theta_j|x_i) = \frac{g(\theta_j) f(x_i|\theta_j)}{f(x_i)} \quad ; \quad i = 1,2,3 \ , \ j = 1,2$$

فنجد:

$g(\theta|x)$:

x \ θ	θ_1	θ_2
$x_1=0$	7/11	4/11
$x_2=1$	1/4	3/4
$x_3=2$	1/11	10/11

وأخيراً نحسب الخسارة البعدية المتوقعة لكل إجراء عند كل قيم X المختلفة وفق العلاقة:

$$r_{x_i}(d_k)=\sum_{j=1}^{2}L(\theta_j,d_k)g(\theta_j|x_i) \quad ; \quad i=1,2,3 \quad ; \quad k=1,2$$

فنجد:

عندما $x=x_1=0$ أن:

$$r_0(d_1)=\sum_{j=1}^{2}L(\theta_j,d_1)g(\theta_j|x_1)=$$

$$=L(\theta_1,d_1)g(\theta_1|x_1)+L(\theta_2,d_1)g(\theta_2|x_1)=0(7/11)+4(4/11)=\frac{16}{11}$$

$$r_0(d_2)=L(\theta_1,d_2)g(\theta_1|x_1)+L(\theta_2,d_2)g(\theta_2|x_1)=3(7/11)+0(4/11)=\frac{21}{11}$$

وعلى ذلك فإن إجراء بيز هو d_1.

وبشكل مشابه، عندما $x=x_2=1$، نجد:

$$r_1(d_1)=L(\theta_1,d_1)g(\theta_1|x_2)+L(\theta_2,d_1)g(\theta_2|x_2)=0+4(3/4)=\frac{12}{4}=3$$

$$r_1(d_2)=L(\theta_1,d_2)g(\theta_1|x_2)+L(\theta_2,d_2)g(\theta_2|x_2)=3(1/4)+0=\frac{3}{4}$$

وإجراء بيز يكون d_2.

وعندما $x=x_3=2$ نجد:

$$r_2(d_1)=\frac{40}{11}\qquad,\qquad r_2(d_2)=\frac{3}{11}$$

وإجراء بييز يكون d_2.

وهذه الإجراءات توافق دالة القرار δ_4 [راجع جدول دوال القرار في المثال (2.2.13)]، وهي نفس النتيجة التي توصلنا إليها في المثال (2.2.13) حيث كانت δ_4 هي دالة قرار بييز.

3.13 مبدأ أقل (أصغر) الكبريات MINIMAX PRINCIPLE

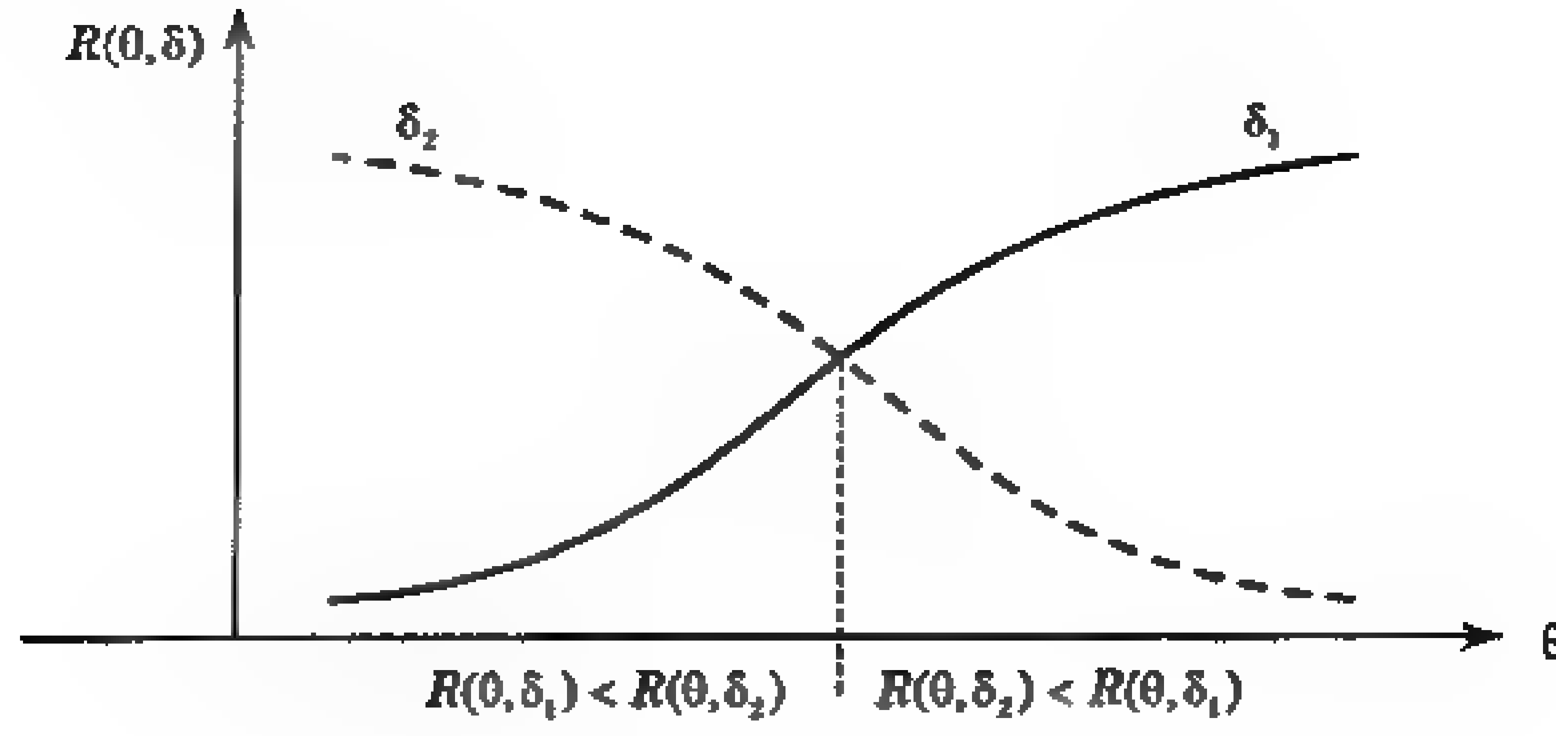
لاحظنا فيما سبق أن هدفنا هو اختيار دالة القرار المناسبة ضمن مجموعة القرارات المختلفة للمسألة المفروضة. وتطرقنا لقاعدتين لمقارنة دوال القرار واختيار أفضلها.

القاعدة الأولى

تعتمد على دوال المخاطرة $R(\theta,\delta)$، بحيث نختار دالة القرار δ' التي تحقق المتباينة (2.1.13)، أي الدالة δ' التي توافق أقل مخاطرة ممكنة لجميع قيم $\theta\in\Theta$. ولكن للأسف لا يوجد دائماً دالة القرار المسيطرة (دالة مخاطرته أقل ما يمكن لجميع قيم θ)، وذلك لاعتماد دالة المخاطرة $R(\theta,\delta)$ على المعلمة المجهولة θ. فمثلاً، إذا كان هنالك دالتا قرار δ_1 , δ_2، فكلاهما ليس أفضل (أحسن) من الآخر؛ أي إحداهما أفضل لبعض قيم θ والأخرى أفضل لبعض قيم θ الأخرى، كما يبدو ذلك على الشكل (1.3.13). هذا بالإضافة إلى ازدياد صعوبة تطبيق هذه القاعدة بازدياد عدد قيم θ (في حالة Θ متغير منقطع).

القاعدة الثانية

وهي قاعدة بييز التي تعتمد على إزالة اعتماد دالة المخاطرة $R(\theta,\delta)$ على المعلمة المجهولة θ، وذلك بناءً على معرفة التوزيع القبلي للمعلمة $g(\theta)$ واستبدال دالة المخاطرة لكل دالة قرار δ بمتوسط الخسارة $r(\delta)$ (مخاطرة بييز) الموافق لها واختيار الدالة δ^* التي



شكل (1.3.13)

تعطي أقل قيمة لمخاطرة بييز، أي التي تحقق المتباينة (2.2.13). لكن ما يؤخذ على هذه القاعدة هو أن المعلومات القبلية حول المعلمة θ غير متوفرة دائماً، أي أن التوزيع القبلي $g(\theta)$ للمعلمة θ غير معلوم دائماً.

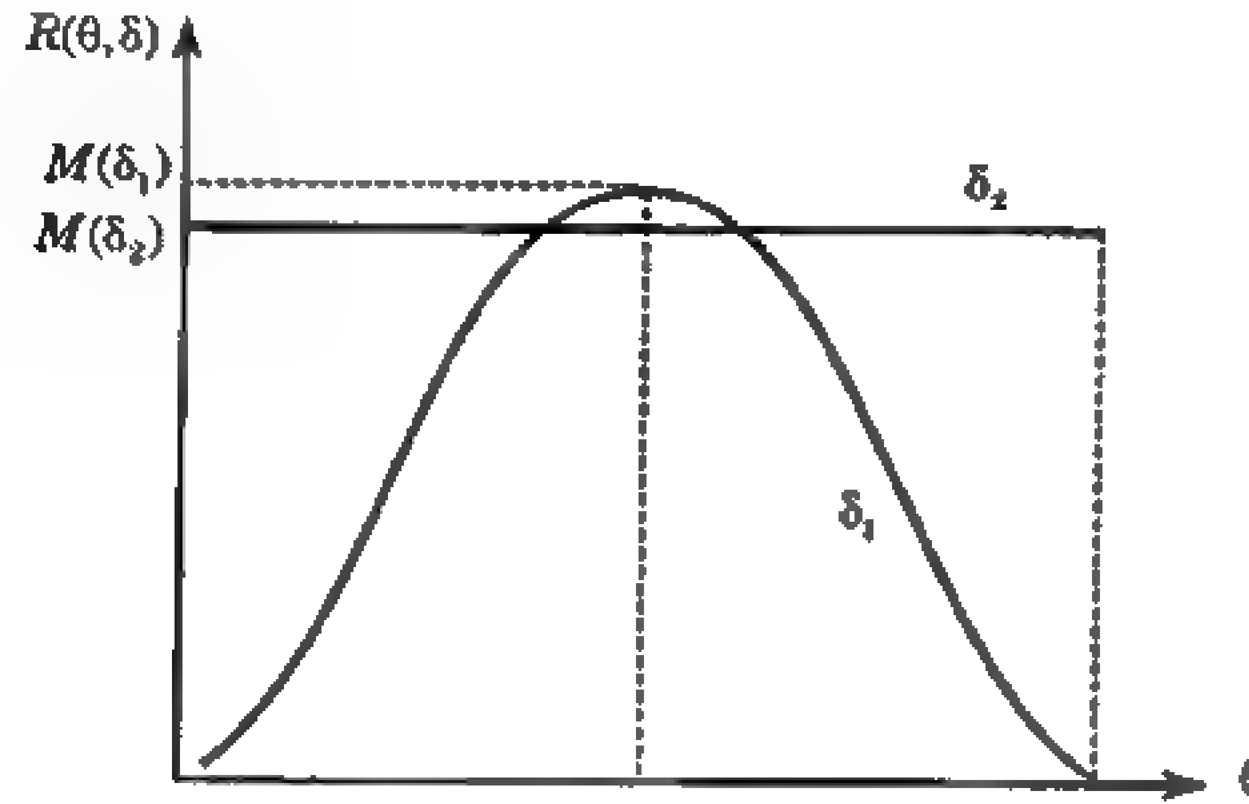
لإزالة اعتماد دالة المخاطرة $R(\theta,\delta)$ على المعلمة المجهولة θ تستخدم قاعدة أخرى للمفاضلة بين دوال القرار المختلفة δ، وهذه القاعدة تعتمد على القيم العظمى لدوال المخاطرة $R(\theta,\delta)$ على θ، أي على $M(\delta)=\sup_{\theta\in\Theta} R(\theta,\delta)$، وذلك باستبدال دالة المخاطرة $R(\theta,\delta)$ لكل دالة قرار δ بقيمتها العظمى $M(\delta)$، ومقارنة دوال القرار المختلفة حسب القيم العظمى لمخاطرة كل منها، واختيار دالة القرار $\tilde{\delta}$ التي لها أصغر قيمة بين المخاطرات العظمى. عندئذٍ الدالة $\tilde{\delta}$ تدعى بدالة قرار (قاعدة) أصغر الكبريات Minimax decision function.

مما سبق يمكن صياغة التعريف الآتي: يقال عن دالة قرار $\tilde{\delta}$ بأنها دالة أصغر الكبريات إذا حققت المتباينة:

$$M(\tilde{\delta}) \le M(\delta) \qquad (1.3.13)$$

وذلك لأي دالة قرار أخرى δ.

نلاحظ أن مبدأ أصغر الكبريات في اختيار دالة القرار يعتمد فقط على المحـــاطرات العظمى $M(\delta)$ وليس على كل قيم دالة المخاطرة $R(\theta,\delta);\theta\in\Theta$ ، وبالتـــالي لا يعتـــبر دائماً مفيداً في اختيار دالة القرار الأفضل. فمثلاً، يمكن وجود دالتي قرار δ_2 , δ_1 بحيـــث إن $R(\theta,\delta_1)<R(\theta,\delta_2)$ عند معظم قيم $\theta\in\Theta$ و $R(\theta,\delta_2)<R(\theta,\delta_1)$ عند بعض قيـــم θ، ومع ذلك فدالة قرار أصغر الكبريات هي δ_2 كما يبدو ذلك بوضوح على الشـــكل (2.3.13).



شكل (2.3.13)

بشكل عام، إن المسألة حول وجود وبناء قاعدة قرار (دالة قرار) أصغر الكبريـــات ليست سهلة، بل صعبة بما فيه الكفاية ولن نتطرق لها هنا. وسنقتصر على حالة خاصـــة، حيث يمكن ببساطة الوصول إلى دالة قرار أصغر الكبريات.

بشكل خاص، نفترض وجود توزيع قبلي للمعلمة $g(\theta)>0$ ، بحيث تكون دالـــة المخاطرة الموافقة لدالة قرار بييز δ^* ثابتة، أي أن:

$$R(\theta,\delta^*)=c=\text{constant}\quad ;\quad \forall\,\theta\in\Theta$$

عندئذٍ $\tilde{\delta}=\delta^*$ تعتبر دالة قرار أصغر الكبريات.

فعلاً، إذا افترضنا وجود دالة قرار أخرى δ مخاطرتها الأعظمية $M(\delta)<c$ ، أي أن:

$$R(\theta,\delta) < R(\theta,\delta^{*}) \quad ; \quad \forall\, \theta \in \Theta$$

وهذا يتعارض مع كون دالة قرار بييز مُسيطرة.

مثـــال 1.3.13

لتكن لدينا معطيات ونتائج المثال (1.1.13). والمطلوب إيجاد دالة قـــــرار أصغـــر الكبريات.

رأينا في المثال (1.1.13) أن دوال القرار المقبولة هي $\delta_1, \delta_2, \delta_4$، ووجدنا أن:

$$R(\theta,\delta_1) = \begin{cases} 0 & ; \quad \theta = \theta_1 \\ 3 & ; \quad \theta = \theta_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad M(\delta_1) = 3$$

$$R(\theta,\delta_2) = \begin{cases} 2/3 & ; \quad \theta = \theta_1 \\ 2 & ; \quad \theta = \theta_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad M(\delta_2) = 2$$

$$R(\theta,\delta_4) = \begin{cases} 2 & ; \quad \theta = \theta_1 \\ 1 & ; \quad \theta = \theta_2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad M(\delta_4) = 2$$

نلاحظ أن $M(\delta_2) = M(\delta_4) = 2 < M(\delta_1) = 3$، أي في الحالة المفروضـــة لدينـــا دالتين قرارهما: δ_2, δ_4 تحققان صفة أصغر الكبريات، وبالتالي يمكن اختيار أحدهمـــا δ_2 أو δ_4 كدالة أصغر الكبريات.

4.13 التقدير ESTIMATION

إن مســـائل التقـــدير، التي سبق وأن تعرضنا لها في فصـــول ســـابقة (الاســـتدلال الإحصائي I- نظرية التقـــدير) يمكن صياغتها بمصطلحات نظـــرية القـــرار (صياغتـــها كمسائل اتخاذ قرار). لنرَ مسألة التقدير بنقطة لمعلمة سلمية θ.

لتكن $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $f(x;\theta)$، حيث θ معلمة ســلمية مجهولة، ونريد تقدير المعلمة θ بنقطة. إن اختيـــار إحصاء $T(X)$ كمقدّر لـــ θ يمكـــن

تفسيره كاختيار دالة قرار، التي تخصص إجراءً d_t (القيمة المقدَّرة للمعلمة غير المعلومة θ تساوي $t = T(x)$) من $D = \{d_t\}$ إذا كانت العينة المشاهدة $x = (x_1, ..., x_n)$، حيث إن فضاء الإجراء D هنا يساوي فضاء المعلمة Θ.

نلاحظ أن دالة القرار (المقدِّر) $T(X)$ هي إحصاء معرف على فئة القيم الممكنة للعينة X، أي على الفضاء $G = \{x\}$، ومن ثم فهي متغير عشوائي يأخذ قيمة في $\{\theta\} = \Theta = D = \{d_t\}$، وبالتالي فإن $T(X)$ دالة معرفة على G وتأخذ قيمها في D.

عندما نأخذ الإجراء d_t ($t = T(x)$ تقدير لـ θ)، فإن دالة الخسارة الموافقة لـه $L(\theta, d_t)$ تعتبر مقياساً للخطأ أو الخسارة الناجمة عن اختيار الإجراء (القرار) d_t عندما تكون θ هي القيمة الحقيقية للمعلمة. وهي دالة غير سالبة وتحقق الشرطين:

.1 $$L(\theta, d_t) \geq 0 \quad ; \quad \forall \theta \in \Theta \ , \ \forall d_t \in D$$

.2 $$L(\theta, d_t) = 0 \quad ; \quad t = \theta$$

وعلى ذلك يمكن صياغة تعريف دالة الخسارة على النحو الآتي:

إذا كان D فضاء الإجراءات و Θ فضاء المعلمة، فإن أي دالة $L(\theta, d_t) \geq 0$ معرفة على $D \times \Theta$ وتأخذ قيمها في فئة الأعداد الحقيقية تسمى دالة خسارة.

والسؤال الآن كيف نعين دالة خسارة مناسبة لكل مسألة تقدير (كمسألة قرار) قيد الدراسة؟

بما أن دالة الخسارة عبارة عن مقياس للخطأ فيجب منطقياً أن تأخذ قيمة كبيرة للخطأ الكبير وقيمة صغيرة للخطأ الصغير. وبالطبع فإننا نرغب أن تكون الخسارة أقل ما يمكن، أي أن يكون القرار (الإجراء) قريباً جداً من القيمة الحقيقية للمعلمة المقدَّرة θ.

هناك دوال خسارة مختلفة تستخدم في الإحصاء عند التقدير، نذكر أهمها:

$$L(\theta, d_t) = \varphi(|t - \theta|)$$

حيث إن φ دالة متزايدة في الخطأ $|t-\theta|$.

إذا كانت $\varphi(|t-\theta|)=|t-\theta|$، وهي عبارة عن الانحراف المطلق، فتدعى دالة خسارة الخطأ المطلق **Absolute error loss function**.

وإذا كانت $\varphi(|t-\theta|)=(t-\theta)^2$، وهي عبارة عن مربع الخطأ، فتدعى دالة خسارة مربع الخطأ **Squared error loss function**.

تستخدم غالباً في مسائل التقدير دالة الخسارة:

$$L(\theta,d_t)=(t-\theta)^2 \qquad (1.4.3)$$

وعندئذٍ دالة المخاطرة:

$$R(\theta,\delta)=R(\theta,T)=E_X\left(T(X)-\theta\right)^2 \qquad (2.4.3)$$

هي عبارة عن متوسط الأخطاء المربعة للمقدّر $T(X)$ وفق توزيع X.

بعد تعيين دالة الخسارة المناسبة لمسألة التقدير المطروحة يصبح هدفنا هو اختيار مقدّر $T(X)$ (دالة قرار) يجعل الخسارة أقل ما يمكن. لقد تطرقنا في البند (6.5-I) إلى مسألة البحث عن المقدّر الأكفأ (الذي يجعل $V_\theta T$ أقل ما يمكن) ضمن صف المقدّرات غير المتحيزة.

مبرهنة 1.4.13

إذا كانت $L(\theta,d_t)=(t-\theta)^2$، فإن مقدّر بييز هو متوسط التوزيع البعدي $g(\theta|x)$، أي أن:

$$\delta^*(X)=T^*(X)=E(\Theta|X)$$

الإثبات

سنقوم بإثبات هذه المبرهنة في حالة كل من Θ و X متغير مستمر، حيث يمكن إثباتها بشكل مشابه في الحالات الأخرى.

حسب العلاقة (5.2.13) نجد:

$$r(\delta) = \int\left[\int (t-\theta)^2 g(\theta|x)d\theta\right] f(x)dx$$

أن إيجاد $T(X)$ التي تعطي القيمة الصغرى لدالة المخاطرة $r(\delta)$ تكافئ إيجـــاد $T(X)$ التي تعطي القيمة الصغرى للمقدار بين القوسين [.]، أي المقدار:

$$\int (t-\theta)^2 g(\theta|x)dx$$

وذلك بمفاضلة هذا المقدار بالنسبة لـ t ومساواته بالصفر، فنجد مقدّر بييز:

$$\delta^*(X) = T^*(X) = \int \theta g(\theta|x)dx = E(\Theta|X)$$

وفي هذه الحالة تكون مخاطرة بييز هي:

$$r(\delta^*) = \int V(\Theta|x) f(x)dx$$

حيث إن $V(\Theta|x)$ تباين التوزيع البعدي $g(\theta|x)$.

لنوضح الآن كيفية اختيار مقدّر $T(X)$ (دالة قرار) بناءً على نظرية القـــرار مـــن خلال المثالين الآتيين.

مثـــال 1.4.13

إذا كانت $X = (X_1, \dots, X_n)$ عينة عشوائية من توزيع برنولي:

$$f(x|\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \quad ; \quad x = 0,1$$

وكـــان التوزيع القبـــلي لـــ Θ هو $g(\theta) = 1; 0 < \theta < 1$ ، ودالـــة الخســـارة هـــي $L(\theta, d_t) = (t-\theta)^2$ ، فأوجد مقدّر بييز، ومن ثم مخاطرة بييز لهذا المقدّر.

بما أن:

$$f(x|\theta) = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \quad ; \quad x = 0,1 \ , \ 0 < \theta < 1$$

فإن:

$$f(x|\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)=\theta^{y}(1-\theta)^{n-y} \quad ; \quad y=\sum_{1}^{n} x_i$$

بدلاً من التعامل مع العينة العشوائية X، المأخوذة من توزيع بيرنولي، فيمكن استخدام الإحصاء $Y=\sum_{1}^{n} X_i$ لسهولة التعامل معه. وكما نعلم أن $Y=\sum_{1}^{n} X_i$ (عدد النجاحات في n تكرار بيرنولي) يخضع لتوزيع ذي الحدين $B(n,\theta)$، أي أن:

$$f(y|\theta)=C_y^n\theta^{y}(1-\theta)^{n-y} \quad ; \quad y=0,1,\dots,n \quad ; \quad C_y^n=\frac{n!}{y!(n-y)!}$$

وعليه فإن:

$$f(y)=\int_0^1 f(y,\theta)d\theta=\int_0^1 f(y|\theta)g(\theta)d\theta$$
$$=\int_0^1 C_y^n\theta^{y}(1-\theta)^{n-y}d\theta=C_y^n\frac{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)}{\Gamma(n+2)}$$
$$=\frac{n!}{y!(n-y)!}\frac{y!(n-y)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1} \quad ; \quad y=0,1,\dots,n$$

لأن [انظر علاقة (36.3.2-I)]:

$$\int_0^1 \theta^{y}(1-\theta)^{n-y}d\theta=\beta(y+1,n-y+1)=\frac{\Gamma(y+1)\Gamma(n-y+1)}{\Gamma(n+2)}=\frac{y!(n-y)!}{(n+1)!}$$

و $\Gamma(y)=(y-1)!$، حيث إن y عدد صحيح غير سالب.

وبناءً على ذلك:

$$g(\theta|y)=\frac{f(y|\theta)g(\theta)}{f(y)}=(n+1)C_y^n\theta^{y}(1-\theta)^{n-y} \quad ; \quad y=0,1,\dots,n \ , \ 0<\theta<1$$

$$r(T)=\sum_{y=0}^{n}\left[\int_0^1 (t-\theta)^2 g(\theta|y)d\theta\right]f(y) \qquad (1)$$

نلاحظ أن إيجاد $T(X)$ التي تعطي القيمة الصغرى لمخاطرة بييز $r(T)$ تكافئ إيجاد $T(X)$ التي تعطي القيمة الصغرى للمقدار بين القوسين، أي المقدار:

$$\int_0^1 (t-\theta)^2 g(\theta|y)d\theta = (n+1)C_y^n \int_0^1 (t-\theta)^2 \theta^y (1-\theta)^{n-y} d\theta$$

ولإيجاد $T(X)$ التي تجعل هذا المقدار أصغري نفاضله بالنسبة لـ t ونساويه بالصفر فنجد أن:

$$2\int_0^1 (t-\theta)g(\theta|y)d\theta = 0 \Rightarrow t = \int_0^1 \theta g(\theta|y)d\theta = E(\Theta|y)$$

$$= (n+1)C_y^n \int_0^1 \theta^{y+1}(1-\theta)^{n-y} d\theta$$

$$= (n+1)C_y^n \beta(y+2, n-y+1) = \frac{y+1}{n+2}$$

أي أن مقدّر بييز هو:

$$T^*(X) = E(\Theta|Y) = \frac{Y+1}{n+2} = \frac{n\overline{X}+1}{n+2}$$

أما مخاطرة بييز لمقدّر بييز فتحسب على النحو الآتي:

$$r(T^*) = \int_0^1 R(\theta, t^*)g(\theta)d\theta = \int_0^1 \left[\sum_{y=0}^{n} L(\theta, d_t^*)f(y|\theta)\right] g(\theta)d\theta$$

$$= \int_0^1 \left[\sum_{y=0}^{n} (t^* - \theta)^2 f(y|\theta)\right] d\theta = \int_0^1 \left[\sum_{y=0}^{n} \left(\frac{y+1}{n+2} - \theta\right)^2 f(y|\theta)\right] g(\theta)d\theta$$

$$= \int_0^1 E\left[\left(\frac{Y+1}{n+2} - \theta\right)^2 \Big| \theta\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2} \int_0^1 E\left[\left((Y - n\theta) + (1-2\theta)\right)^2 \Big| \theta\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{(n+2)^2} \int_0^1 \left[\mathrm{var}(Y|\theta) - (1-2\theta)^2\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{(n \div 2)^2} \int_0^1 \left[n\theta(1-\theta) + (1-2\theta)^2\right] d\theta = \frac{1}{6(n+2)}$$

لأن Y يخضع لتوزيع دي الحدين [راجع الفقرة (I-2.2.2)]، وبالتالي:

$$E(Y|\theta) = n\theta$$
$$\mathrm{var}(Y|\theta) = E\left[(Y-n\theta)^2|\theta\right] = n\theta(1-\theta)$$

مثـــال 2.4.13

إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة من توزيع بيرنولي $B(1,\theta)$، وكــــان التوزيـــع القبلي لـــ θ هو:

$$g(\theta) = \frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}}{\beta(a,b)} \quad ; \quad \beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

حيث إن $a,b>0$ ثابتان معلومان، فأوجد مقدّر أصغر الكبريات مستخدماً دالة خســـارة مربع الخطأ $L(\theta,d_t) = (t-\theta)^2$.

نعلم أن:

$$f(x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x} \quad ; \quad x = 0,1 \ , \ 0<\theta<1$$
$$f(x|\theta) = \theta^{\sum x_i}(1-\theta)^{n-\sum x_i} = \theta^y(1-\theta)^{n-y} \quad ; \quad y = \sum_1^n x_i$$

وعليه:

$$f(x) = \int_0^1 f(x|\theta)g(\theta)d\theta = \int_0^1 \theta^{y+a-1}(1-\theta)^{n-y+b-1}d\theta = \beta(y+a, n-y+b)$$

وبالتالي حسب العلاقة (3.2.13) فالتوزيع البعدي لـــ θ.

$$g(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)g(\theta)}{f(x)} = \frac{\theta^{y+a-1}(1-\theta)^{n-y+b-1}}{\beta(y+a,n-y+b)} \quad ; \quad 0<\theta<1$$

وهذا توزيع β آخر بمعلمتين جديدتين $(y+a\ ,n-y+b)$.

لنحسب متوسط الخسارة لكل قرار ممكن d_t بالنسبة لهذا التوزيع البعدي، فنجد:

$$R(\theta,d_t)=\int_0^1(t-\theta)^2g(\theta|x)d\theta=\int_0^1(t^2-2\theta t+\theta^2)\frac{\theta^{y+a-1}(1-\theta)^{n-y+b-1}}{\beta(y+a,n-y+b)}d\theta$$

$$=t^2\int_0^1\frac{\theta^{y+a-1}(1-\theta)^{n-y+b-1}}{\beta(y+a,n-y+b)}d\theta-2t\int_0^1\frac{\theta^{y+a}(1-\theta)^{n-y+b-1}}{\beta(y+a,n-y+b)}d\theta$$

$$+\int_0^1\frac{\theta^{y+a+1}(1-\theta)^{n-y+b-1}}{\beta(y+a,n-y+b)}d\theta$$

$$=t^2\frac{\beta(y+a,n-y+b)}{\beta(y+a,n-y+b)}-2t\frac{\beta(y+a+1,n-y+b)}{\beta(y+a,n-y+b)}$$

$$+\frac{\beta(y+a+2,n-y+b)}{\beta(y+a,n-y+b)}$$

$$=t^2-2t\frac{y+a}{n+a+b}+\frac{(y+a)(y+a+1)}{(n+a+b)(n+a+b+1)}$$

ولإيجاد t التي تجعل المقدار $R(\theta,d_t)$ أصغري نفاضله بالنسبة لـ t ونساويه بالصفر، فنجد أن:

$$2t-2\frac{y+a}{n+a+b}=0\Rightarrow t^*=\frac{y+a}{n+a+b}$$

أي أن مقدّر بييز:

$$T^*(X)=\delta^*(X)=\frac{Y+a}{n+a+b}\quad ;\quad Y=\sum_1^n X_i \qquad (3.4.13)$$

إن دالة مخاطرة هذا المقدّر تساوي [انظر العلاقة (1.4.5-I)] مجموع مربع الانحراف:

$$b(\theta)=E_\theta T^*(X)-\theta=\frac{n\theta+a}{n+a+b}-\theta$$

والتباين:

$$\operatorname{var}_\theta T^*(X)=\frac{n\theta(1-\theta)}{(n+a+b)^2}$$

أي أن:

$$R(\theta,T^*)=\frac{[a-(a+b)\theta]^2+n\theta(1-\theta)}{(n+a+b)^2} \qquad (4.4.13)$$

لأن:

$$\begin{aligned}R(\theta,T^*)&=E_X(T^*-\theta)^2=E_\theta\left[(T^*-E_\theta T^*)+(E_\theta T^*-\theta)\right]^2\\&=E_X(T^*-E_\theta T^*)^2+(E_\theta T^*-\theta)^2\\&=V_X T^*(X)+b^2(\theta)\end{aligned}$$

للحصول على حل أصغر الكبريات يجب إيجاد توزيع قبلي لـ θ، بحيث تكون دالة المخاطرة لدالة قرار بيز T^* ثابتة، أي اختيار a,b بحيث تكون المخاطرة $R(\theta,T^*)$ ثابتة. ومن العلاقة (4.4.13) نجد أن هذا محقق عندما:

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2&=n\\2a(a+b)&=n\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad a=b=\frac{\sqrt{n}}{2}$$

وبالتعويض في (3.4.13) نحصل على مقدّر أصغر الكبريات لـ θ:

$$\tilde{T}=\tilde{\delta}(X)=\frac{\left(Y+\sqrt{n}/2\right)}{\left(n+\sqrt{n}\right)} \qquad (5.4.13)$$

ومخاطرته:

$$R(\theta,\tilde{\delta})=M(\tilde{\delta})=\frac{a^2}{(n+a+b)^2}=\frac{1}{4n\left(1+1/\sqrt{n}\right)^2} \qquad (6.4.13)$$

وكما نعلم أن المقدّر غير المتحيز الأكفأ (أقل تباين) لـ θ هو الإحصاء:

$$T(X)=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i=\frac{Y}{n}$$

ودالة مخاطرته:

$$R(\theta,T)-V_\theta T(X)=\frac{\theta(1-\theta)}{n}\le\frac{1}{4n}$$

ومن ثم مخاطرته العظمى:

$$M(T)=\sup_{\theta\in\Theta}\frac{\theta(1-\theta)}{n}=\frac{1}{4n}$$

وبالمقارنة مع المخاطرة العظمى لدالة قرار أصغر الكبريات $\tilde{\delta}$، نجد:

$$M(T)=\frac{1}{4n}>\frac{1}{4n\left(1+1/\sqrt{n}\right)^2}=M(\tilde{\delta})$$

لكن بمقارنة المخاطرتين نلاحظ أن:

$$R(\theta,T)=\frac{\theta(1-\theta)}{n}>\frac{1}{4n\left(1+1/\sqrt{n}\right)^2}=R(\theta,\delta^*)$$

فقط إذا كان:

$$\left(\theta-\frac{1}{2}\right)^2>\frac{1}{4}-\frac{1}{4\left(1+1/\sqrt{n}\right)^2}=\frac{1}{4}\left[1-\left(1+1/\sqrt{n}\right)^{-2}\right]$$

$$\left|\theta-\frac{1}{2}\right|>\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(1+1/\sqrt{n}\right)^{-2}}=\varepsilon_n \quad ; \quad \varepsilon_n=\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(1+1/\sqrt{n}\right)^{-2}}$$

اي أن:

$$\frac{1}{2}-\varepsilon_n<\theta<\frac{1}{2}+\varepsilon_n$$

وهذا يعني أن:

$$R(\theta,\tilde{\delta})<R(\theta,\delta) \quad ; \quad \theta\in\left(\frac{1}{2}\pm\varepsilon_n\right)$$

حيث إن $0 \leftarrow \varepsilon_n=\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(1+1/\sqrt{n}\right)^{-2}}$ عندما $n\to\infty$. وكذلك:

$$\frac{M(T)}{M(\tilde{\delta})} = \frac{\sup_{\theta\in\Theta} R(\theta,\delta)}{\sup_{\theta\in\Theta} R(\theta,\tilde{\delta})} - \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 \to 1$$

عندما $n \to \infty$.

هكذا، مقــدِّر أصغر الكبيريات $\tilde{\delta}$ أفضل من المقدِّر الأكفأ $T(X)$ فقط من أجــل قيم $\theta \in (1/2 \pm \varepsilon_n)$، والمقدِّر الأكفأ $T(X)$ أفضل من أجل بقية القيم لـــ θ. وعندمــــا تكون n كبيرة نفضل المقدِّر غير المتحيز بأقل تباين (الأكفأ $T(X)$).

مثـــال 3.4.13

إذا كانت $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\theta,\sigma^2)$، وكـــان التـــوزيع القبلي لـــ θ هو $N(a,b^2)$، حيث إن a, b مقداران ثابتان ومعلومـــان. وأن $L(\theta,d) = (d-\theta)^2$، فأوجد مقدِّر بيز $\delta^*(X)$ واحسب مخاطرته.

بما أن المتغير العشوائي الملاحظ X يخضع لتوزيع طبيعي $N(\theta,\sigma^2)$، أي:

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)^2} \quad ; \quad -\infty < x < +\infty \ , \ -\infty < \theta < +\infty$$

والتوزيع القبلي لـــ Θ هو:

$$g(\theta) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta-a}{b}\right)^2}$$

فإن $(\overline{X}|\theta)$ يخضع للتوزيع الطبيعي $N(\theta,\sigma^2/n)$، أي أن:

$$f(\bar{x}|\theta) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{x}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}$$

وعندما تكون العينة المشاهدة $x = (x_1,...,x_n)$ فإن $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i$، لذا سنتعامل مع الإحصاء $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ بدلاً من العينة X وذلك للتبسيط.

ولإيجاد التوزيع البعدي $g(\theta|\overline{x})$ نتبع ما يلي [راجع البند (I-2.8)]:

$$g(\theta|\overline{x}) \propto f(\overline{x}|\theta)g(\theta) \propto e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{n(\overline{x}-\theta)^2}{\sigma^2}+\frac{(\theta-a)^2}{b^2}\right]} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2b^2\sigma^2}\left[nb^2(\overline{x}-\theta)^2+\sigma^2(\theta-a)^2\right]} \propto e^{-\frac{nb^2+\sigma^2}{2b^2\sigma^2}\left[\theta-2\frac{nb^2\overline{x}+a\sigma^2}{nb^2+\sigma^2}+\left(\frac{nb^2\overline{x}+\sigma^2a^2}{nb^2+\sigma^2}\right)^2\right]} =$$

$$= e^{-\frac{nb^2+\sigma^2}{2b^2\sigma^2}\left(\theta-\frac{nb^2\overline{x}+a\sigma^2}{nb^2+\sigma^2}\right)^2}$$

وهذا يعني أن التوزيع البعدي $g(\theta|\overline{x})$ للمعلمة θ ما هــــو إلا التوزيــــع الطبيعــي $N\left(\frac{nb^2\overline{x}+a\sigma^2}{nb^2+\sigma^2}, \frac{b^2\sigma^2}{nb^2+\sigma^2}\right)$. وحيث إن دالة الخسارة هي مربع الخطأ [راجع المثــال (1.4.13)] فإن مقدِّر بييز:

$$T^*(X) = \delta^*(X) = E(\Theta|\overline{X}) = \frac{nb^2\overline{X}+a\sigma^2}{nb^2+\sigma^2} \quad , \quad t^* = \frac{nb^2\overline{x}+a\sigma^2}{nb^2+\sigma^2}$$

ومخاطرة بييز لهذا المقدِّر:

$$r(\delta^*) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(t^*-\theta)^2 f(\overline{x}|\theta)d\overline{x}\right]g(\theta)d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(\theta-t^*)^2 g(\theta|\overline{x})d\theta\right]f(\overline{x})d\overline{x} = \int_{-\infty}^{+\infty}\text{var}(\Theta|\overline{x})f(\overline{x})d\overline{x}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{b^2\sigma^2}{nb^2+\sigma^2}f(\overline{x})d\overline{x} = \frac{b^2\sigma^2}{nb^2+\sigma^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}f(\overline{x})d\overline{x} = \frac{b^2\sigma^2}{nb^2+\sigma^2}$$

نلاحظ أن مقدِّر بييز $\delta^*(X) = T^*(X)$ دالة في إحصاء كافٍ أصغري $\overline{X}$. وهذا، على العموم صحيح، أي أن مقدِّرات بييز دائماً دوال في إحصاءات كافية صغرى.

5.13 اختبار الفرضيات TESTING OF HYPOTHESES

لنرَ الآن صياغة مسائل اختبار الفرضيات بمصطلحات نظرية القرار، أي اعتبارها مسائل قرار.

لتكن $X = (X_1,...,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع احتمالي $f(x;\theta)$ ويطلب اختبار فرضية العدم $H_0 : \theta \in \Theta_0$ ضد الفرضية البديلة $H_1 : \theta \in \Theta_1$. عندئذٍ أي اختبار يمكن تفسيره كقاعدة قرار (دالة قرار) ذات إجراءين:

d_0 قبول الفرضية H_0.

d_1 قبول الفرضية H_1 (رفض H_0).

وعلى ذلك فإن:

$\delta(x) = d_0$ إذا وقعت x في منطقة القبول، أي $x \in G_0$.

$\delta(x) = d_1$ إذا وقعت x في منطقة الرفض، أي $x \in G_1$.

أي أن فضاء الإجراءات $D = \{d_0, d_1\}$. وهنا من الطبيعي اعتبار أن الخسارة تساوي الصفر، إذا تم اختيار القرار الصحيح. عندها دالة الخسارة:

$$L(\theta,d) = \begin{cases} L(\theta,d_0) = 0 & ; \quad \forall\theta \in \Theta_0 \\ L(\theta,d_1) = 0 & ; \quad \forall\theta \in \Theta_1 \end{cases} \qquad (1.5.13)$$

وإذا قبلنا إضافة، أن الخسارة عند اختيار قرار (حل) غير صحيح في أي حالة تساوي:

$$L(\theta,d) = \begin{cases} L(\theta,d_0) = a(\theta) & ; \quad \forall\theta \in \Theta_1 \\ L(\theta,d_1) = b(\theta) & ; \quad \forall\theta \in \Theta_0 \end{cases} \qquad (2.5.13)$$

فعندها، من أجل دالة الخسارة البسيطة هذه، دالة المخاطرة لأي قاعدة قرار δ تأخذ الشكل:

$$R(\theta,\delta)=\begin{cases}P_\theta\left(\delta(X)=d_1\right)=b(\theta)P(H_1|H_0) & ; \quad \forall\theta\in\theta_0\\ P_\theta\left(\delta(X)=d_0\right)=a(\theta)P(H_0|H_1) & ; \quad \forall\theta\in\theta_1\end{cases} \qquad (3.5.13)$$

وهذا يعني أن قيمتي دالة المخاطرة، في الحالة المفروضة، متناسبة مع احتمالي الخطأ من النوع الأول والثاني. وكحالة خاصة عندما $a=b=1$ فإن قيمتي دالة المخاطرة تنطبقان على احتمالي الخطأ من النوع الأول والثاني.

هكذا، الصيغة العامة لدالة المخاطرة:

$$R(\theta,\delta)=L(\theta,d_0)P_\theta\left(\delta(X)=d_0\right)+L(\theta,d_1)P_\theta\left(\delta(X)=d_1\right) \ ; \ \theta\in\theta \qquad (4.5.13)$$

ستقتصر دراستنا على الحالة التي تكون فيها $\theta=\{\theta_0,\theta_1\}$، أي أن فرضية العدم $H_0:\theta=\theta_0$ مقابل $H_1:\theta=\theta_1$ و $b(\theta_0)=b\ ,a(\theta_1)=a$، وعندئذٍ دالة المخاطرة هي:

$$R(\theta,\delta)=\begin{cases}R(\theta_0,\delta)=bP\left(\delta(X)=d_1|\theta_0\right)=bP(H_1|H_0)\\ R(\theta_1,\delta)=aP\left(\delta(X)=d_0|\theta_1\right)=aP(H_0|H_1)\end{cases} \qquad (5.5.13)$$

أي أن دالة المخاطرة لكل دالة قرار δ توصف بعددين $(R(\theta_0,\delta)\ ,R(\theta_1,\delta))$.

هكذا، دالة المخاطرة $R(\theta,\delta)$ لكل اختبار $\delta(X)$ تأخذ قيمتين: $R(\theta_0,\delta)$ و $R(\theta_1,\delta)$، وبالتالي نختار الاختبار δ الذي يجعلهما أقل ما يمكن في آن واحد. لكن مثل هذا الاختبار لا يوجد إلا نادراً. ولتجاوز مشكلة اعتماد دالة المخاطرة على θ، كما في مسائل التقدير، سنعتمد على مبدأ أصغر الكبريات ومبدأ بييز لاختيار الاختبار الأفضل.

1.5.13 اختبار أصغر الكبريات Minimax Test

إن حل أصغر الكبريات لمسألة اختبار فرضية العدم $H_0:\theta=\theta_0$ ضد $H_1:\theta=\theta_1$ يتمثل في إيجاد قاعدة القرار $\tilde{\delta}$ التي توافق القيمة الصغرى للمقدار:

$$M(\delta)=\sup_{\theta} R(\theta,\delta)=\max\left[R(\theta_0,\delta),R(\theta_1,\delta)\right]$$
$$=\max\left[bP(H_1|H_0)\,,abP(H_0|H_1)\right]$$

ويقال إن الاختبار $\tilde{\delta}(X)$ هو اختبار أصغر الكبريات إذا كان يوافق أصغر قيمة بين القيم العظمى للمخاطرات، أي إذا كان:

$$M(\tilde{\delta}) \leq M(\delta)$$

لأي اختبار آخر δ. والمبرهنة الآتية تعطي اختبار أصغر الكبريات.

مبـرهنة 1.5.13

إذا كانت $X=(X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $f(x;\theta)$، ونريـــد اختبـــار الفرضية $H_0:\theta=\theta_0$ ضد $H_1:\theta=\theta_1$، فإنه اختبار أصغر الكبريـــات $\tilde{\delta}(X)$ يعطـــى بمنطقة الرفض:

$$\tilde{G}_1=\left\{x:\lambda(x)=\frac{f(x;\theta_0)}{f(x;\theta_1)}\leq c\right\}$$

حيث تتحدد قيمة الثابت c من العلاقة:

$$R(\theta_0,\tilde{\delta})=R(\theta_1,\tilde{\delta})$$

الإثبـــات

لنفترض وجود اختبار آخر $\delta(X)$ بحيث إن:

$$R(\theta_0,\delta)\leq R(\theta_0,\tilde{\delta}) \qquad (1)$$

خلاف ذلك، أي إذا كانت:

$$R(\theta_0,\delta) > R(\theta_0,\tilde{\delta})$$

فإن الاختبار δ لا يمكن أن يكون اختبار أصغر الكبريات لأن:

$$R(\theta_0,\tilde{\delta})=R(\theta_1,\tilde{\delta}) < \max[R(\theta_0,\delta)\,,\,R(\theta_1,\delta)]$$

بناءً على المتباينة (1) والعلاقة (5.5.13) نجد:

$$P\left[\delta(X)=d_1|\theta_0\right]\le P\left[\tilde{\delta}(X)=d_1|\theta_0\right]$$

وهذا يعني أن حجم الاختبار $\delta(X)$ أقل من أو يساوي حجم الاختبـــار $\tilde{\delta}(X)$، لكن حسب مبرهنة نيمان وبيرسون (1.2.2)، فإن الاختبار $\tilde{\delta}(X)$ الأقوى، وعلى ذلـــك فإن قوته لابد وأن تكون على الأقل مساوية لقوة الاختبار $\delta(X)$، وهذا يعني أن:

$$P\left[\tilde{\delta}(X)=d_1|\theta_1\right]\ge P\left[\delta(X)=d_1|\theta_1\right]$$

ومن ثم:

$$P\left[\tilde{\delta}(X)=d_0|\theta_1\right]\le P\left[\delta(X)=d_0|\theta_1\right]$$

أي أن:

$$aP\left[\tilde{\delta}(X)=d_0|\theta_1\right]\le aP\left[\delta(X)=d_0|\theta_1\right]$$

وعلى ذلك:

$$R(\theta_1,\tilde{\delta})\le R(\theta_1,\delta)$$

وهذا يعني أن:

$$\max\left[R(\theta_0,\tilde{\delta})\,,R(\theta_1,\tilde{\delta})\right]=R(\theta_1,\tilde{\delta})\le R(\theta_1,\delta)$$

وبالتالي:

$$\max\left[R(\theta_0,\tilde{\delta})\,,R(\theta_1,\tilde{\delta})\right]\le\max\left[R(\theta_0,\delta)\,,R(\theta_1,\delta)\right]$$

أي أن $\tilde{\delta}(X)$ هو اختبار أصغر الكبريات.

مثـــال 1.5.13

لتكن $X=(X_1,...,X_n)$ عينة عشـــوائية من توزيع طبيعي $N(\theta,\sigma^2)$، حيـــث إن

التباين σ^2 معلوم، ونـــريد اختبار فـــرضية العدم $H_0 : \theta = \theta_0$ ضد الفـــرضية البديلـــة $H_1 : \theta = \theta_1 > \theta_0$. أوجد اختبار أصغر الكبريات مستخدما دالة الخســـارة المعرفـــة في العلاقة (1.5.13).

حسب المبرهنة (1.5.13) فإن اختبار أصغر الكبريات $\tilde{\delta}(X)$ يعطى بمنطقة الرفـض من الشكل:

$$\tilde{G}_1 = \left\{ x : \lambda(x) = \frac{f(x;\theta_0)}{f(x;\theta_1)} \leq c \right\}$$

وتتحدد c من المساواة:

$$R(\theta_0, \tilde{\delta}) = R(\theta_1, \tilde{\delta})$$

$$\lambda(x) = \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - \theta_0)^2 - (x_i - \theta_1)^2 \right] \right\}$$

$$= \exp\left[\frac{n}{\sigma^2}(\theta_1 - \theta_0)\bar{x} - \frac{n}{2\sigma^2}(\theta_1^2 - \theta_0^2) \right]$$

والمتباينة $\lambda(x) \leq c$ مكافئة للمتباينة:

$$\ln \lambda(x) = \frac{n}{\sigma^2}(\theta_1 - \theta_0)\bar{x} - \frac{n}{2\sigma^2}(\theta_1^2 - \theta_0^2) \leq \ln c$$

أي أن:

$$\bar{x} \geq \frac{\sigma^2 \ln c}{(\theta_1 - \theta_0)\bar{x}} + \frac{(\theta_1 + \theta_0)}{2} = k$$

وهذا يعني أن نرفض H_0 عندما $\bar{x} \geq k$ ونقبل H_0 عندما $\bar{x} < k$. ويتعين الثابت k مـــن العلاقة:

$$R(\theta_0, \tilde{\delta}) = R(\theta_1, \tilde{\delta})$$

$$bP_{\theta_0}(\overline{X} \geq k) = aP_{\theta_1}(\overline{X} < k)$$

$$bP\left(\frac{\overline{X}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{k-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = aP\left(\frac{\overline{X}-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{k-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$b\left[1-P\left(\frac{\overline{X}-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{k-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] = a\Phi\left(\frac{k-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$$b\left[1-\Phi\left(\frac{k-\theta_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\right] = a\Phi\left(\frac{k-\theta_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

وبمعرفة قيم كل من $a\,,b\,,n\,,\sigma^2\,,\theta_1\,,\theta_0$ واستخدام جدول التوزيـــع الطبيعـــي المعياري نجد قيمة الثابت k.

فمثلاً، إذا كانت:

$$a=b \quad , \quad n=25 \quad , \quad \sigma^2=4 \quad , \quad \theta_0=1 \quad , \quad \theta_1=2$$

فنجد أن:

$$1-\Phi\left(\frac{k-1}{2/5}\right)=\Phi\left(\frac{k-2}{2/5}\right) \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{k-1}{2/5}\right)+\Phi\left(\frac{k-2}{2/5}\right)=1$$

وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت:

$$\frac{k-1}{2/5}=-\frac{k-2}{2/5} \quad \Rightarrow \quad k-1=-k+2 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{3}{2}$$

وبالتالي يكون اختبار أصغر الكبريات $\tilde{\delta}$ معطى بمنطقة الرفض:

$$\tilde{G}_1=\left\{x:\bar{x}\geq\frac{3}{2}\right\}$$

مثـــال 2.5.13

إذا كانت $X=(X_1,\ldots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x} \quad , \quad x\geq 0$$

وكانت $H_0:\theta=1, H_1:\theta=2$ و $n=2, a=b$ فأوجد اختبار أصغر الكبريات مستخدماً دالة الخسارة المعرفة بالعلاقة (1.5.13).

بما أن:

$$f(x;\theta)=\theta e^{-\theta x} \quad ; \quad x\geq 0$$

فإن:

$$f(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)=\theta^n e^{-n\theta \bar{x}}$$

وعلى ذلك:

$$f(x;\theta_0)=\theta_0^n e^{-n\theta_0\bar{x}} \qquad , \qquad f(x;\theta_1)=\theta_1^n e^{-n\theta_1\bar{x}}$$

$$\lambda(x)=\frac{f(x;\theta_0)}{f(x;\theta_1)}=\left(\frac{\theta_0}{\theta_1}\right)^n e^{-n(\theta_1-\theta_0)\bar{x}}\leq c$$

وهذه مكافئة للمتباينة:

$$\ln\lambda(x)=n\ln\frac{\theta_0}{\theta_1}+n(\theta_1-\theta_0)\bar{x}\leq \ln c$$

$$\sum_{1}^{n} x_i = n\bar{x}\leq \frac{\ln c - n\ln(\theta_0/\theta_1)}{\theta_1-\theta_0}=k$$

وحسب المبرهنة (1.5.13) فإن اختبار أصغر الكبريات $\tilde{\delta}(X)$ يعطى بمنطقة الرفض:

$$\tilde{G}_1=\{x:\lambda(x)\geq c\}=\left\{x:\sum_{i=1}^{n} x_i\leq k\right\}$$

حيث k ثابت يتعين من العلاقة:

$$R(\theta_0,\tilde{\delta})=R(\theta_1,\tilde{\delta})$$

$$P_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\leq k\right)=P_{\theta_1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i>k\right)$$

لكن توزيع $Y=\sum_{1}^{n} X_i$ [راجع المبرهنة (4.3.2-I)]:

$$f(y,\theta)=\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}y^{n-1}e^{-\theta y} \quad ; \quad y>0$$

إذن:

$$\int_0^k \frac{\theta_0^n}{\Gamma(n)}y^{n-1}e^{-\theta_0 y}dy=\int_k^\infty \frac{\theta_1^n}{\Gamma(n)}e^{-\theta_1 y}dy \Rightarrow \int_0^k ye^{-y}dy=4\int_k^\infty ye^{-2y}dy \Rightarrow$$
$$1-(k+1)e^{-k}=(2k+1)e^{-2k}$$

حسب طريقة المحاولة والخطأ واستخدام الحاسوب وجدنا $k \approx 1.17$، أي أن اختبار أصغر الكبريات $\tilde{\delta}(X)$ معطى بمنطقة الرفض:

$$\tilde{G}_1=\left\{x:\sum_{i=1}^{n}x_i \le 1.17\right\}$$

تجدر الإشارة إلى أنه في حالة التوزيعات المتقطعة قد نحتاج إلى بعض الطرق العشوائية، كما رأينا في الاختبارات العشوائية [راجع البند (3.2)] حتى ننجز تحقق المساواة $R(\theta_0,\tilde{\delta})=R(\theta_1,\tilde{\delta})$.

2.5.13 اختبار بييز

بفرض أن $g(\theta)$ التوزيع الاحتمالي القبلي للمعلمة θ المعرفة على $\theta=\theta_1\cup\theta_0$، فإن مخاطرة بييز تكون:

$$\begin{aligned}
r(\delta)=E_\theta R(\theta,\delta)&=\int_\theta R(\theta,\delta)g(\theta)d\theta\\
&=\int_{\theta_0}R(\theta,\delta)g(\theta)d\theta+\int_{\theta_1}R(\theta,\delta)g(\theta)d\theta\\
&=\int_{\theta_0}b(\theta)P\left[\delta(X)=d_1|\theta\right]g(\theta)d\theta+\int_{\theta_1}a(\theta)P\left[\delta(X)=d_0|\theta\right]g(\theta)d\theta
\end{aligned}$$

واختبار بييز لاختبار الفرضية $H_0:\theta\in\Theta_0$ ضد $H_1:\theta\in\Theta_1$ هو $\delta^*(X)$ الموافــق للقيمة الصغرى للمقدار $r(\delta)$.

عنـــدما تكون $H_0:\theta=\theta_0$ ، $H_1:\theta=\theta_1$ (فرضيتين بسيطتين) و $g(\theta_0)=g_0$ ، $g(\theta_1)=g_1$ فإن:

$$\begin{aligned} r(\delta) &= R(\theta_0,\delta)g(\theta_0)+R(\theta_1,\delta)g(\theta_1)= \\ &= bg_0P_{\theta_0}\left[\delta(X)=d_1\right]+ag_1P_{\theta_1}\left[\delta(X)=d_0\right] \end{aligned} \quad (6.5.13)$$

يقال أن $\delta^*(X)$ هو اختبار بييز إذا كان يحقق المتباينة:

$$g_0R(\theta_0,\delta^*)+g_1R(\theta_1,\delta^*)\le g_0R(\theta_0,\delta)+g_1R(\theta_1,\delta) \quad (7.5.13)$$

لجميع الاختبارات $\delta(X)$.

والمبرهنة الآتية تعطي اختبار بييز $\delta^*(X)$.

مبـرهنة 2.5.13

إذا كانت $X=(X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع $f(x|\theta)$ ويطلـــب اختبـــار فرضية العدم $H_0:\theta=\theta_0$ ضد الفرضية $H_1:\theta=\theta_1$ ، وكانت:

$$g(\theta_0)=g_0 \quad , \quad g(\theta_1)=1-g_0=g_1$$
$$L(\theta_1,d_0)=a \quad , \quad L(\theta_0,d_1)=b$$

فإن اختبار بييز $\delta^*(X)$ يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_1^*=\left\{x:\lambda(x)=\frac{f(x|\theta_0)}{f(x|\theta_1)}\le\frac{ag_1}{bg_0}\right\} \quad (8.5.13)$$

الإثبـات

لإيـــجاد اختبـــار بييز $\delta^*(X)$ يجب أن نبحث عن $\delta(X)$ التي تجعل المقدار $r(\delta)$ المعرف بالعلاقة (6.5.13) أصغري.

كما نعلم من تعريف مخاطرة بيز [انظر العلاقتين (1.1.13) و (1.2.13)]:

$$r(\delta) = E_X R(\theta,\delta) = E_\theta\left[E_X L(\theta,\delta(X))\right] = E_X\left[E_{\theta|x} L(\theta,\delta(X))\right]$$

وعلى ذلك فإن الاختبار δ^* الذي يجعل المقدار $r(\delta)$ أصغرياً هو ذاته الذي يجعل المقدار $E_{\theta|x}L(\theta,\delta(X))$ أصغرياً، لذا نبحث في هذا المقدار الأخير.

كما نعلم التوزيع البعدي:

$$g(\theta|x) = \frac{g(\theta)f(x|\theta)}{f(x)} = \frac{g(\theta)f(x|\theta)}{\sum_{j=0}^{1} g(\theta_j)f(x|\theta_j)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{g(\theta_0)f(x|\theta_0)}{g(\theta_0)f(x|\theta_0)+g(\theta_1)f(x|\theta_1)} & ; \quad \theta=\theta_0 \\[2ex] \dfrac{g(\theta_1)f(x|\theta_1)}{g(\theta_0)f(x|\theta_0)+g(\theta_1)f(x|\theta_1)} & ; \quad \theta=\theta_1 \end{cases} \qquad (9.5.13)$$

وبذلك يكون:

$$E_{\theta|x}\left[L(\theta,\delta(X))\right] = \begin{cases} bg(\theta_0|x) & ; \quad \theta=\theta_0 \ , \ \delta(x)=d_1 \\ ag(\theta_1|x) & ; \quad \theta=\theta_1 \ , \ \delta(x)=d_0 \end{cases}$$

ومن ثم نرفض H_0 $(\delta(x)=d_1)$ إذا كان:

$$bg(\theta_0|x) \le ag(\theta_1|x)$$

أي أن:

$$bg_0 f(x|\theta_0) \le ag_1 f(x|\theta_1)$$

وعليه الاختبار $\delta^*(x)$ هو رفض H_0 إذا كان:

$$\frac{f(x|\theta_0)}{f(x|\theta_1)} \le \frac{ag_1}{bg_0}$$

وهو المطلوب.

مثـــال 3.5.13

أوجد اختبار بيز في المثال السابق (1.5.13)، إذا علمت أن:

$$g(\theta_0) = g_0 \quad , \quad g(\theta_1) = 1 - g_0 = g_1$$

حسب المبرهنة (2.5.13) فإن اختبار بيز δ^* يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_1^* = \left\{ x : \lambda(x) = \frac{f(x|\theta_0)}{f(x|\theta_1)} \le \frac{ag_1}{bg_0} \right\}$$

رأينا في المثال (1.5.13) أن المتباينة $\lambda(x) \le c$ مكافئة للمتباينة $\bar{x} \ge k$ وأن:

$$k = \frac{\sigma^2 \ln c}{n(\theta_1 - \theta_0)} + \frac{\theta_1 + \theta_0}{2}$$

وبوضع $c = \frac{ag_1}{bg_0}$ نجد:

$$k = \sigma^2 \frac{\ln ag_1 - \ln bg_0}{n(\theta_1 - \theta_0)} + \frac{\theta_1 + \theta_0}{2}$$

وبالتالي اختبار بيز δ^* يعطى بمنطقة الرفض:

$$G_1^* = \left\{ x : \bar{x} \ge \sigma^2 \frac{\ln ag_1 - \ln bg_0}{n(\theta_1 - \theta_0)} + \frac{\theta_1 + \theta_0}{2} \right\}$$

6.13 مسألة تصنيف الملاحظات

سنتطرق الآن لدراسة حالة خاصة، لكنها ذات أهمية تطبيقية كبيرة.

ليكن X متغيراً عشوائياً يتبع التوزيع $F(x;\theta)$ وفضاء المعلمة يتألف من عدد منتهٍ من النقاط $\theta = \{\theta_1, ..., \theta_k\}$، أي لدينا k توزيع $F_i(x) = F(x;\theta_i)\,; i = 1, ..., k$، واحـد

منهم يعتبر التوزيع الحقيقي في كل مرة تؤخذ فيها ملاحظة على $X=(X_1,...,X_n)$، أي عند كل عينة مشاهدة $x=(x_1,...,x_n)$. ولنفترض أنه يطلب، بناءً على عينة مشاهدة $x=(x_1,...,x_n)$، معرفة أي من التوزيعات هو التوزيع الحقيقي لـ X. هكذا، فئة الحلول في الحالة المعطاة هي $D=\{d_1,...,d_k\}$، حيث إن القرار d_i (الحل d_i) يعني اختيار التوزيع $F_i\,;i=1,...,k$ كتوزيع حقيقي لـ X.

لنرّ المبادئ العامة لحل مثل تلك المسائل بناءً على نظرية القرار ونوضحها من خلال بعض الأمثلة.

1.6.13 دالة المخاطرة في مسألة التصنيف

لتكن $\delta=\delta(x)$ قاعدة (دالة) قرار ما في المسألة المدروسة. عندئذٍ تولد هذه الدالة تجزئة لفضاء العينة $G=\{x\}$ إلى k فئة جزئية منفصلة $W_1,...,W_k$، أي بناءً على دالة القرار $\delta(x)$ يصنف فضاء العينة $G=\{x\}$ إلى k صنف أو فئة متنافية بالتبادل، حيث إن:

$$W_i=\{x\in G:\delta(x)=d_i\}\quad;\quad i=1,...,k \tag{1.6.13}$$

هذا يعني أن الفئة الجزئية $W_i\subset G$ تشتمل على كل النقاط $x=(x_1,...,x_n)$ (العينات بحجم n) التي يتخذ عندها القرار d_i (التوزيع الحقيقي لـ X هو F_i).

نفترض فيما يلي أن دالة الخسارة $L(\theta,d)$ معطاة، والتي تعين الخسارة الناجمة عن التصنيف الخاطئ، أي أن الأعداد:

$$L(\theta_i,d_j)=l(j|i)\quad;\quad i,j=1,...,k$$

معطاة. حيث إن $l(j|i)$ تعني الخسارة الناجمة عن اختيار التوزيع F_j بينما التوزيع الحقيقي هو $F_i\,;i\neq j$، أي انتماء عنصر (عينة مشاهدة x) من الصنف W_i إلى الصنف W_j. من الطبيعي في المسألة المعطاة اعتبار أن الخسارة تساوي الصفر إذا تم اختيار دالة قرار صحيحة، أي أن $l(i|i)=0\,;i=1,...,k$. عندئذٍ دالة المخاطرة المعرفة بالعلاقة

(1.1.13) تمثل بمتجه مخاطرة ذي k بعداً:

$$R(\delta)=\left(R_1(\delta),\ldots,R_k(\delta)\right)$$

حيث إن:

$$R_i(\delta)=R(\theta_i,\delta)=\sum_{j=1}^{k} l(j|i)P(j|i) \qquad (2.6.13)$$

و $P(j|i)=P_{\theta_i}(X\in W_j)$ عبارة عن احتمال انتماء عنصر من الفئة أو الصنف i (W_i) إلى الصنف j (W_j). ويمكن القول إن $R_i(\delta)$ هي متوسط الخسارة الناجمة عن تصنيف، وفق القاعدة δ، عنصر ما في الصف i. والمسألة الآن تتمثل في بناء أفضل دالة قرار (أقل خسائر).

لنحد دالة قرار بييز وأصغر الكبريات في الحالة المعطاة.

2.6.13 حل بييز

لنفترض أن التوزيع القبلي $g=(g_1,\ldots,g_k)$; $g_i=g(\theta_i); i=1,\ldots,k$ معلوم، أي أن أي عينة مشاهدة $x=(x_1,\ldots,x_n)$ تنتمي إلى الصف i باحتمال $g_i; i=1,\ldots,k$. عندئذٍ مخاطرة بييز (1.2.13) بناءً على العلاقة (2.6.13) تساوي:

$$r(\delta)=\sum_{i=1}^{k} R_i(\delta)g_i=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k} l(j|i)p(j|i)\,g_i \qquad (3.6.13)$$

وحسب الخوارزمية العامة لبناء دالة بييز [البند (2.13)] نجد القاعدة (الدالة) $\delta(X)$ التي تعطي أقل قيمة للمخاطرة (3.6.13)، وفق الصيغة (2.2.13).

نجد الاحتمالات البعدية للأصناف $W_i; i=1,\ldots,k$ عند الشرط $X=x$:

$$g(\theta_i|x)=g_i(x)=\frac{f_i(x)g_i}{\sum_{s=1}^{k} g_s f_s(x)} \quad ; \quad f_i(x)=f(x|\theta_i)\ ,\ i=1,\ldots,k$$

إذا اتخذ القرار $\delta(x)=d_j$، عند العينة المشاهدة x، فمن أجل تلك القاعدة الخسارة البعدية المتوقعة (متوسط الخسارات الشرطية) تساوي:

$$\sum_{i=1}^{k} L(\theta_i;d_j)g_i(x)=\frac{\sum_{i=1}^{k} l(j|i)g_i f_i(x)}{\sum_{s=1}^{k} g_s f_s(x)} \quad ; \quad i=1,\dots,k \tag{4.6.13}$$

وأخيراً الحل (القرار) d_j يجب اختياره بحيث يجعل الطرف الأيمن من العلاقة (4.6.13) أصغرياً، وهذا يوافق جعل المجموع:

$$h_j(x)=\sum_{i=1}^{k} l(j|i)g_i f_i(x) \quad ; \quad j=1,\dots,k \tag{5.6.13}$$

أصغرياً. والدليل j يشير إلى الصنف (أو الفئة) الذي تنتمي إليه العينة المشاهدة x. وإذا تم بلوغ أقل قيمة عند عدة قيم لـ j، فيمكن أخذ أي واحدة منها (فمثلاً، أصغر قيمة لـ j).

والمبرهنة التالية تعطي دالة قرار بييز δ^*.

مبـرهنة 1.6.13

إن دالة (قاعدة) بييز δ^* في مسألة التصنيف تعين بالتجزئة التالية لفضاء العينة $G=W_1^*\cup\dots\cup W_k^*$، حيث إن:

$$W_i^*=\left\{x: h_i(x)=\min_{1\le j\le k} h_j(x)\right\} \quad ; \quad i=1,\dots,k \tag{6.6.13}$$

حيث الدوال $h_i(x)$ معرفة بالعلاقة (5.6.13) و i القيمة الصغرى للدليل j المحققة للشرط (6.6.13).

لتكن $l(j|i)=1\,;\, j\ne i$ عندئذٍ:

$$h_j(x)=\sum_{i=1}^{k} g_i f_i(x)=-g_j f_j(x)+\sum_{i=1}^{k} g_i f_i(x)$$

والعلاقة (6.6.13) تكتب على الصورة:

$$g_i f_i(x) = \max_{1\le j\le k} g_j f_j(x) \quad ; \quad i \ne j \quad , \quad j = 1,\dots,k \qquad (7.6.13)$$

فمثلاً، إذا كانت $k = 2$، أي أن $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$، فإن:

$$h_1(x) = l(1|2) g_2 f_2(x) \quad , \quad h_2(x) = l(2|1) g_1 f_1(x)$$

وبالتالي الحل d_1 (انتماء العينة المشاهدة $x = (x_1,\dots,x_n)$ إلى الفئة الأولى) يتخذ فقط عندما:

$$l(2|1) g_1 f_1(x) \ge l(1|2) g_2 f_2(x)$$

وبعبارة أخرى فإن قاعدة بييز δ^* تكون:

$$\delta^*(x) = \begin{cases} d_1 & ; \quad x \in W_1^* \\ d_2 & ; \quad x \in W_2^* = \overline{W_1^*} \end{cases}$$

حيث إن:

$$W_1^* = \left\{ x : \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \ge \frac{g_2 l(1|2)}{g_1 l(2|1)} \right\}$$

أي إذا كان المطلوب هو اختبار الفرضية $H_0 : \theta = \theta_1$ ضد $H_1 : \theta = \theta_2$، فنقبل الفرضية H_0 عندما $x \in W_1^*$ ونقبل H_1 إذا كانت $x \in W_2^*$. وهذه نفس النتيجة المقدمة في المبرهنة (2.5.13). ومتجه المخاطرة الموافق $\left(R_1(\delta^*), R_2(\delta^*)\right)$ يساوي:

$$l(2|1) P_{\theta_1}(X \in W_2^*) \quad , \quad l(1|2) P_{\theta_2}(X \in W_1^*) \qquad (8.6.13)$$

أما إذا كانت $k = 3$، أي أن $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$، ونريد اختبار الفرضية:

$$H_i : \theta = \theta_i \quad ; \quad i = 1,2,3$$

فحل بييز هو أن نقبل الفرضية $H_i : \theta = \theta_i \, ; i = 1,2,3$ إذا كان:

$$l(j|i)g_i f_i(x) \geq l(i|j)g_j f_j(x) \quad ; \quad j \neq i \;,\; j = 1,2,3 \qquad (9.6.13)$$

أي أن منطقة قبول الفرضية $H_1 : \theta = \theta_1$ (W_1^*) تتعين من المتباينتين:

$$l(2|1)g_1 f_1(x) \geq l(1|2)g_2 f_2(x) \quad , \quad l(3|1)g_1 f_1(x) \geq l(1|3)g_3 f_3(x)$$

ومنطقة قبول الفرضية $H_2 : \theta = \theta_2$ (W_2^*) تُعين من المتباينتين:

$$l(1|2)g_2 f_2(x) \geq l(2|1)g_1 f_1(x) \quad , \quad l(3|1)g_1 f_1(x) \geq l(1|3)g_3 f_3(x)$$

وكذلك منطقة قبول الفرضية $H_3 : \theta = \theta_3$ تعين من الشرطين:

$$l(1|3)g_3 f_3(x) \geq l(3|1)g_1 f_1(x) \quad , \quad l(2|3)g_3 f_3(x) \geq l(3|2)g_2 f_2(x)$$

لنوضح ذلك من خلال المثال الآتي:

مثـــال 1.6.13

إذا كانت $X = (X_1, \ldots, X_n)$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\theta, 4)$ وكـــــانت $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ وبفرض التوزيع القبلي لـــ θ:

$$g(\theta) = g(\theta_i) = g_i \quad ; \quad i = 1,2,3$$

أوجد اختبار بييز لاختبار الفرضية $H_i : \theta = \theta_i \, ; i = 1,2,3$، حيث إن دالة الخسارة:

$$L(\theta_i, d_j) = l(j|i) = \begin{cases} 0 & ; \quad i = j \\ 1 & ; \quad i \neq j \end{cases}$$

بما أن X يخضع لتوزيع طبيعي $N(\theta, 4)$، فإن:

$$f(x|\theta_i) = f_i(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{8}(x-\theta_i)^2} \quad ; \quad i = 1,2,3$$

وإن:

$$f_i(x) = f(x|\theta_i) = \prod_{r=1}^{n} f_i(x_r) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{8}\sum_{r=1}^{n}(x_r-\theta_i)^2} \quad ; \quad , i = 1,2,3$$

ونقبل الفرضية $H_i : \theta = \theta_i \; ; i = 1,2,3$ عند تحقق الشرطين في العلاقة (9.6.13)، أي أن:

$$g_i f_i(x) \geq g_j f_j(x) \quad ; \quad i \neq j \;\; , \;\; j = 1,2,3$$

وهذا يعني أن:

$$g_i e^{-\frac{1}{8}\sum_{r=1}^{n}(x_r-\theta_i)^2} \geq g_j e^{-\frac{1}{8}\sum_{r=1}^{n}(x_r-\theta_j)^2}$$

وبفرض $g_1 = g_2 = g_3$ نجد:

$$\sum_{r=1}^{n}(x_r-\theta_i)^2 \leq \sum_{r=1}^{n}(x_r-\theta_j)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{r=1}^{n}(x_r-\theta_i)^2 + \sum_{r=1}^{n}(x_r-\theta_j)^2 = (\theta_i-\theta_j)\bar{x} + \frac{1}{2}(\theta_j^2-\theta_i^2) \geq 0 \quad ; \quad i \neq j \;\; , \;\; j = 1,2,3$$

وعلى ذلك، نقبل الفرضية $H_1 : \theta = \theta_1$ $(i = 1)$ إذا كان $\bar{x}$ محققة للمتباينتين:

$$(\theta_1-\theta_2)\bar{x} + \frac{1}{2}(\theta_2^2-\theta_1^2) = (\theta_1-\theta_2)\bar{x} - \frac{1}{2}(\theta_1^2-\theta_2^2) \geq 0$$

$$(\theta_1-\theta_3)\bar{x} + \frac{1}{2}(\theta_3^2-\theta_1^2) = (\theta_1-\theta_3)\bar{x} - \frac{1}{2}(\theta_1^2-\theta_3^2) \geq 0$$

وبفرض $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3$ نجد:

$$\bar{x} \leq \frac{\theta_1+\theta_2}{2} \quad \text{and} \quad \bar{x} \leq \frac{\theta_1+\theta_3}{2}$$

أي أن منطقة قبول الفرضية $H_1 : \theta = \theta_1$ هي:

$$W_1^* = \left\{ x : \bar{x} \le \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \ , \ \bar{x} \le \frac{\theta_1 + \theta_3}{2} \right\}$$

وبشكل مشابه، نجد منطقة قبول الفرضية $H_2 : \theta = \theta_2$:

$$W_2^* = \left\{ x : \bar{x} \ge \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \ , \ \bar{x} \le \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \right\}$$

وأخيراً، منطقة قبول الفرضية $H_3 : \theta = \theta_3$ هي:

$$W_3^* = \left\{ x : \bar{x} \ge \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \ , \ \bar{x} \le \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} \right\}$$

فمثلاً، إذا كانت $\theta_1 = 1 , \theta_2 = 2 , \theta_3 = 3$ فإن:

$$W_1^* = \left\{ x : \bar{x} \le \frac{3}{2} \ , \ \bar{x} \le 3 \right\} = \left\{ x : \bar{x} \le \frac{3}{2} \right\}$$

$$W_2^* = \left\{ x : \bar{x} \ge \frac{5}{2} \ , \ \bar{x} \le 3 \right\} = \left\{ x : \frac{3}{2} \le \bar{x} \le 3 \right\}$$

$$W_3^* = \left\{ x : \bar{x} \ge \frac{5}{2} \ , \ \bar{x} \ge 3 \right\} = \{ x : \bar{x} \ge 3 \}$$

وهذا يعني:

قبول H_1 إذا كانت $\bar{x} \le \frac{3}{2}$.

قبول H_2 إذا كانت $\frac{3}{2} \le \bar{x} \le 3$.

قبول H_3 إذا كانت $\bar{x} \ge 3$.

بما أن توزيع X مستمر فإن احتمال نقاط الحدود $\frac{3}{2}, 3$ تساوي الصفر، وبالتالي ليس مهماً إلى أي منطقة قبول تنتمي.

تمارين

1. إذا كانت X متغيراً عشوائياً توزيعه:

$f(x;\theta)$:

x \ θ	θ_1	θ_2
1	0.2	0.3
2	0.4	0.5
3	0.3	0.2

وبفرض الحلول الممكنة $D=\{d_1,d_2,d_3\}$ ، ودالة الخسارة معطاة في الجدول الآتي:

θ \ d	d_1	d_2	d_2
θ_1	1	2	3
θ_2	2	-1	0

فالمطلوب:

أ. إيجاد دوال القرار المختلفة لهذه المسألة.

ب. حساب دوال المخاطرة الموافقة لدوال القرار المختلفة.

ج. تحديد دوال القرار المقبولة وغير المقبولة.

2. في التمرين السابق (1)، إذا علمت أن التوزيع القبلي لـــ θ هو:

$$g(\theta)=\begin{cases}0.2 & ; \quad \theta=\theta_1\\ 0.8 & ; \quad \theta=\theta_2\end{cases}$$

فأوجد دالة مخاطرة بييز لكل دالة قرار مقبولة، ومن ثم عين دالة قرار بييز $\delta^*(X)$

وحدد إجراء بييز عند القيم $x = 1,2,3$.

3. أوجد إجراء بييز في المثال (2) باستخدام التوزيع البعدي $g(\theta|x)$.

4. إذا كانت X متغيراً عشوائياً يخضع لتوزيع بيرنولي $B(1,\theta)$ ، حيث إن احتمال النجاح θ يمكن أن يكون $\theta_1 = 1/2 , \theta_2 = 1/3 , \theta_3 = 1/4$ ، وبفرض فئة الحلول الممكنة $D = \{d_1 , d_2\}$ ودالة الخسارة معطاة في الجدول الآتي:

d \ θ	1/2	1/3	1/4
d_1	0	2	3
d_2	1	3	2

والمطلوب:

أ. إيجاد دوال القرار المختلفة.

ب. حساب دوال المخاطرة لكل قرار.

ج. إيجاد دالة قرار بييز.

د. إيجاد دالة قرار أصغر الكبريات.

5. في التمرين السابق (4) إذا علمت أن التوزيع القبلي لـــ θ هو:

$$g(\theta) = \begin{cases} 0.2 & ; \quad \theta = \theta_1 \\ 0.5 & ; \quad \theta = \theta_2 \\ 0.3 & ; \quad \theta = \theta_3 \end{cases}$$

فأوجد دالة قرار أصغر الكبريات.

6. إذا كانت $X = (X_1 , \ldots , X_n)$ عينة عشوائية مأخوذة من توزيع بواسون $\Pi(\theta)$ ، وكان التوزيع القبلي للمعلمة θ هو:

$$g(\theta) = e^{-\theta} \quad ; \quad \theta > 0$$

فأوجد:

أ. مقدّر بيز للمعلمة θ باستخدام دالة خسارة مربع الخطأ.

ب. مقدّر بيز للدالة المعلمية $\tau(\theta)=e^{-\theta}$ باستخدام دالة خسارة مربع الخطأ.

7. إذا كانت $X=(X_1,\ldots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع بيرنولي:

$$f(x|\theta)=\theta^x(1-\theta)^{1-x} \quad ; \quad x=0,1$$

وكانت فئة دوال القرار من الشكل:

$$\delta(X)=\overline{X}+c \qquad (1)$$

حيث إن c مقدار ثابت. عين دالة قرار أصغر الكبريات ضمن دوال الفئة (1).

8. ليكن X متغيراً عشوائياً يخضع لتوزيع ثنائي سالب $\overline{B}(1,\theta)$، وفضاء المعلمة $\Theta=\{1/10\,,2/10\}$ ، $D=\{d_1,d_2\}$ ودالة الخسارة معطاة في الجدول الآتي:

θ \ δ	d_1	d_2
θ_1	0	1
θ_2	2	0

عين دالة قرار أصغر الكبريات $\tilde{\delta}(X)$ ضمن الدوال:

$$\delta_k(x)=\begin{cases} d_1 & ; \quad x=0,\ldots,k-1 \\ d_2 & ; \quad x=k,k+1 \end{cases} \quad ; \quad k=1,2,3,4$$

وإذا كان التوزيع القبلي لـ θ:

$$g(\theta)=\begin{cases} 1/3 & ; \quad \theta=\theta_1 \\ 2/3 & ; \quad \theta=\theta_2 \end{cases}$$

فأوجد دالة قرار بيز.

9. إذا كانت $X = (X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع منتظـــم $R(0,\theta)$ وكـــان توزيع θ القبلي:

$$g(\theta) = \frac{\alpha a^2}{\theta^{\alpha+1}} \quad ; \quad \theta \ge a(a,\alpha > 0)$$

(مثل هذا التوزيع يدعى بتوزيع بيرتو بالمعلمتين (a,α)). فالمطلوب:

أ. أثبت أن التوزيع البعدي، عند الشرط $X = x = (x_1,\dots,x_n)$، هو أيضـــاً توزيع بيرتو بالمعلمتين $(\max(x_1,\dots,x_n), a+n)$.

ب. أوجد مقدّر بييز مستخدماً دالة خسارة مربع الخطأ.

ج. أوجد مقدّر أصغر الكبريات مستخدماً دالة خسارة مربع الخطأ.

10. إذا كانت $X = (X_1,\dots,X_n)$ عينة عشوائية من توزيع:

$$f(x|\theta) = \theta e^{-\theta x} \quad , \quad x > 0$$

وكان التوزيع القبلي لـ θ:

$$g(\theta) = \begin{cases} 1/4 & ; \quad \theta = \theta_0 = 2 \\ 3/4 & ; \quad \theta = \theta_1 = 3 \end{cases}$$

فأوجد اختبـــار بيـــز للفرضيـــة $H_0 : \theta = \theta_0 = 2$ ضـــد الفرضيـــة البديلـــة $H_1 : \theta = \theta_1 = 3$ في الحالتين:

أ. $a = b$.

ب. $a = b = 1$.

ومن ثم عين قوة اختبار بييز عند θ_0 و θ_1.

المراجع

أولاً: المراجع باللغة العربية

1. د. أنيس كنجو، الإحصاء الرياضي، مطبعة زيد ثابت، 1979.

2. د. أنيس كنجو، الإحصاء وطرق تطبيقه في ميادين البحث العلمي، الجزأين الأول والثاني، مؤسسة الرسالة، بيروت، 1987.

3. د. جلال مصطفى الصياد، الاستدلال الإحصائي، دار المريخ للنشر، الرياض، المملكة العربية السعودية، 1993.

4. د. عبدالحفيظ محمد فوزي مصطفى، نظرية الاحتمالات (I ، II)، أكاديمية الدراسات والعلوم الجوية، مصراتة، ليبيا، 1997.

ثانياً: المراجع باللغة الإنجليزية

1. Alexander, M. M.; Franklin, A. G. and Duanc, C. B., *Introduction to The Theory of Statistics*, 3rd edition, 1974.

2. Beaumout, G. P., *Intermediate Mathematical Statistics*, Champan and Hall, London and New York, 1980.

3. Hogg, R. V. and Vraing, A. T., *Introduction to Mathematical Statistics*, Collier McMillan publisher, 1978.

4. Lymann, O., *An Introduction to Statistical Methods and Data Analysis*, 2nd edition, Duxbury press, Boston, USA, 1984.

5. Tohntge, V. K., *An Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, John Wiley and Sons, 1978.

6. Zacks, S., *Parametric Statistical Inference*, Pergamon press, 1981.

ثالثا: المراجع باللغة الروسية

1. جرسيموفيتش، أز ن.، **الإحصاء الرياضي**، الطبعة الثانيـــة، العلــوم، موســكو، 1983.

2. إيفتشينكو، ج. أ.، وميدفيديف، يو. ز.، **الإحصاء الرياضي**، المدرســة العليــا، موسكو، 1984.

3. جمورمان، ب. إ.، **نظرية الاحتمالات والإحصاء الريــاضي**، المدرســة العليــا، موسكو، 1985.

4. كوروليوك، هـــ. ن.، **نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي**، العلوم، موسكو، 1985.

5. بوروفكوف، أ. أ.، **الإحصاء الرياضي**: تقدير المعالم واختبار الفرضيات، العلــوم، موسكون، 1984.

6. كليموف، ج. ب.، **نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي**، جامعة موســـكو، 1980.

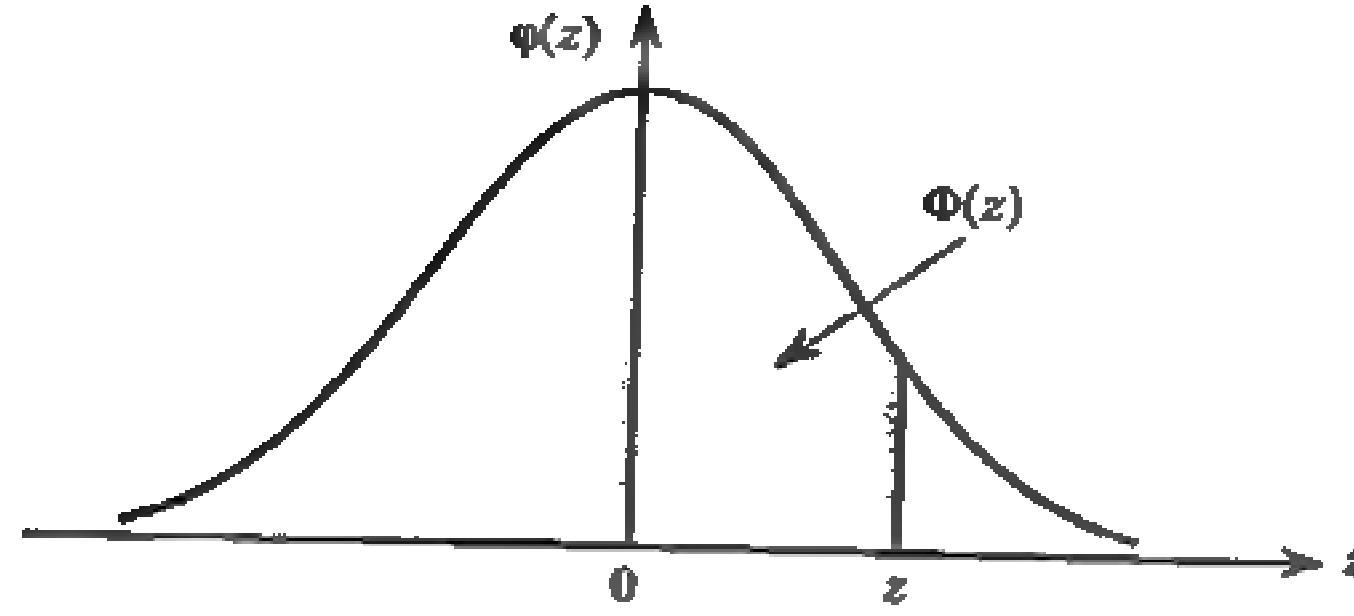
7. كبيدينكا، ب. ف.، **نظرية الاحتمالات**، العلوم، موسكو، 1988.

ملحق الجداول الإحصائية

جدول 1: التوزيع الطبيعي المعياري

The Standard Normal Distribution

جدول قيم الدالة: $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} \, dt$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6551	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7221
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7480	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7672	.7704	.7734	7764	.7794	.7823	.7852
0.8	7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8238	.8238	.8204	.8289	.8315	8340	8366	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8185	.8508	.8531	.8551	8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8706	.8729	.8749	.8770	8790	.8810	.8830
1.2	.8849	8869	8888	.8907	.8925	.8944	8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	9049	9066	.9082	9099	.9115	.9131	9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	9251	.9265	.9279	9292	.9306	.9319
1.5	.9332	9345	9357	.9370	.9382	.9394	9406	9418	9429	.9441
1 6	9452	9463	9474	.9484	.9495	9505	.9515	9525	9535	9545
1.7	9554	9564	9573	.9582	.9591	9599	9608	9616	.9625	9633
1.8	9641	9649	9656	.9664	.9671	9678	9686	.9693	9699	9706
1.9	.9713	9719	9726	.9732	9738	.9744	.9750	9756	9761	9767

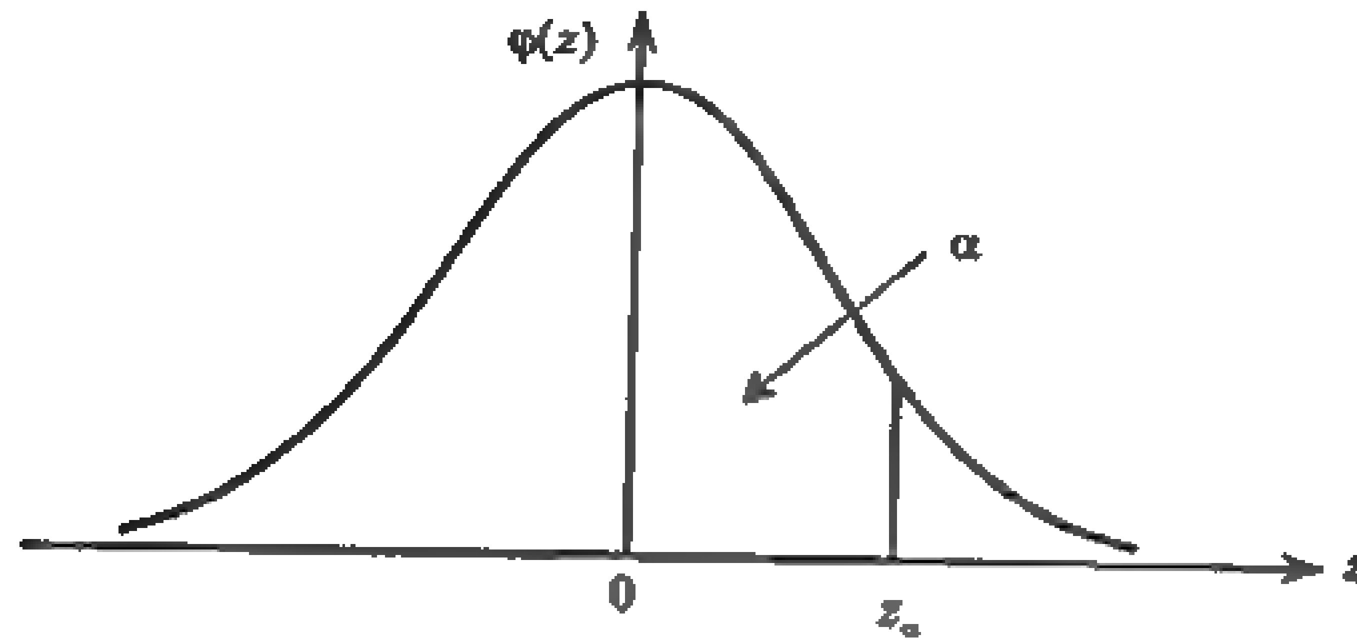
يتبع الجدول 1

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.0	.9772	.9778	9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	9826	.9830	.9834	.9838	9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9961
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9971
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998									
3.6	.9998									
3.7	99989									
3.8	99993									
3.9	99995									
4.0	999968									
4.5	.999997									
5.0	.99999997									

جدول 2: التوزيع الطبيعي المعياري

The Standard Normal Distribution

القيم الحرجة z_α للتوزيع: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_\alpha} e^{-t^2/2}\, dt$



α	z_α
0.50	0.000
0.51	0.025
0.52	0.050
0.53	0.075
0.54	0.100
0.55	0.126
0.56	0.151
0.57	0.176
0.58	0.202
0.59	0.228
0.60	0.253
0.61	0.279
0.62	0.305
0.63	0.332
0.64	0.358
0.65	0.385
0.66	0.412
0.67	0.440

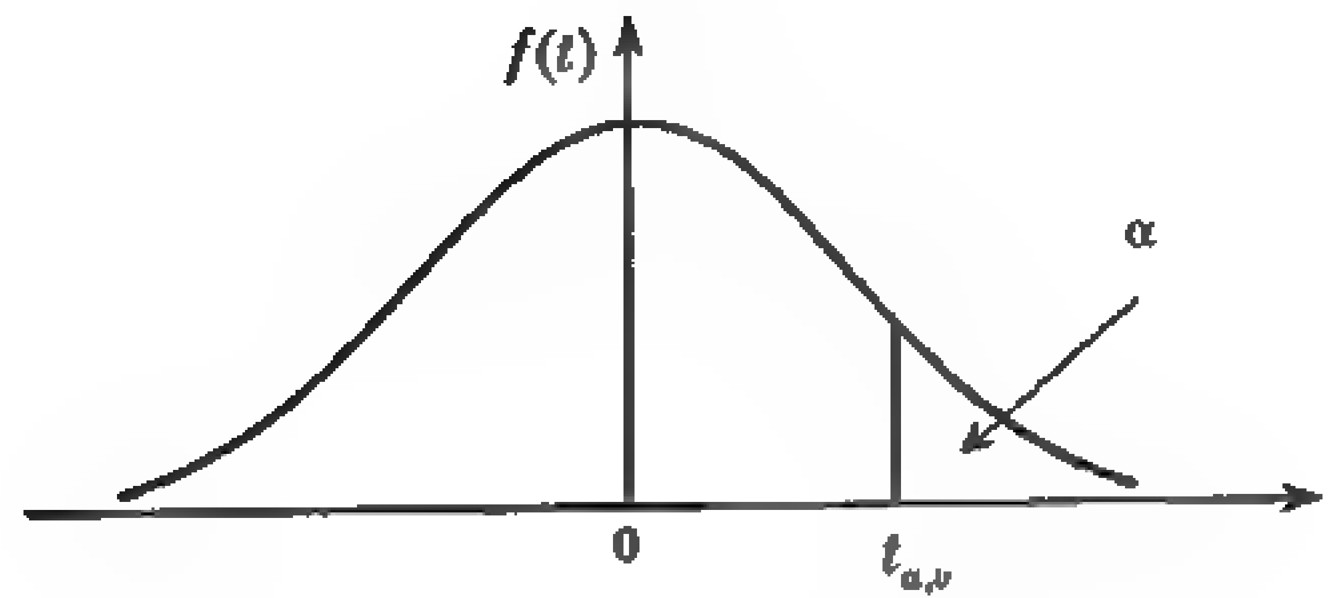
α	z_α
0.68	0.468
0.69	0.496
0.70	0.524
0.71	0.553
0.72	0.583
0.73	0.613
0.74	0.643
0.75	0.674
0.76	0.706
0.77	0.739
0.78	0.772
0.79	0.806
0.80	0.842
0.81	0.878
0.82	0.915
0.83	0.954
0.84	0.994
0.85	1 036

α	z_α
0.86	1.080
0.87	1.126
0.88	1.175
0.89	1.227
0.90	1.282
0.91	1.341
0.92	1.405
0.93	1.476
0.94	1.555
0.95	1.645
0.96	1.751
0.97	1.881
0.98	2.054
0.99	2.326
0.999	3.090
0.9999	3.720
0.99999	4.265

The t Distribution جدول 3: توزيع t

قيم $t_{\alpha,v}$:

$$\alpha = \int_{t_{\alpha,v}}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} dt$$



VALUES OF $t_{\alpha,v}$ *

v \ α	.10	.05	.025	.01	.005	v
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13

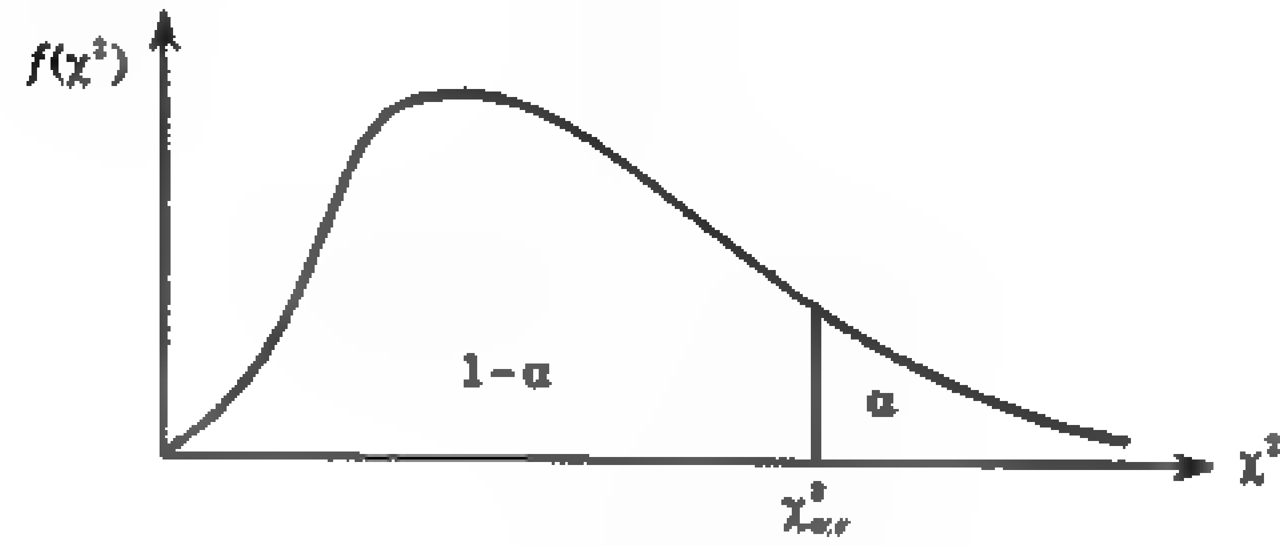
يتبع جدول 3

υ \ α	.10	.05	.025	.01	.005	υ
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf.

* This table is abridged from Table IV of R. A. Fisher, *Statistical Methods for Research Workers*, published by Oliver and Boyd, Ltd., Edinburgh, by permission of the author and publishers.

جدول 4: توزيع χ^2 The Che-Square Distribution

القيم الحرجة $\chi^2_{\alpha,v}$ للتوزيع: $\alpha = \int_{\chi^2_{\alpha,v}}^{\infty} f(\chi^2)\, d(\chi^2) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} \int_{\chi^2_{\alpha,v}}^{\infty} (\chi^2)^{\frac{v}{2}-1} e^{-\chi^2/2} d(\chi^2)$



VALUES OF $\chi^2_{\alpha,v}$ *

v \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005	v
1	.0000393	.000157	.000982	.00393	3.841	5.024	6.635	7.879	1
2	.0100	.0201	.0506	.103	5.991	7.378	9.210	10.597	2
3	.0717	.115	.216	.352	7.815	9.348	11.345	12.838	3
4	.207	.297	.484	.711	9.488	11.143	13.277	14.860	4

يتبع جدول 4

υ \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005	ν
5	.412	.554	.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750	5
6	.676	.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548	6
7	.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278	7
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955	8
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589	9
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188	10
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757	11
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300	12
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819	13
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319	14
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801	15
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267	16
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718	17
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156	18
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582	19
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997	20

يتبع جدول 4

υ \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005	ν
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401	21
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796	22
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181	23
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558	24
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40 646	44.314	46.928	25
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290	26
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645	27
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993	28
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336	29
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672	30

* This table is based on Table 8 of *Biometrika Tables for Statisticians, Volume I,* by permission of the *Biometrika* trustees.

جدول 5: اختبار كالماغوروف Kolmogorov Test

قيم λ_α: $\alpha = P\left(D_n = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)| \geq \lambda_\alpha\right)$

n \ α	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
1	.900	.925	.950	.975	.995
[illegible]	.684	.726	.776	.842	.929
3	.565	.597	.642	.708	.829
4	.494	.525	.564	.624	.734
5	.446	.474	.510	.563	.669
6	.410	.436	.470	.521	.618
7	.381	.405	.438	.486	.577
8	.358	.381	.411	.457	.543
9	.339	.360	.388	.432	.514
10	.322	.342	.368	.409	.486
11	.307	.326	.352	.391	.468
12	.295	.313	.338	.375	.450
13	.284	.302	.325	.361	.433
14	.274	.292	.314	.349	.418
15	.266	.283	.304	.338	.404
16	.358	.274	.295	.328	.391
17	.250	.266	.286	.318	.380
18	.244	.259	.278	.309	.370
19	.237	.252	.272	.301	.361

يتبع جدول 5

n \ α	0.20	0.15	0.10	0.05	0.01
20	.231	.246	.264	.294	.32
25	.21	.22	.24	.264	.23
30	.19	.20	.22	.242	.29
35	.18	.19	.21	.23	.27
40				.21	.25
50				.19	.23
60				.17	.21
70				.16	.19
80				.15	.18
90				.14	
100				.14	
Asymptotic Formula:	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

Reject the hypothetical distribution $F(x)$ if $D_n = \max|F_n^*(x) - F(x)|$ exceeds the tabulated value.

جدول 6: القيم الحرجة لاختبار ويلكوكسن

n	One - sided $\alpha = 0.01$ Two - sided $\alpha = 0.02$	One - sided $\alpha = 0.025$ Two - sided $\alpha = 0.05$	One - sided $\alpha = 0.05$ Two - sided $\alpha = 0.10$
5			1
6		1	2
7	0	2	4
8	2	4	6
9	3	6	8
10	5	8	11
11	7	11	14
12	10	14	17
13	13	17	21
14	16	21	26
15	20	25	30
16	24	30	36
17	28	35	41
18	33	40	47
19	38	46	54
20	43	52	60
21	49	59	68
22	56	66	75
23	62	73	83
24	69	81	92
25	77	90	101
26	85	98	110
27	93	107	120
28	102	117	130
29	111	127	141
30	120	137	152

Reproduced from F. Wilcoxon and R. A. Wilcox *Some Rapid Approximate Statistical Procedures*, American Cyanamid Company, Pearl River, N. Y., 1964 by permission of the American Cyanamid Company.

جدول 7: القيم الحرجة $t_\alpha(n)$ لمعامل ارتباط الرتب (سبيرمان)

n	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$
5	0.900	--	--	--
6	0.829	0.886	0.943	--
7	0.714	0.786	0.893	--
8	0.643	0.738	0.833	0.881
9	0.600	0.683	0.783	0.833
10	0.564	0.648	0.745	0.794
11	0.523	0.623	0.736	0.818
12	0.497	0.591	0.703	0.780
13	0.475	0.566	0.673	0.745
14	0.457	0.545	0.646	0.716
15	0.441	0.525	0.623	0.689
16	0.425	0.507	0.601	0.666
17	0.412	0.490	0.582	0.645
18	0.399	0.476	0.564	0.625
19	0.388	0.462	0.549	0.608
20	0.377	0.450	0.534	0.591
21	0.368	0.438	0.521	0.576
22	0.359	0.428	0.508	0.562
23	0.351	0.418	0.496	0.549
24	0.343	0.409	0.485	0.537
25	0.336	0.400	0.475	0.526
26	0.329	0.392	0.465	0.515
27	0.323	0.385	0.456	0.505
28	0.317	0.377	0.448	0.496
29	0.311	0.370	0.440	0.487
30	0.305	0.364	0.432	0.478

جدول 8: الاحتمالات المتجمعة في اختبار التلاحقات

(n_1, n_2)	a								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2,3)	0.200	0.500	0.900	1.000					
(2,4)	0.133	0.400	0.800	1.000					
(2,5)	0.095	0.333	0.714	1.000					
(2,6)	0.071	0.286	0.643	1.000					
(2,7)	0.056	0.250	0.583	1.000					
(2,8)	0.044	0.222	0.533	1.000					
(2,9)	0.036	0.200	0.491	1.000					
(2,10)	0.030	0.182	0.455	1.000					
(3,3)	0.100	0.300	0.700	0.900	1.000				
(3,4)	0.057	0.200	0.543	0.800	0.971	1.000			
(3,5)	0.036	0.143	0.429	0.714	0.929	1.000			
(3,6)	0.024	0.107	0.345	0.643	0.881	1.000			
(3,7)	0.017	0.083	0.283	0.583	0.833	1.000			
(3,8)	0.012	0.067	0.236	0.533	0.788	1.000			
(3,9)	0.009	0.055	0.200	0.491	0.745	1.000			
(3,10)	0.007	0.045	0.171	0.455	0.706	1.000			
(4,4)	0.029	0.114	0.371	0.629	0.886	0.971	1.000		
(4,5)	0.016	0.071	0.262	0.500	0.786	0.929	0.992	1.000	
(4,6)	0.010	0.048	0.190	0.405	0.690	0.881	0.976	1.000	
(4,7)	0.006	0.033	0.142	0.333	0.606	0.833	0.954	1.000	
(4,8)	0.004	0.024	0.109	0.279	0.533	0.788	0.929	1.000	
(4,9)	0.003	0.018	0.085	0.236	0.471	0.745	0.902	1.000	
(4,10)	0.002	0.014	0.068	0.203	0.419	0.706	0.874	1.000	
(5,5)	0.008	0.040	0.167	0.357	0.643	0.833	0.960	0.992	1.000
(5,6)	0.004	0.024	0.110	0.262	0.522	0.738	0.911	0.976	0.998
(5,7)	0.003	0.015	0.076	0.197	0.424	0.652	0.854	0.955	0.992
(5,8)	0.002	0.100	0.054	0.152	0.347	0.576	0.793	0.929	0.984
(5,9)	0.001	0.007	0.039	0.119	0.287	0.510	0.734	0.902	0.972
(5,10)	0.001	0.005	0.029	0.095	0.239	0.455	0.678	0.874	0.958
(6,6)	0.002	0.013	0.067	0.175	0.392	0.608	0.825	0.933	0.987
(6,7)	0.001	0.008	0.043	0.121	0.296	0.500	0.733	0.879	0.966
(6,8)	0.001	0.005	0.028	0.086	0.226	0.413	0.646	0.821	0.937
(6,9)	0.000	0.003	0.019	0.063	0.175	0.343	0.566	0.762	0.902
(6,10)	0.000	0.002	0.013	0.047	0.137	0.288	0.497	0.706	0.864

يتبع الجدول 8

(n_1,n_2)	a								
	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(7,7)	0.001	0.004	0.025	0.078	0.209	0.383	0.617	0.791	0.922
(7,8)	0.000	0.002	0.015	0.051	0.149	0.296	0.514	0.704	0.867
(7,9)	0.000	0.001	0.010	0.035	0.108	0.231	0.427	0.622	0.806
(7,10)	0.000	0.001	0.006	0.024	0.080	0.182	0.355	0.549	0.743
(8,8)	0.000	0.001	0.009	0.032	0.100	0.214	0.405	0.595	0.786
(8,9)	0.000	0.001	0.005	0.020	0.069	0.157	0.319	0.500	0.702
(8,10)	0.000	0.000	0.003	0.013	0.048	0.117	0.251	0.419	0.621
(9,9)	0.000	0.000	0.003	0.012	0.044	0.109	0.238	0.399	0.601
(9,10)	0.000	0.000	0.002	0.008	0.029	0.077	0.179	0.319	0.510
(10,10)	0.000	0.000	0.001	0.004	0.019	0.051	0.128	0.242	0.414

(n_1,n_2)	a									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2,3)										
(2,4)										
(2,5)										
(2,6)										
(2,7)										
(2,8)										
(2,9)										
(2,10)										
(3,3)										
(3,4)										
(3,5)										
(3,6)										
(3,7)										
(3,8)										
(3,9)										
(3,10)										
(4,4)										
(4,5)										

يتبع الجدول 8

(n_1, n_2)	a									
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(4,6)										
(4,7)										
(4,8)										
(4,9)										
(4,10)										
(5,5)										
(5,6)	1.000									
(5,7)	1.000									
(5,8)	1.000									
(5,9)	1.000									
(5,10)	1.000									
(6,6)	0.998	1.000								
(6,7)	0.992	0.999	1.000							
(6,8)	0.984	0.998	1.000							
(6,9)	0.972	0.994	1.000							
(6,10)	0.958	0.990	1.000							
(7,7)	0.975	0.996	0.999	1.000						
(7,8)	0.949	0.988	0.998	1.000	1.000					
(7,9)	0.916	0.975	0.994	0.999	1.000					
(7,10)	0.879	0.957	0.990	0.998	1.000					
(8,8)	0.900	0.968	0.991	0.999	1.000	1.000				
(8,9)	0.843	0.939	0.980	0.996	0.999	1.000	1.000			
(8,10)	0.782	0.903	0.964	0.990	0.998	1.000	1.000			
(9,9)	0.762	0.891	0.956	0.988	0.997	1.000	1.000	1.000		
(9,10)	0.681	0.834	0.923	0.974	0.992	0.999	1.000	1.000	1.000	
(10,10)	0.586	0.758	0.872	0.949	0.981	0.996	0.999	1.000	1.000	1.000